



SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

IUT • 1^{er} Cycle • Licence

LES PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

*Paul Lorrain
Dale R. Corson
François Lorrain*

DUNOD

www.ebooks-laind.net



SHOUT
SHARE IT

LES PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Paul Lorrain

Professeur à l'université de Montréal et à l'université Mc Gill

Dale R. Corson

Professeur à l'université Cornell (États-Unis)

François Lorrain

Professeur au collège Jean-de-Brébeuf de Montréal

Traduit de l'américain par

Carlo Rizzo

Professeur à l'université Paul-Sabatier de Toulouse

Cécile Robilliard

Chargée de recherche au CNRS

DUNOD

Table des matières

Les astérisques indiquent les parties qui peuvent être omises sans perdre la cohérence d'ensemble.

POUR COMMENCER	XI
AVANT-PROPOS	XIII
POUR L'ENSEIGNANT	XV
LISTE DE SYMBOLES	XVII
CHAPITRE 1 • OPÉRATEURS VECTORIELS	
1.1 Algèbre vectorielle	2
1.2 Le gradient grad <i>f</i>	3
1.3 Le flux	5
1.4 La divergence div B	5
1.5 Le théorème de la divergence	7
1.6 L'intégrale curviligne $\int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$. Champs conservatifs	8
1.7 Le rotationnel rot B	8
1.8 Le théorème de Stokes	11
1.9 L'opérateur laplacien Δ	12
1.10 Scalaires et vecteurs en coordonnées sphériques	12
1.11 Résumé	16
EXERCICES	18
CHAPITRE 2 • LA REPRÉSENTATION COMPLEXE	
2.1 Les nombres complexes	22
2.2 La représentation complexe	24
2.3 Usage de la représentation complexe	26
2.4 Produit de variables en représentation complexe	27
2.5 Quotient de variables en représentation complexe	29
2.6 Vecteurs tournants	29
2.7 Notations	30
2.8 Résumé	30
EXERCICES	31
CHAPITRE 3 • CHAMPS ÉLECTRIQUES : LOI DE COULOMB ET THÉORÈME DE GAUSS	
3.1 Le champ électrique E	34
3.2 La loi de Coulomb	35

3.3	Le principe de superposition	36
3.4	Le potentiel électrique V et le rotationnel de $\mathbf{E}$	41
3.5	Le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de corps macroscopiques	46
3.6	Le théorème de Gauss	47
3.7	Résumé	57
	EXERCICES	58
CHAPITRE 4 • CHAMPS ÉLECTRIQUES : ÉQUATIONS DE POISSON ET DE LAPLACE.		
CIRCUITS ÉLECTRIQUES. CONDUCTION		
4.1	Les équations de Poisson et de Laplace	67
4.2	Conservation de la charge électrique	72
4.3	La loi d'Ohm	73
4.4	* Circuits électriques. Lois de Kirchhoff	76
4.5	La conduction	78
4.6	Conducteurs isolés dans des champs statiques	82
4.7	Résumé	83
	EXERCICES	84
CHAPITRE 5 • CHAMPS ÉLECTRIQUES : LES MULTIPÔLES ÉLECTRIQUES		
5.1	Le dipôle électrique	89
5.2	* Le quadrupôle électrique linéaire	92
5.3	* Les multipôles électriques	94
5.4	* Le champ électrique à l'extérieur d'une distribution de charge, développée en multipôles	95
5.5	* Résumé	102
	EXERCICES	103
CHAPITRE 6 • CHAMPS ÉLECTRIQUES : ÉNERGIE, CAPACITÉ ET FORCES		
6.1	Énergie potentielle en termes de charges q et potentiel V	107
6.2	Énergie potentielle en termes de champ électrique $\mathbf{E}$	110
6.3	La capacité d'un conducteur isolé	113
6.4	La capacité entre deux conducteurs	114
6.5	* La constante de temps	116
6.6	* Le courant alternatif dans un condensateur	117
6.7	Forces électriques sur un conducteur	119
6.8	Le calcul des forces électriques par la méthode du travail virtuel	121
6.9	Résumé	122
	EXERCICES	123
CHAPITRE 7 • CHAMPS ÉLECTRIQUES : MATÉRIAUX DIÉLECTRIQUES, CHARGES LIÉES ET INDUCTION ÉLECTRIQUE $\mathbf{D}$		
7.1	Les trois processus fondamentaux de polarisation	130
7.2	La polarisation électrique $\mathbf{P}$	130
7.3	Charges libres et liées	130
7.4	Le champ électrique d'un diélectrique polarisé	133
7.5	Le théorème de Gauss dans les diélectriques	134
7.6	Les équations de Poisson et de Laplace pour V dans les diélectriques	134
7.7	L'induction électrique $\mathbf{D}$. La divergence de $\mathbf{D}$	134

7.8	La susceptibilité diélectrique χ_e	137
7.9	La permittivité relative ϵ_r	137
7.10	La densité de courant de déplacement $\partial \mathbf{D} / \partial t$	142
7.11	Résumé	143
	EXERCICES	145
CHAPITRE 8 • CHAMPS ÉLECTRIQUES : DIÉLECTRIQUES RÉELS, CONDITIONS DE CONTINUITÉ À UNE INTERFACE. ÉNERGIE EMMAGASINÉE		
8.1	* Les diélectriques réels	149
8.2	Les conditions aux limites à une interface	154
8.3	L'énergie potentielle d'une distribution de charge en présence de diélectriques	157
8.4	Les forces électriques en présence de diélectriques	160
8.5	Résumé	160
	EXERCICES	161
CHAPITRE 9 • * CHAMPS ÉLECTRIQUES : LES IMAGES. L'ÉQUATION DE LAPLACE EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES		
9.1	* Les images	167
9.2	* La résolution de l'équation de Laplace en coordonnées cartésiennes	172
9.3	* Résolution de l'équation de Laplace avec un tableau	177
9.4	* Résumé	182
	EXERCICES	182
CHAPITRE 10 • * CHAMPS ÉLECTRIQUES : L'ÉQUATION DE LAPLACE EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES. L'ÉQUATION DE POISSON POUR E		
10.1	* Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. L'équation de Legendre	187
10.2	* L'équation de Poisson pour E dans des champs électrostatiques	194
10.3	* Résumé	196
	EXERCICES	197
CHAPITRE 11 • * RELATIVITÉ : LA TRANSFORMATION DE LORENTZ		
11.1	* Référentiels et observateurs	200
11.2	* La transformation galiléenne	201
11.3	* Le principe de relativité	201
11.4	* La transformation de Lorentz	202
11.5	* Transformation d'une longueur. La contraction de Lorentz	205
11.6	* Transformation d'un intervalle de temps. Dilatation du temps	206
11.7	* Transformation d'une vitesse	209
11.8	* L'invariance de la charge électrique	210
11.9	* Résumé	210
	* EXERCICES	212
CHAPITRE 12 • * RELATIVITÉ : MASSE, IMPULSION, FORCE ET ÉNERGIE		
12.1	* La masse relativiste	217
12.2	* L'impulsion relativiste	218
12.3	* La force relativiste	219
12.4	* L'énergie relativiste $\mathcal{E} = mc^2$	219

12.5 * Transformation d'une force	222
12.6 * Le photon	223
12.7 * Résumé	223
EXERCICES	225
CHAPITRE 13 • * RELATIVITÉ : LES CHAMPS E ET B D'UNE CHARGE ÉLECTRIQUE EN MOUVEMENT	
13.1 * La force sur q	229
13.2 * Champs électrique et magnétique	232
13.3 * La force sur Q	238
13.4 * Transformation de Q , E , B , A et V	239
13.5 * Résumé	242
EXERCICES	243
CHAPITRE 14 • CHAMPS MAGNÉTIQUES : L'INDUCTION MAGNÉTIQUE B ET LE POTENTIEL VECTEUR A	
14.1 * Les monopôles magnétiques	245
14.2 L'induction magnétique B . La loi de Biot et Savart	246
14.3 La divergence de B	254
14.4 Le potentiel vecteur A	255
14.5 Résumé	261
EXERCICES	262
CHAPITRE 15 • CHAMPS MAGNÉTIQUES : LE POTENTIEL VECTEUR A. LE THÉORÈME DE LA CIRCULATION D'AMPÈRE	
15.1 L'intégrale curviligne de $A \cdot d\mathbf{l}$ sur une courbe fermée	267
15.2 Le laplacien de A	270
15.3 La divergence de A	270
15.4 Le rotationnel de B . Le théorème de la circulation d'Ampère	271
15.5 Résumé	275
EXERCICES	275
CHAPITRE 16 • * CHAMPS MAGNÉTIQUES : MATÉRIAUX MAGNÉTIQUES	
16.1 * Les différents types de matériaux magnétiques	279
16.2 * Les courants équivalents. La loi de Biot et Savart revisitée. La divergence de B	281
16.3 * Le champ magnétique H . Le rotationnel de H . Le théorème de la circulation d'Ampère revu et corrigé	283
16.4 * La susceptibilité magnétique χ_m et la perméabilité relative μ_r	285
16.5 * Les conditions aux limites pour B et H	286
16.6 * B en fonction de H dans les matériaux ferromagnétiques	288
16.7 * Le barreau aimanté	290
16.8 * Résumé	292
EXERCICES	293
CHAPITRE 17 • CHAMPS MAGNÉTIQUES : FORCES MAGNÉTIQUES SUR DES CHARGES ET DES COURANTS	
17.1 La force de Lorentz	299
17.2 La force magnétique sur un fil parcouru par un courant	307

17.3 La force magnétique entre deux circuits fermés	307
17.4 La force magnétique sur une distribution volumique de courant	310
17.5 La loi d'Ohm pour des conducteurs en mouvement	312
17.6 Charges électrostatiques de volume à l'intérieur de conducteurs en mouvement dans des champs magnétiques	322
17.7 Résumé	323
EXERCICES	324
CHAPITRE 18 • CHAMPS MAGNÉTIQUES : LA LOI DE L'INDUCTION DE FARADAY	
18.1 La loi de l'induction de Faraday pour les champs $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Force électromotrice induite	333
18.2 La loi d'induction de Faraday pour des $\mathbf{B}$ variables. Le rotationnel de $\mathbf{E}$	339
18.3 Le champ électrique $\mathbf{E}$ exprimé en termes des potentiels V et $\mathbf{A}$	341
18.4 Les champs $\mathbf{E}$, $-\text{grad } V$, $-\partial\mathbf{A}/\partial t$ et $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$	345
18.5 * Lien entre les deux formes de la loi de l'induction de Faraday	346
18.6 Cinq équations clefs	348
18.7 Résumé	348
EXERCICES	349
CHAPITRE 19 • * CHAMPS MAGNÉTIQUES : INDUCTANCES PROPRE ET MUTUELLE	
19.1 * L'inductance mutuelle M	357
19.2 * L'inductance propre L	360
19.3 * Constante de temps et impédance Z d'une bobine à inductance	362
19.4 * Résumé	363
EXERCICES	364
CHAPITRE 20 • CHAMPS MAGNÉTIQUES : ÉNERGIE MAGNÉTIQUE ET FORCES MAGNÉTIQUES MACROSCOPIQUES	
20.1 Emmagasinement d'énergie dans un circuit inductif	371
20.2 Densité d'énergie magnétique	374
20.3 Inductance propre d'une distribution volumique de courant	376
20.4 Force et couple entre deux circuits parcourus par du courant	377
20.5 Pression magnétique	382
20.6 Forces magnétiques sur des conducteurs en mouvement dans des champs magnétiques	384
20.7 Résumé	384
EXERCICES	385
CHAPITRE 21 • LES ÉQUATIONS DE MAXWELL	
21.1 L'équation pour le rotationnel de $\mathbf{B}$	391
21.2 Les équations de Maxwell sous forme locale	392
21.3 Les équations de Maxwell sous forme intégrale	393
21.4 La loi de conservation de la charge	396
21.5 Les équations de Maxwell sont redondantes !	396
21.6 La dualité	397
21.7 La condition de Lorentz	398
21.8 Résumé	399
EXERCICES	400

CHAPITRE 22 • ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES : DANS LE VIDE, LES ISOLANTS ET LES CONDUCTEURS

22.1 Le spectre électromagnétique	407
22.2 Les ondes	409
22.3 Les ondes électromagnétiques dans le vide	411
22.4 Le théorème de Poynting	415
22.5 Les ondes électromagnétiques dans les isolants	416
22.6 Les ondes électromagnétiques dans les conducteurs	418
22.7 Résumé	421
EXERCICES	423

CHAPITRE 23 • ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES : RÉFLEXION ET RÉFRACTION

23.1 Les lois de Descartes pour la réflexion et la réfraction	431
23.2 Les équations de Fresnel	433
23.3 Réflexion et réfraction à l'interface entre deux isolants	435
23.4 Réflexion et réfraction sur la surface d'un bon conducteur	444
23.5 Résumé	446
EXERCICES	447

CHAPITRE 24 • ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES : ONDES GUIDÉES

24.1 Les câbles à fils parallèles	451
24.2 Les câbles coaxiaux	452
24.3 Les lignes microruban	455
24.4 Les guides d'onde métalliques creux	457
24.5 Les guides d'onde optiques	461
24.6 Résumé	466
EXERCICES	467

CHAPITRE 25 • LE RAYONNEMENT D'UN DIPÔLE ÉLECTRIQUE. ANTENNES

25.1 Le rayonnement d'un dipôle électrique	470
25.2 Les antennes	482
25.3 Les antennes quart d'onde et demi-onde	484
25.4 Réseaux d'antennes	487
25.5 Résumé	492
EXERCICES	492

ANNEXE A • PRÉFIXES ET SYMBOLES DU SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS (SI)

ANNEXE B • TABLE DE CONVERSION SI-CGS

ANNEXE C • HISTOIRE DES ÉQUATIONS DE « MAXWELL »

ANNEXE D • CHAMPS ET POTENTIELS RETARDÉS

ANNEXE E • DÉFINITIONS ET IDENTITÉS VECTORIELLES, CONSTANTES PHYSIQUES ET ÉQUATIONS DE MAXWELL

RÉPONSES

BIBLIOGRAPHIE

INDEX

Pour commencer

Cher lecteur,

Une longue route s'ouvre devant nous. Longue ? Une route intéressante n'est jamais assez longue, donc vous ne la trouverez peut-être pas trop longue, après tout.

Ce livre porte sur les *phénomènes*. Il y a beaucoup de mathématiques, mais l'objectif fondamental est de comprendre les *phénomènes*. Comprendre : c'est un objectif ambitieux ! La nature est *si* compliquée que nous avons souvent l'impression que personne ne comprend réellement *quoi que ce soit* ! Mais nous essayons tous !

Ce livre a pour but de vous donner une *connaissance opérationnelle* des phénomènes électromagnétiques. *La connaissance est puissance*, mais seulement si on sait l'utiliser ! C'est pourquoi plus de 100 exemples et 350 problèmes explorent une grande variété d'applications de la théorie.

Le rôle de ce livre est d'*ouvrir des portes* !

Les phénomènes électromagnétiques. Il y a des appareils électriques, magnétiques et électromagnétiques partout. Pensez aux vastes domaines de l'électronique, de l'instrumentation, des communications, de l'informatique et des technologies énergétiques. Pensez aux téléphones portables, aux fibres optiques, aux récepteurs radio et télé, à la télécommande de véhicules à la surface de Mars, et aux milliers d'autres appareils. Vous trouverez ici beaucoup de références à des appareils.

On trouve aussi des phénomènes électromagnétiques partout dans la nature. À nouveau, pour n'en citer que quelques-uns, il y a les éclairs, les couchers de soleil, le champ magnétique terrestre, les ceintures de van Allen autour de la terre, les taches solaires et les galaxies.

Évidemment nous n'abordons pas, et ne pouvons aborder, tout ce qui est connu sur les phénomènes électromagnétiques. Il faudrait pour cela que mille scientifiques écrivent mille gros livres, sur une période de plusieurs années.

Ainsi, même si vous étudiez ce livre d'un bout à l'autre, vous ne serez pas familier avec *tous* les aspects des phénomènes électromagnétiques. Mais vous aurez commencé.

Les problèmes. Réolvez autant de problèmes que vous pourrez ; il n'y a pas beaucoup d'intérêt à seulement lire la théorie. Ce qui est important, c'est ce qu'on peut en *faire* !

Il y a trois types de problèmes.

Les problèmes que vous trouverez ici sont du *premier type* : des problèmes que quelqu'un, quelque part, a déjà résolus. C'est par là qu'il faut commencer. Mais attention : Les solutions (les nôtres, par exemple) ne sont pas nécessairement satisfaisantes ; elles peuvent être mal faites, ou à moitié vraies, ou même complètement fausses. On dit qu'il est moins important de répondre à une question que de remettre en question une réponse. Les ingénieurs et les scientifiques sont pressés, comme tout le monde, ainsi les *solutions* tendent à devenir des dogmes que personne ne met en cause.

Les problèmes du *deuxième type* sont plus intéressants : ce sont ceux qui sont connus mais que personne n'a jamais résolus. C'est sur ces problèmes que portent les articles de recherche. Plusieurs des exemples de ce livre sont tirés d'articles de recherche écrits par les auteurs et leurs collègues. Ici encore, attention ! Tous les articles de recherche sont relatés, mais ni l'auteur ni le rapporteur ne sont infallibles - et tous deux sont généralement membres de la même communauté, avec sa propre doctrine.

Soyez donc sceptique !

Mais il existe aussi des problèmes de *troisième type* : des problèmes auxquels personne n'a même *pensé* ! Ils sont sans aucun doute innombrables. Ce sont les plus intéressants, mais la difficulté majeure est de les formuler. On dit aussi : « Le type de personne dont on a le plus besoin n'est pas celui qui sait répondre à de vieilles questions bien formulées, mais celui qui est capable d'en poser de nouvelles. »

La bibliothèque. Feuillotez régulièrement des revues telles que *Technology Review*, *Physics World*, *Physics Today* et *The Industrial Physicist*. Vous les trouverez en bibliothèque universitaire. Elles vous ouvriront *beaucoup* de portes. Comme beaucoup d'articles y sont écrits pour des scientifiques expérimentés, passez simplement ce que vous ne comprenez pas. Consultez également des manuels comme *Electronics Engineers Handbook* ou *Reference Data For Radio Engineers*. Il y en a beaucoup d'autres.

À vos marques !

Prêts ?

Partez !

Jusqu'où irez-vous ?

Avant-propos

Ce livre est destiné à un cours d'un ou deux semestres sur l'électromagnétisme. C'est une émanation de l'ouvrage de référence *Electromagnetic Fields and Waves*, des mêmes auteurs et du même éditeur, qui a été traduit en Arabe, Chinois, Français, Allemand, Portugais et Espagnol.

Ici aussi notre but est de donner au lecteur une *connaissance opérationnelle* de l'électromagnétisme. Nous soulignons non seulement les principes de base, mais aussi beaucoup d'applications allant de l'exploration souterraine aux taches solaires. Il y a plus de 100 exemples et plus de 350 problèmes. D'après un professeur, les problèmes sont insurpassables ! Il y a des problèmes faciles et des problèmes réalistes. Certaines des réponses sont données à la fin du livre.

Une petite partie de la théorie, ainsi que quelques exemples, concernent des travaux récents des auteurs et de leurs collègues, cités dans la bibliographie.

Les deux premiers chapitres portent sur les vecteurs et la représentation complexe. Il y a huit chapitres sur les champs électriques (dont quatre optionnels), trois sur la relativité (tous optionnels), sept sur les champs magnétiques (dont trois optionnels), un qui regroupe les équations de Maxwell, trois sur les ondes et un sur le rayonnement, pour un total de 25 chapitres. Les circuits électriques sont discutés brièvement aux endroits appropriés. Les astérisques indiquent les parties et les chapitres qui peuvent être omis sans perdre la cohérence d'ensemble. Chaque chapitre est suivi d'un résumé et d'une série de problèmes classés selon le numéro de la partie concernée. À la fin, il y a cinq annexes, une bibliographie et un index.

Les enseignants devraient lire les Notes pour l'enseignant qui suivent cet avant-propos.

La conception de ce livre est issue d'une consultation avec vingt enseignants, en trois temps. Au tout début, j'ai eu une avalanche de suggestions de David Kaplan de Yeshiva University à New York, Paul LaFrance de l'Université du Québec à Trois-Rivières, Eric T. Lane de l'Université du Tennessee à Chattanooga, James McTavish de Liverpool John Moores University, et Hywel Morgan de l'Université de Glasgow.

Ultérieurement j'ai reçu d'autres suggestions de Randolph R. Aldinger de Gettysburg College, Mario Belloni de Davidson College, Roy L. Champion du College of William

and Mary, Dennis P. Clougherty de l'Université du Vermont, Douglas F. Cowen de l'Université de Pennsylvanie, G. Dugan de Cornell University, Daniel L. Hatten du Rose Hulman Institute of Technology, R. A. Heelis de l'Université du Texas à Dallas, Robert H. Good de California State University à Hayward, Mark G. Kuzik de Washington State University, Steven H. Mellema du Gustavus Adolphus College, Beth Parks de Colgate University, Philip J. Siemens de l'Oregon State University, Stephen Teitsworth de Duke University, et Henry S. Valk du Georgia Institute of Technology.

Même si j'ai exprimé ma gratitude individuellement à chacun de ces enseignants, je leur redis ici mes remerciements. Leur collaboration est profondément appréciée.

Daniel Hatten a contribué à une partie du chapitre 9 sur l'utilisation des tableurs pour le calcul des champs électromagnétiques et aux problèmes correspondants. Je le remercie d'avoir partagé sa vaste expérience de ce domaine.

En plus d'avoir fait une multitude de suggestions, Paul Lafrance a contrôlé l'intégrité du texte avec compétence. La tâche fut longue et difficile, à cause des innombrables symboles mathématiques et références. Son aide fut profondément appréciée. Toute erreur restante est ma propre responsabilité. Joseph Miskin, qui a tracé les courbes et les surfaces pour *Electromagnetic Fields and Waves*, en a tracé beaucoup d'autres pour ce livre.

Je suis reconnaissant à Serge Koutchmy, de l'Institut d'Astrophysique de Paris, à Jean-Louis Lemouél de l'Institut de Physique du Globe de Paris, au regretté Neville Robinso du Saint Catherine's College d'Oxford University, à Ernesto Martín et José Margined de la Universidad de Murcia, et à Antonio Castellanos de la Universidad de Sevilla, pour leur hospitalité.

Je suis particulièrement redevable au Prof. A. E. Williams-Jones, Directeur du Department of Earth and Planetary Sciences de la McGill University de Montréal, où la majeure partie de ce livre a été écrite.

Holly Hodder, éditeur pour la physique chez Freeman, m'a été très précieux au cours des premiers stades de la préparation de ce livre. Son successeur Susan Brennan, avec ses assistants Ayisha Day, Serena Tan et Brian Donnellan, ont conduit l'opération de main de maître jusqu'à la publication finale.

C'est un plaisir de remercier Rob Siedenburg pour la composition soignée, ainsi que Kris Engherg et Rhonda Ries, tous des Publication Services, Champaign, Illinois, qui ont été très utiles au moment de la frappe du manuscrit.

Last, but not least, je dois beaucoup à mon épouse, Dorothée Sainte-Marie, qui tolère depuis tant d'années mon penchant pour la physique.

Je serai reconnaissant aux lecteurs qui m'écriront pour faire soit des suggestions soit des corrections.

Paul Lorrai
Department of Earth and Planetary Science
McGill University
Montréal, Québec, Canada H3A 2A4
Mai 2000

Pour l'enseignant

Les circuits électriques. Nous avons suivi le conseil de plusieurs enseignants et n'avons abordé les circuits que brièvement. Suivant le cursus, vous pourriez vouloir les omettre complètement. Si, au contraire, vous souhaitez insister sur les circuits, consultez alors *Electromagnetic Fields and Waves*, des mêmes auteurs (3^e édition, Freeman, New York, 1988).

Les problèmes. Les réponses à certains des problèmes sont données à la fin du livre, avec deux chiffres significatifs. Bien sûr, les enseignants peuvent réclamer plus de précision. Ils trouveront de nombreux problèmes résolus dans *Electromagnetism : Principles and Applications*, par Paul Lorrain et Dale Corson, publié également par Freeman. Ce livre est le complément de celui-ci, presque au même niveau, et nous lui avons emprunté beaucoup de problèmes. On trouvera des problèmes plus difficiles dans *Electromagnetic Fields and Waves*. Les enseignants manquant de temps peuvent obtenir un manuel de solutions pour ce livre-ci auprès de l'éditeur (voir ci-dessous).

Les problèmes difficiles peuvent être résolus en classe. En effet, ce n'est pas une mauvaise politique que de faire un peu plus en cours que de corriger les problèmes, en expliquant bien sûr pendant la correction les principes impliqués.

Les astérisques signalent les parties et les chapitres qui peuvent être omis sans perdre la cohérence d'ensemble. Les enseignants ont ainsi beaucoup de souplesse pour planifier leur cours sur un semestre. Voici d'autres idées sur ce qu'on peut sacrifier sans regrets, et ce qui est vraiment essentiel.

Chapitre 1, *les vecteurs*. Pour certains groupes, ce chapitre servira seulement de rappel bref. Mais les étudiants *doivent* être à l'aise avec l'utilisation des quatre opérateurs de base **grad**, **div**, **rot** et Δ , au moins en coordonnées cartésiennes. Il est recommandé de le vérifier par des exercices.

Chapitre 2, *la représentation complexe*. Traditionnellement, la représentation complexe n'est jamais enseignée explicitement dans les cours de physique. C'est dommage car elle est inévitable et nécessite pas mal de réflexion. Là encore, il est recommandé de faire des exercices.

Chapitres 3 à 10, *les champs électriques*. Il est habituel de commencer les livres sur l'électromagnétisme par une longue discussion de l'électrostatique. Cela semble être l'endroit où commencer, mais il est peut-être judicieux de passer moins de temps dessus et plus sur les ondes. Ici, nous avons peut-être discuté trop longuement l'électrostatique.

En cas de manque de temps, il vaut mieux abréger le début du livre plutôt que la fin.

Chapitres 11 à 13, *la relativité*. Si vos étudiants sont réactifs, vous trouverez probablement que la relativité est particulièrement difficile à enseigner. On aboutit sans fin des situations absurdes du type « Si c'est intuitif, alors c'est faux ! ». À nouveau, si le temps manque, omettez ces chapitres, même s'ils sont évidemment fondamentaux.

Chapitres 14 à 20, *les champs magnétiques*. Ces chapitres sont beaucoup plus intéressants et utiles que les chapitres sur l'électrostatique.

Chapitre 21, *les équations de Maxwell*. Un must. Lisez l'annexe C sur l'histoire des équations de « Maxwell », et éventuellement consultez les références données. L'annexe C est, d'une certaine façon, un hommage à Heaviside.

Chapitres 22 à 24, *les ondes électromagnétiques*. Ces chapitres sont importants et intéressants, même s'ils n'insistent pas assez sur l'optique. Essayez de ne pas les omettre. Nous avons pratiquement supprimé les guides d'onde rectangulaires métalliques, car ils sont maintenant relativement sans intérêt.

Chapitre 25, *le rayonnement*. Arrivant à la fin, ce chapitre est susceptible d'être omis. Il serait plus sage de sacrifier une partie de l'électrostatique.

Enfin, les enseignants devraient feuilleter juste les premiers chapitres de la biographie d'Edwin Land (McElheny, 1998), l'inventeur du Polaroid et de la photographie instantanée. Il a déposé le premier de ses 535 brevets à l'âge de 20 ans !

Remarque : un recueil de solutions est disponible pour les enseignants, sur papier et sous forme électronique ; les personnes intéressées peuvent contacter W. H. Freeman pour en recevoir une copie : envoyer un courriel à facultyservices@bfwpub.com.

Liste de symboles

ESPACE, TEMPS, MÉCANIQUE

Longueur	l, L, s, r
Aire	A
Volume	V
Angle solide	Ω
Vecteur unitaire selon $\mathbf{r}$	$\hat{\mathbf{r}}$
Vecteurs unitaires en coordonnées cartésiennes	$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$
Vecteurs unitaires en coordonnées cylindriques	$\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{z}}$
Vecteurs unitaires en coordonnées sphériques	$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$
Vecteur unitaire normal à une surface	$\hat{\mathbf{n}}$
Longueur d'onde	λ
Longueur d'onde dans le vide	λ_0
Longueur d'onde dans un guide d'onde	λ_g
Longueur d'onde réduite	$\kappa = \lambda/2\pi$
Nombre d'onde	$2\pi/\lambda = 1/\kappa$
Temps	t
Période	$T = 1/f$
Fréquence	$f = 1/T$
Pulsation	$\omega = 2\pi f$
Vitesse angulaire	ω
Vitesse	$\mathbf{v}, v$
Masse	m
Masse linéique, surfacique ou volumique	m'
Force	$\mathbf{F}$
Force volumique	$\mathbf{F}'$
Pression	p
Énergie	$\mathcal{E}$
Densité d'énergie	$\mathcal{E}'$
Puissance	P
Densité de puissance	P'

ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

Célérité de la lumière	c
Charge de l'électron (valeur absolue)	e
Constante de Boltzmann	k_B
Constante de Planck	h
Charge électrique	Q
Charge électrique par unité de volume	$\rho, \tilde{Q}$
Charge électrique par unité de surface	σ
Charge électrique par unité de longueur	λ
Potentiel électrique	V
Champ électrique	$\mathbf{E}$
Induction électrique	$\mathbf{D}$
Permittivité du vide	ϵ_0
Polarisation électrique	$\mathbf{P}$
Susceptibilité diélectrique	χ_e
Permittivité relative	ϵ_r
Courant électrique	I
Densité de courant électrique	$\mathbf{J}$
Conductivité	σ
Mobilité	$\mathcal{M}$
Résistance	R
Capacité	C
Potentiel vecteur	$\mathbf{A}$
Induction magnétique	$\mathbf{B}$
Champ magnétique	$\mathbf{H}$
Flux magnétique	Φ
Susceptibilité magnétique	χ_m
Perméabilité du vide	μ_0
Perméabilité relative	μ_r
Inductance propre	L
Inductance mutuelle	M
Impédance	Z
Vecteur de Poynting	$\mathbf{S}$

SYMBOLES MATHÉMATIQUES

Identiquement égal à	$\equiv$
Approximativement égal à	$\approx$
Proportionnel à	$\propto$
Exponentielle de x	$\exp x$
$(-1)^{1/2}$	j
Vecteur	$\mathbf{F}$
Module de $\mathbf{F}$	F
Valeur crête de F	F_m
Dérivée de x par rapport au temps	$\dot{x}$
Gradient de V	$\text{grad } V$
Divergence de $\mathbf{E}$	$\text{div } \mathbf{E}$
Rotationnel de $\mathbf{E}$	$\text{rot } \mathbf{E}$
Laplacien de V	$\Delta V = \text{div}(\text{grad } V)$

Chapitre 1

Opérateurs vectoriels

Ce chapitre introductif est conçu pour aider les lecteurs qui ne sont pas familiers avec l'utilisation des *opérateurs* vectoriels.

Nous faisons souvent référence aux champs de charges électriques et de courants. Nous considérons, par exemple, que la force entre deux charges électriques provient de l'interaction de l'une quelconque des charges avec le *champ* créé par l'autre.

En termes mathématiques, un *champ* est une fonction qui décrit une grandeur physique en tout point de l'espace. Pour un *champ scalaire*, cette grandeur est représentée par un nombre unique en chaque point. La température, la densité et le potentiel électrique sont des exemples de grandeurs scalaires qui peuvent varier d'un point à l'autre de l'espace. Dans le cas des *champs vectoriels* la grandeur physique est un vecteur, déterminé à la fois par un nombre et une direction. La vitesse du vent et la force gravitationnelle sont des exemples de champs vectoriels.

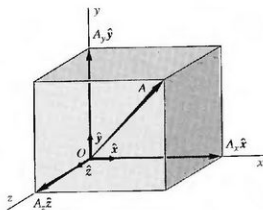


Figure 1.1 Un vecteur A et ses trois composantes $A_x \hat{x}$, $A_y \hat{y}$, $A_z \hat{z}$.

Les trois composantes quand elles sont placées bout à bout, sont équivalentes à A . Les vecteurs unitaires $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ sont orientés dans la direction positive des axes des coordonnées et sont de module un.

Les *grandeurs vectorielles* sont représentées par des **caractères gras**, et les *vecteurs unitaires* portent un accent circonflexe : $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$.

Nous adoptons la convention usuelle consistant à utiliser des systèmes de coordonnées cartésiennes directs, comme en Fig. 1.1 : la direction positive de l'axe z correspond à la direction d'avancement d'une vis à pas à droite — ou d'un tire-bouchon, d'où l'expression « règle du tire-bouchon » — tournée dans le sens qui amène la partie positive de l'axe x sur la partie positive de l'axe y par une rotation de 90° .

Les variables scalaires sont désignées par des *caractères italiques*.

1.1 ALGÈBRE VECTORIELLE

La Fig. 1.1 représente un vecteur $\mathbf{A}$ et ses trois *composantes* A_x , A_y , A_z . Si on définit deux vecteurs

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \quad (1.1)$$

où $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ sont les *vecteurs unitaires* le long des axes x , y et z respectivement, alors on a

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \hat{x} + (A_y + B_y) \hat{y} + (A_z + B_z) \hat{z} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \hat{x} + (A_y - B_y) \hat{y} + (A_z - B_z) \hat{z} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \phi \quad (1.4)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = AB \sin \phi \hat{c} = \mathbf{C} \quad (1.5)$$

comme indiqué sur la Fig. 1.2, où

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1.6)$$

est le *module* de $\mathbf{A}$, l'expression étant analogue pour $\mathbf{B}$.

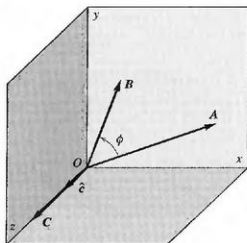


Figure 1.2 Deux vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et le vecteur unitaire $\hat{c}$, normal au plan contenant $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

Les directions positives pour ϕ et $\hat{c}$ suivent la « règle du tire-bouchon ». Le produit vectoriel $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ est égal à $AB \sin \phi \hat{c}$, et $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

La quantité $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, qu'on lit « A scalaire B », est le *produit scalaire* de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, et $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, qu'on lit « A vectoriel B », est leur *produit vectoriel*.

Cf. exercices : 1.1 ; 1.2 ; 1.3.

1.2 LE GRADIENT $\text{grad } f$

Une *fonction scalaire* à un point (appelée aussi simplement *fonction scalaire*) est une grandeur scalaire, comme la température, qui est fonction des coordonnées. Considérons une fonction scalaire à un point f , continue et dérivable. Calculons de combien f change sur la distance infinitésimale dl de la Fig. 1.3. La différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1.7)$$

est le produit scalaire des deux vecteurs

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}} \quad (1.8)$$

et

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.9)$$

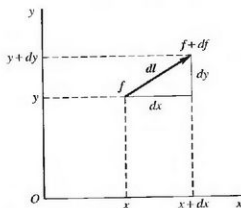


Figure 1.3 Une fonction scalaire varie de f à $f + df$ sur une distance dl .

Ce deuxième vecteur, dont les composantes sont les taux de variation de f avec la distance le long des axes des coordonnées, est appelé le *gradient* de f . Le symbole **grad** se lit « gradient de ». On écrit souvent aussi le gradient **grad** f sous la forme ∇f , où l'opérateur vectoriel ∇ se lit « nabla » et vaut

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.10)$$

Notons la valeur du module du gradient :

$$|\text{grad } f| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.11)$$

Il vient

$$df = \text{grad} f \cdot d\mathbf{l} = |\text{grad} f| |d\mathbf{l}| \cos \theta \quad (1.12)$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\text{grad} f$ et $d\mathbf{l}$.

Quelle direction faudrait-il choisir pour $d\mathbf{l}$ afin de maximiser df ? Il faudrait choisir la direction pour laquelle $\cos \theta = 1$ ou $\theta = 0$, c'est-à-dire la direction de $\text{grad} f$. Le gradient d'une fonction scalaire en un point donné est donc un vecteur qui a les propriétés suivantes :

- 1) Ses composantes sont les taux de variation de la fonction le long des axes des coordonnées.
- 2) Son module est le taux maximal de variation avec la distance.
- 3) Sa direction est celle du taux maximal de variation avec la distance.
- 4) Il est orienté vers les plus grandes valeurs de la fonction.

Le gradient est une fonction vectorielle à un point qui dérive d'une fonction scalaire à un point. Son module et sa direction sont ceux du taux maximal de variation spatiale de f .

Exemple : L'altitude d'un point à la surface de la Terre. Comme exemple du gradient, considérons la Fig. 1.4 sur laquelle A , l'altitude au-dessus du niveau de la mer, est une fonction des coordonnées x et y mesurées sur un plan horizontal. Les points situés à une altitude donnée définissent une *courbe de niveau*. Le gradient de l'altitude A en un point donné a alors les propriétés suivantes :

- 1) Il est perpendiculaire à la courbe de niveau en ce point.
- 2) Son module est égal au taux maximal de variation de l'altitude avec le déplacement, mesuré au point considéré sur un plan horizontal.
- 3) Il est orienté vers l'altitude la plus grande.

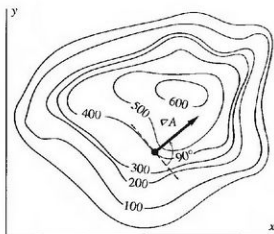


Figure 1.4 Carte topographique d'une colline.

Les nombres indiquent l'altitude A en mètres. Le gradient de A est la pente de la colline au point considéré et il est orienté vers l'altitude la plus grande. La flèche représente $\text{grad} A$ en un point où l'altitude vaut 400 mètres.

Cf. exercice 1.4.

1.3 LE FLUX

Il est souvent nécessaire de calculer le flux d'une grandeur vectorielle à travers une surface. Par définition, le flux $d\Phi$ de $\mathbf{B}$ à travers une surface infinitésimale $d\mathcal{A}$ est

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} \quad (1.13)$$

où le vecteur $d\mathcal{A}$ est perpendiculaire à la surface. Le flux $d\Phi$ est donc la composante du vecteur normale à la surface, multipliée par $d\mathcal{A}$. Pour une surface d'aire finie $\mathcal{A}$,

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} \quad (1.14)$$

Si la surface est fermée, le vecteur $d\mathcal{A}$ est orienté vers l'extérieur par convention.

Si la surface n'est pas fermée, l'orientation du vecteur $d\mathcal{A}$ est reliée à celle du contour C (courbe fermée et orientée) sur lequel s'appuie $\mathcal{A}$ par la règle du tire-bouchon.

Exemple : L'écoulement d'un fluide. Considérons l'écoulement d'un fluide ; soit ρ sa densité, $\mathbf{v}$ sa vitesse, et $d\mathcal{A}$ un élément de surface situé dans le fluide. Le produit scalaire $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathcal{A}$ est égal à la masse de fluide qui traverse $d\mathcal{A}$ en une seconde dans le sens du vecteur $d\mathcal{A}$. Donc le flux de $\rho \mathbf{v}$ à travers une surface fermée, ou l'intégrale de $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathcal{A}$ sur cette surface, correspond au taux net auquel la masse quitte le volume enfermé. Pour un fluide incompressible ce flux serait nul.

1.4 LA DIVERGENCE $\text{div } \mathbf{B}$

Le flux d'un vecteur sortant d'une surface fermée peut être calculé soit par l'Éq. 1.14 soit de la façon suivante. Considérons un volume infinitésimal $dx dy dz$ et un vecteur $\mathbf{B}$, comme sur la Fig. 1.5, dont les composantes B_x, B_y, B_z sont des fonctions de x, y, z . La valeur de B_x au centre de la face de droite peut être considérée comme la valeur moyenne sur cette face. Le flux sortant de la face de droite de l'élément de volume est

$$d\Phi_D = \left(B_x + \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \quad (1.15)$$

car la composante de $\mathbf{B}$ normale à la face de droite est la composante x de $\mathbf{B}$ sur cette face. Le volume étant infinitésimal, nous pouvons négliger les dérivées d'ordre supérieur des composantes de $\mathbf{B}$.

Pour la face de gauche, le flux sortant vaut

$$d\Phi_G = - \left(B_x - \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \quad (1.16)$$

Il y a un signe moins devant la parenthèse car $B_x \hat{\mathbf{x}}$ est tourné vers l'intérieur sur cette face tandis que $d\mathcal{A}$ est orienté vers l'extérieur.

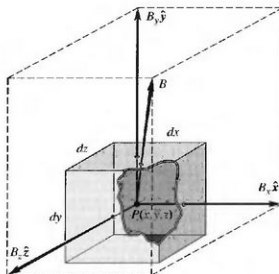


Figure 1.5 Élément de volume infinitésimal $dx\,dy\,dz$ et vecteur $\mathbf{B}$ au point P . L'un des sommets du parallélépipède grisé a été coupé pour faire apparaître P .

Donc le flux sortant à travers les deux faces vaut

$$d\Phi_D + d\Phi_G = \frac{\partial B_x}{\partial x} dx\,dy\,dz = \frac{\partial B_x}{\partial x} dV \quad (1.17)$$

où dV est le volume de l'élément infinitésimal.

Si l'on calcule de la même façon le flux net à travers les autres paires de faces, on trouve que le flux sortant total pour l'élément de volume dV vaut

$$d\Phi_{\text{tot}} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dV \quad (1.18)$$

Supposons maintenant que nous ayons deux éléments de volume infinitésimaux contigus et que nous ajoutons le flux sortant de la surface délimitant le premier volume à celui sortant de la surface qui définit le second. Sur la face commune, les flux sont égaux en module mais de signes opposés, et ils s'annulent. La somme du flux sortant du premier volume et du flux sortant du second correspond donc au flux sortant de la surface qui délimite l'ensemble des deux volumes.

Pour étendre ce calcul à un volume fini, nous sommes les flux individuels de tous les éléments de volume infinitésimaux qui constituent le volume fini, et donc le flux total sortant vaut

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_V \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dV \quad (1.19)$$

En un point donné quelconque du volume, la quantité

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

est donc le flux *sortant* par unité de volume. On appelle cette quantité la *divergence* de $\mathbf{B}$ en ce point. La divergence d'une fonction vectorielle à un point est une fonction scalaire à un point.

On écrit la divergence de $\mathbf{B}$ comme

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1.20)$$

ou encore, en utilisant l'opérateur ∇ défini dans l'Éq. 1.10, comme $\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B}$.

On trouvera des exemples dans la partie suivante.

Cf. exercice 1.5.

1.5 LE THÉORÈME DE LA DIVERGENCE

Nous avons vu que le flux sortant total d'un vecteur $\mathbf{B}$ est égal à l'intégrale de surface de la composante normale sortante de $\mathbf{B}$. Donc, si on note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface qui délimite $\mathcal{V}$, le flux total sortant est

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dV = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{B} dV \quad (1.21)$$

Cette relation s'applique à tout champ vectoriel $\mathbf{B}$ continûment dérivable⁽¹⁾. Nous avons donc

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{B} dV \quad (1.22)$$

C'est le *théorème de la divergence*, ou *théorème d'Ostrogradski*. Remarquons que la première intégrale concerne seulement les valeurs de $\mathbf{B}$ sur la surface d'aire $\mathcal{A}$, tandis que la seconde concerne la valeur de $\mathbf{B}$ dans l'ensemble du volume $\mathcal{V}$.

Exemples : Une boîte hermétique contient de l'oxygène :

- 1) La température, la pression et la masse volumique m' sont toutes constantes et uniformes. Il y a de l'agitation thermique, mais la moyenne temporelle de la vitesse $\mathbf{v}$ d'une molécule dans la région autour d'un point P quelconque est nulle, et le flux net de masse à travers la surface S d'une petite sphère entourant P est nul. L'intégrale de $m'\mathbf{v}$ sur S est donc nulle, et $\operatorname{div} (m'\mathbf{v}) = 0$. Nous avons aussi $dm'/dt = 0$.
- 2) Maintenant on introduit de l'oxygène. La masse volumique augmente et il y a un flux entrant de masse à travers S . La vitesse radiale moyennée sur S est négative, l'intégrale de $m'\mathbf{v}$ sur S est négative, $\operatorname{div} (m'\mathbf{v})$ est négative et dm'/dt est positive.
- 3) Maintenant on pompe l'oxygène. Le gaz s'écoule hors de S , l'intégrale de $p\mathbf{v}$ sur S est positive, $\operatorname{div} (m'\mathbf{v})$ est positive et dm'/dt est négative.

Dans un fluide incompressible, $\operatorname{div} (n'\mathbf{v})$ est nulle partout, car le flux de masse sortant par unité de volume est nul.

Lors d'une explosion, $\operatorname{div} (m'\mathbf{v})$ est positive.

Cf. exercice 1.6.

(1) Une fonction est *continûment dérivable* si ses dérivées premières sont continues.

1.6 L'INTÉGRALE CURVILIGNE $\int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$. CHAMPS CONSERVATIFS

Les intégrales

$$\int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad \int_a^b \mathbf{B} \times d\mathbf{l} \quad \text{et} \quad \int_a^b f dl,$$

calculées du point a au point b sur une courbe donnée, sont des exemples d'*intégrales curvilignes*.

Dans la première, qui est particulièrement importante, le terme sous l'intégrale est le produit d'un élément de longueur $d\mathbf{l}$ sur la courbe et de la valeur locale de $\mathbf{B}$ suivant la règle du produit scalaire.

Un champ vectoriel $\mathbf{B}$ est *conservatif* si l'intégrale curviligne de $\mathbf{B}$ sur toute courbe fermée est nulle :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.23)$$

Le cercle sur le signe d'intégrale indique que le chemin d'intégration est fermé.

1.7 LE ROTATIONNEL $\text{rot } \mathbf{B}$

Venons-en maintenant à l'opérateur rotationnel, qui est un peu plus compliqué que le opérateurs gradient et divergence. Tous les trois sont essentiels pour une discussion correcte des champs électromagnétiques. L'opérateur laplacien de la partie 1.9 l'est aussi même s'il est moins communément utilisé.

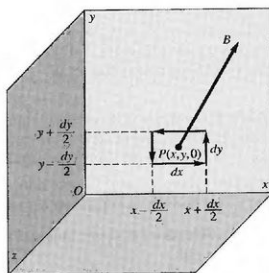


Figure 1.6 Chemin fermé rectangulaire dans le plan xy .

Ce chemin est centré autour du point $P(x, y, 0)$, où le vecteur $\mathbf{B}$ a la valeur indiquée par la flèche. L'intégration sur le chemin s'effectue dans la direction des flèches, en suivant la règle du tire-bouchon appliquée à l'axe z .

Pour un champ $\mathbf{B}$ donné et un déplacement $d\mathbf{l}$ situé dans le plan xy ,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_x dx + B_y dy \quad (1.24)$$

et

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B_x dx + \oint B_y dy \quad (1.25)$$

Considérons maintenant le chemin infinitésimal de la Fig. 1.6. Il y a deux contributions à la première intégrale du membre de droite de l'Éq. 1.25, l'une en $y - dy/2$ et l'autre en $y + dy/2$:

$$\oint B_x dx = \left(B_x - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \left(B_x + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \quad (1.26)$$

Il y a un signe moins devant le deuxième terme parce que le chemin élémentaire en $y + dy/2$ est orienté dans la direction des x négatifs. Pour ce chemin infinitésimal, nous avons donc

$$\oint B_x dx = - \frac{\partial B_x}{\partial y} dy dx \quad (1.27)$$

De même,

$$\oint B_y dy = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy \quad (1.28)$$

d'où

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.29)$$

pour le chemin infinitésimal de la Fig. 1.6.

En posant

$$g_3 = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (1.30)$$

il vient

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = g_3 dA \quad (1.31)$$

où $dA = dx dy$ est l'aire de la surface s' appuyant sur le chemin infinitésimal. Soulignons que tout cela n'est correct que si l'intégrale curviligne s'effectue dans le sens positif du plan xy , c'est-à-dire dans la direction dans laquelle on tournerait un tire-bouchon pour le faire avancer dans la direction positive le long de l'axe z .

Considérons maintenant g_3 et les deux autres quantités symétriques comme les composantes d'un vecteur

$$\text{rot } \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (1.32)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\text{rot } \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

C'est le *rotationnel* de $\mathbf{B}$. La quantité g_3 est sa composante selon z . Notons que $\text{rot } \mathbf{B}$ peut aussi s'écrire, en utilisant l'opérateur ∇ , $\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B}$.

Si nous choisissons un vecteur $d\mathcal{A}$ orienté par la règle du tire-bouchon à partir de l'orientation choisie pour l'intégrale sur le contour, alors

$$d\mathcal{A} = d\mathcal{A} \hat{z} \quad (1.34)$$

et

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A} \quad (1.35)$$

Cette formule signifie que l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur le tour de la surface $d\mathcal{A}$ est égale au produit scalaire du rotationnel de $\mathbf{B}$ par cet élément de surface.

La convention de signe est similaire à celle énoncée ci-dessus : l'intégrale curviligne s'effectue dans la direction positive autour de l'élément de surface $d\mathcal{A}$ si cette direction est celle dans laquelle on aurait tourné un tire-bouchon pour qu'il avance en direction de $\text{rot } \mathbf{B}$.

En général, $\text{rot } \mathbf{B}$ n'est *pas* normal à $\mathbf{B}$. Voir le problème 1.7.

Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul :

$$\text{rot } (\text{grad } f) \equiv 0 \quad (1.36)$$

Exemple : Écoulement fluide. À proximité du fond d'un écoulement fluide, la vitesse v est proportionnelle à la distance au fond. Prenons l'axe x parallèle au courant et l'axe z perpendiculaire au fond de l'écoulement. Alors

$$v_x = cz, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0 \quad (1.37)$$

et le rotationnel du vecteur vitesse est

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ cz & 0 & 0 \end{vmatrix} = c\hat{y} \quad (1.38)$$

Cf. exercices : 1.7 ; 1.12.

1.8 LE THÉORÈME DE STOKES

L'équation 1.35 est valide seulement pour un contour assez petit afin que $\text{rot } \mathbf{B}$ soit presque constant sur la surface $d\mathcal{A}$ qui s'appuie sur ce contour. Que se passe-t-il quand le contour est trop grand pour que cette condition soit vérifiée ? Dans ces cas-là nous divisons la surface — toute surface⁽¹⁾ s'appuyant sur le chemin d'intégration en question — en éléments de surface $d\mathcal{A}_1$, $d\mathcal{A}_2$ et ainsi de suite, comme en Fig. 1.7. Pour chacune de ces petites surfaces,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A} \quad (1.39)$$

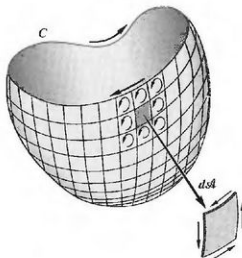


Figure 1.7 Surface arbitraire d'aire $\mathcal{A}$ s'appuyant sur le contour C .

La somme des intégrales curvignes autour des carrés curvignes représentés est égale à l'intégrale curviline autour de C . La direction positive pour le vecteur $d\mathcal{A}$ suit la règle du tire-bouchon.

Sommons les membres de gauche de ces équations pour tous les $d\mathcal{A}$ et ensuite les membres de droite. La somme des membres de gauche correspond à l'intégrale curviline sur la courbe qui limite la surface totale, car sur chaque segment commun à des $d\mathcal{A}$ adjacents il y a toujours deux contributions, égales et de signes opposés, à la somme. La somme des membres de droite est l'intégrale de $(\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A}$ sur la surface finie. Ainsi

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A} \quad (1.40)$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire d'une surface ouverte quelconque délimitée par le contour C .

Ceci est le *théorème de Stokes*. Il relie l'intégrale curviline sur un contour donné à une intégrale de surface sur une surface finie quelconque appuyée sur ce contour. La figure 1.7 indique la convention de signe.

(1) Cette surface doit être *orientable*, c'est-à-dire avoir deux faces. Toutes les surfaces n'ont pas deux faces ; un ruban de Moebius, par exemple, a une seule face.

Exemple : Champs conservatifs. À quelle condition un champ vectoriel est-il conservatif ? En d'autres termes, à quelle condition l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur un contour arbitraire est-elle nulle ? D'après le théorème de Stokes, l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur un contour quelconque est nulle si $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ partout. Cette condition est vérifiée si

$$\mathbf{B} = \text{grad } f \quad (1.41)$$

ce qui est équivalent à

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0 \quad (1.42)$$

Un champ $\mathbf{B}$ qui est le gradient d'une fonction scalaire f est donc *conservatif*.

1.9 L'OPÉRATEUR LAPLACIEN Δ

La divergence du gradient de f est le *laplacien* de f :

$$\text{div}(\text{grad } f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.43)$$

où Δ est l'*opérateur laplacien*.

Nous avons défini le laplacien d'une fonction f scalaire. Il est aussi utile de définir le laplacien d'une fonction vectorielle $\mathbf{B}$:

$$\Delta \mathbf{B} = \Delta B_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta B_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.44)$$

Cette relation est valable uniquement en coordonnées cartésiennes. Voir la partie 1.10.

1.10 SCALAIRES ET VECTEURS EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Il est toujours possible d'utiliser les coordonnées cartésiennes, quelle que soit la géométrie du champ, mais d'autres systèmes de coordonnées sont souvent beaucoup plus pratiques. Par exemple, si le problème est à symétrie cylindrique, il est nettement préférable d'utiliser des coordonnées cylindriques ; si le problème est à symétrie sphérique, les coordonnées sphériques sont les plus adaptées.

En *coordonnées sphériques*, la position d'un point P de l'espace est définie par les coordonnées r, θ, ϕ , comme sur la Fig. 1.8. L'angle ϕ n'est pas défini pour les points de l'axe z . Le vecteur $\mathbf{r}$ qui définit la position de P est simplement $r\hat{\mathbf{r}}$, les coordonnées θ et ϕ étant données par l'orientation de $\hat{\mathbf{r}}$.

Notons que les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ ne conservent pas la même direction quand P se déplace.

Les vecteurs unitaires sont mutuellement orthogonaux et vérifient

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1, \quad \dots \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0, \quad \dots \quad (1.45)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad \dots \quad (1.46)$$

On discute dans le problème 1.8 les relations entre les vecteurs unitaires $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ et les vecteurs unitaires $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$.

On calcule les produits scalaires et vectoriels de la même manière que pour des coordonnées cartésiennes. Par exemple, si

$$\mathbf{J} = J_r \hat{r} + J_\theta \hat{\theta} + J_\phi \hat{\phi} \quad (1.47)$$

$$\mathbf{B} = B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta} + B_\phi \hat{\phi} \quad (1.48)$$

alors

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = J_r B_r + J_\theta B_\theta + J_\phi B_\phi \quad (1.49)$$

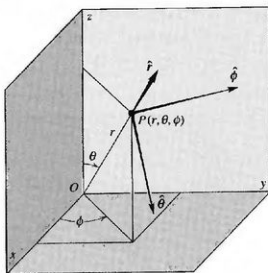


Figure 1.8 Coordonnées sphériques.

et

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = (J_r \hat{r} + J_\theta \hat{\theta} + J_\phi \hat{\phi}) \times (B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta} + B_\phi \hat{\phi}) \quad (1.50)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ J_r & J_\theta & J_\phi \\ B_r & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix} \quad (1.51)$$

$$= (J_\theta B_\phi - J_\phi B_\theta) \hat{r} + (J_\phi B_r - J_r B_\phi) \hat{\theta} + (J_r B_\theta - J_\theta B_r) \hat{\phi} \quad (1.52)$$

Remarquons la permutation cyclique des indices. Notons aussi que les termes sont positifs quand les coordonnées apparaissent dans le bon ordre cyclique, et négatifs sinon.

Voici maintenant un deuxième point important. En coordonnées cartésiennes, on peut exprimer le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien à partir d'un opérateur unique $\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$. En revanche, dans les autres systèmes de coordonnées il n'existe pas de tel opérateur.

La figure 1.9 montre que si P se déplace d'une distance $d\mathbf{r}$, alors

$$d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.53)$$

L'élément de volume infinitésimal s'écrit donc

$$dV = (dr) (r d\theta) (r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.54)$$

Comme on le voit sur la Fig. 1.9, les éléments de surface perpendiculaires à $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ sont

$$dA_r = (r d\theta) (r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.55)$$

$$dA_\theta = dr (r \sin \theta d\phi) = r \sin \theta dr d\phi \quad (1.56)$$

$$dA_\phi = dr (r d\theta) = r dr d\theta \quad (1.57)$$

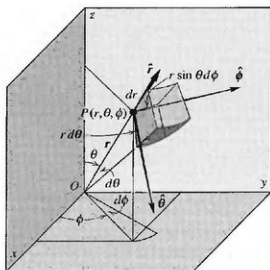


Figure 1.9 Élément de volume en coordonnées sphériques.

Il est facile d'exprimer le *gradient* en coordonnées sphériques. Comme le gradient est le vecteur taux de variation d'une fonction scalaire f , on a

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.58)$$

Cette définition n'a pas de sens sur l'axe z , où $\sin \theta = 0$.

Le cas de la *divergence* est plus difficile. La divergence est le flux sortant d'une grandeur vectorielle, par exemple $\mathbf{B}$, par unité de volume. Rapportons-nous à l'élément de volume représenté en Fig. 1.9. En P , la face de l'élément de volume normale à $\mathbf{r}$ a une

aire $(r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$. Il s'ensuit que le flux net sortant des faces normales à $\hat{r}$ vaut

$$\frac{\partial}{\partial r} [B_r (r d\theta)(r \sin \theta d\phi)] dr$$

et la contribution de ce flux à la divergence est ce flux lui-même divisé par le volume élémentaire dV , soit

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} [B_r (r d\theta)(r \sin \theta d\phi)] dr = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (B_r r^2 \sin \theta) \quad (1.59)$$

En procédant de la même façon avec le flux sortant des faces normales à $\hat{\theta}$, puis avec le flux sortant des faces normales à $\hat{\phi}$, nous trouvons que

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (B_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (B_\phi r) \right] \quad (1.60)$$

$$= \frac{2}{r} B_r + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \quad (1.61)$$

La divergence n'a pas non plus de sens sur l'axe z où $\sin \theta = 0$.

Ainsi, il n'est évidemment pas possible de définir un opérateur unique qui corresponde à la fois au gradient et à la divergence ; le même principe s'applique pour le rotationnel et le laplacien.

Nous donnons maintenant sans démonstration les expressions du *rotationnel* d'un vecteur et du *laplacien* d'un scalaire en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} (r^2 \sin \theta) \text{rot } \mathbf{B} = & \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta B_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r B_\theta) \right] \hat{r} \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \phi} B_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta B_\phi) \right] r \hat{\theta} \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} B_r \right] r \sin \theta \hat{\phi} \end{aligned} \quad (1.62)$$

et

$$\Delta f = \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1.63)$$

sauf, encore, sur l'axe z .

C'est *seulement* en coordonnées cartésiennes que le laplacien d'un vecteur est la somme des laplaciens de ses composantes. Dans tous les autres systèmes de coordonnées on a

$$\Delta \mathbf{B} = \text{grad} (\text{div } \mathbf{B}) - \text{rot} (\text{rot } \mathbf{B}) \quad (1.64)$$

Les figures 1.10 et 1.11 représentent un point P et un élément de volume dV en coordonnées cylindriques. On trouvera en annexe E les expressions des opérateurs vectoriels dans ce système.

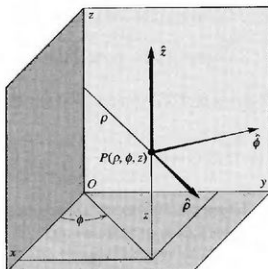


Figure 1.10 Système de coordonnées cylindriques.

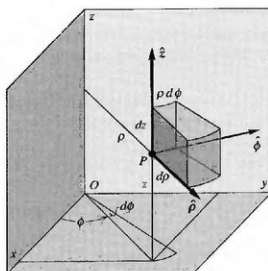


Figure 1.11 Élément de volume en coordonnées cylindriques.

Cf. exercices : 1.8 ; 1.9 ; 1.10 ; 1.11.

1.11 RÉSUMÉ

Le **gradient** $\text{grad} f$ est un vecteur dont le module et la direction sont ceux du taux maximal de croissance de la fonction scalaire f avec la distance en un point donné. Le **flux** Φ d'un vecteur $\mathbf{B}$ à travers une surface d'aire A est le scalaire

$$\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.14)$$

Si la surface est fermée, le vecteur $d\mathbf{A}$ est orienté par convention vers l'extérieur.

La divergence de $\mathbf{B}$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1.20)$$

est le flux sortant de $\mathbf{B}$ par unité de volume en un point.

Le théorème de la divergence stipule que

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.22)$$

où A est l'aire de la surface fermée qui délimite le volume V .

L'intégrale curviligne

$$\int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

sur une courbe donnée est la somme des termes $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ pour chaque élément $d\mathbf{l}$ de la courbe entre les points a et b . Pour un contour C qui délimite une surface A , on peut utiliser le *théorème de Stokes* :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.40)$$

où

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

est le *rotationnel* d'une fonction vectorielle $\mathbf{B}$. L'intégrale de surface ci-dessus s'applique à une surface d'aire A délimitée par le contour C .

Le *laplacien* est la divergence du gradient :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.43)$$

Le *laplacien d'un vecteur* en coordonnées cartésiennes est défini par

$$\Delta \mathbf{B} = \Delta B_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta B_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.44)$$

En coordonnées sphériques (Figs. 1.8 et 1.9), les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ sont orthogonaux. On a aussi

$$d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.53)$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.54)$$

Les opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques se trouvent en annexe. Ils n'ont pas de sens sur l'axe z où $\sin \theta = 0$.

Dans les systèmes de coordonnées non cartésiennes,

$$\Delta \mathbf{B} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{B}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) \quad (1.64)$$

La page en annexe E fournit de nombreuses relations vectorielles et théorèmes utiles.⁽¹⁾

(1) On trouvera dans [Bladel 1985], annexes 1 et 2, une collection extensive de relations vectorielles et de théorèmes.

EXERCICES

1.1 Montrer que l'angle entre $\mathbf{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}$ et $\mathbf{B} = \hat{x} - 6\hat{y} + \hat{z}$ vaut $130,6^\circ$.

1.2

(a) Montrer que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ est le volume d'un parallélépipède dont les arêtes sont $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, quand les vecteurs partent tous du même point.

(b) Montrer que $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$. Noter que le signe change quand l'ordre cyclique des vecteurs change.

1.3 Soit C une courbe plane fermée simple. Démontrer que la surface $\mathcal{A}$ délimitée par C est donnée par

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$$

où le vecteur $\mathbf{r}$ va d'une origine *arbitraire* à l'élément $d\mathbf{l}$ de la courbe et où l'orientation de $\mathcal{A}$ et $d\mathbf{l}$ se fait selon la règle du tire-bouchon.

1.4 Le vecteur $\mathbf{r}$ va de $P'(x', y', z')$ à $P(x, y, z)$.

(a) Montrer que si P est fixe et P' mobile, alors $\text{grad}'(1/r) = \hat{\mathbf{r}}/r^2$, $\hat{\mathbf{r}}$ étant le vecteur unitaire le long de $\mathbf{r}$.

(b) Montrer que, de la même façon, si P' est fixe et P mobile, alors $\text{grad}(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$.

(R) 1.5

(a) Montrer que $\text{div } \mathbf{r} = 3$.

(b) Que vaut le flux de $\mathbf{r}$ à travers une surface sphérique de rayon a ?

1.6 Montrer que

$$\int_V \text{grad} f dV = \int_A f d\mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire de la surface fermée qui délimite le volume V . On pourra démontrer cette relation en multipliant les deux membres de l'équation par $\mathbf{c}$, où $\mathbf{c}$ est un vecteur quelconque indépendant des coordonnées. On utilisera ensuite l'identité 6 (sur la page suivant en annexe) et le théorème de la divergence.

1.7 Puisque $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ est normal à $\mathbf{B}$, on dirait, au premier abord, que $\text{rot } \mathbf{B}$ doit être normal à $\mathbf{B}$. Or cela est *faux*.

À titre de contre-exemple, montrer que $(\text{rot } \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = -1$ si $\mathbf{B} = y\hat{x} + \hat{z}$.

1.8

(a) Vérifier, en examinant la Fig. 1.8, que les vecteurs unitaires en coordonnées cartésiennes et sphériques sont liés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}\end{aligned}$$

(b) Montrer que

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} &= \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} &= \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}\end{aligned}$$

1.9 Un vecteur $\mathbf{F}$ a le même module et la même direction en tout point de l'espace. On choisira l'axe z parallèle à $\mathbf{F}$. Alors en coordonnées cartésiennes $\mathbf{F} = F\hat{z}$.

Exprimer $\mathbf{F}$ en coordonnées sphériques.

1.10 Montrer, en dérivant les expressions appropriées de $\mathbf{r}$, que la vitesse $\dot{\mathbf{r}}$ en coordonnées sphériques s'écrit $\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$.⁽¹⁾

1.11 Une force $\mathbf{F}$ est de la forme $(K/r^3)\hat{r}$ en coordonnées sphériques, où K est une constante. Le champ est-il conservatif ?

1.12 Dans les systèmes de coordonnées que nous avons utilisés jusqu'à présent, les vecteurs et l'opérateur ∇ ont tous trois composantes chacun. Cependant, en théorie de la relativité (Chaps. 11 à 13) il est souvent plus commode de considérer seulement deux composantes, l'une parallèle à une direction donnée, l'autre lui étant perpendiculaire. Par exemple on écrit $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$.

Si la direction choisie est l'axe x , alors

$$\mathbf{r}_{\parallel} = x\hat{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{\perp} = y\hat{y} + z\hat{z}$$

On a aussi $\nabla = \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}$, avec

$$\nabla_{\parallel} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_{\perp} = \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

Alors

$$\text{grad } V = \nabla V = \nabla_{\parallel} V + \nabla_{\perp} V$$

Montrer que

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{A}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp} \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla_{\parallel} \times \mathbf{A}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times \mathbf{A}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \times \mathbf{A}_{\perp}\end{aligned}$$

(1) Il est habituel de poser $\dot{x} \equiv \partial x / \partial t$.

Chapitre 2

La représentation complexe

Dans ce bref chapitre on aborde une deuxième notion mathématique essentielle pour l'étude des champs électromagnétiques, la représentation complexe. Nous utilisons la représentation complexe principalement, mais pas exclusivement, dans le contexte des ondes électromagnétiques.

On utilise la représentation complexe pour décrire des grandeurs qui sont des fonctions sinusoïdales — sinus ou cosinus — du temps, de l'espace ou des deux à la fois.

Les fonctions $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$ jouent un rôle majeur en technologie moderne, principalement à cause de la relative facilité avec laquelle elles peuvent être générées. Elles sont aussi assez simples à manipuler mathématiquement. Toutes les autres fonctions périodiques, comme les ondes en créneaux, par exemple, sont beaucoup plus difficiles à générer et beaucoup plus difficiles à traiter mathématiquement.

On a souvent à résoudre des équations différentielles linéaires contenant des fonctions sinus et cosinus à coefficients constants. Comme on le verra, l'utilisation de la représentation complexe présente alors l'immense avantage de transformer ces équations différentielles en simples équations algébriques.

Mais tout d'abord, afin de comprendre comment utiliser la représentation complexe, nous devons réviser les nombres complexes.

2.1 LES NOMBRES COMPLEXES

Un nombre complexe s'écrit

$$z = a + bj \quad (2.1)$$

où $j = (-1)^{1/2}$ et où a et b sont des nombres réels comme 2,5 ; 3 ou -10. Les nombres complexes peuvent être représentés dans le *plan complexe*, comme sur la Fig. 2.1. La quantité a est appelée la *partie réelle*, et bj la *partie imaginaire* du nombre complexe.

On peut exprimer les nombres complexes en *représentation cartésienne*, comme ci-dessus, ou en *représentation polaire* comme ci-après. D'abord,

$$z = a + bj = r \cos \theta + jr \sin \theta = r (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (2.2)$$

où

$$r = (a^2 + b^2)^{1/2} \quad (2.3)$$

est le *module* du nombre complexe z , et l'angle θ est son *argument*.

Si l'angle θ est exprimé en *radians*, on a

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (2.4)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (2.5)$$

$$\exp j\theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{j\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{j\theta^5}{5!} - \dots \quad (2.6)$$

et

$$\cos \theta + j \sin \theta = \exp j\theta \quad (2.7)$$

Naturellement, $j \times j = -1$, $j \times j \times j = -j$, etc.

Ainsi, d'après l'Eq. 2.2

$$z = a + bj = r \exp j\theta \quad (2.8)$$

Nous avons ici un même nombre complexe exprimé en représentations cartésienne et polaire.

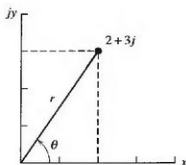


Figure 2.1 Le nombre complexe $2 + 3j$ représenté dans le plan complexe.

Si a est positif alors θ est dans le premier ou le quatrième quadrant. Si a est négatif, θ est dans le deuxième ou le troisième quadrant. Attention à utiliser le bon angle ! Par exemple, l'argument de $-1 + j$ est $3\pi/4$ et pas $-\pi/4$.

Notons que

$$\exp j\frac{\pi}{2} = j, \quad \exp j\pi = -1, \quad \exp \left(j\frac{3\pi}{2} \right) = -j, \quad \exp j2\pi = 1 \quad (2.9)$$

Si

$$z = a + bj = r \exp j\theta \quad (2.10)$$

où $\theta = \arctan(b/a)$, alors le *complexe conjugué* de z est

$$z^* = a - bj = r \exp(-j\theta) \quad (2.11)$$

Pour obtenir le complexe conjugué d'une expression complexe, on change partout le signe devant j . Par exemple, si

$$z = \frac{a + bj}{c + dj}, \quad \text{alors} \quad z^* = \frac{a - bj}{c - dj} \quad (2.12)$$

2.1.1 Addition et soustraction de nombres complexes

Avec des nombres complexes sous forme cartésienne, on somme ou on soustrait simplement les parties réelle et imaginaire séparément :

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j \quad (2.13)$$

Si les nombres sont sous forme polaire, on les exprime d'abord en représentation cartésienne.

2.1.2 Multiplication et division de nombres complexes

En représentation cartésienne, on procède de la façon suivante :

$$(a + bj)(c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j \quad (2.14)$$

$$\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{(a + bj)(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)j}{c^2 + d^2} \quad (2.15)$$

En représentation polaire,

$$(r_1 \exp j\theta_1)(r_2 \exp j\theta_2) = r_1 r_2 \exp j(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.16)$$

$$\frac{r_1 \exp j\theta_1}{r_2 \exp j\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \exp j(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.17)$$

Il faut penser à exprimer les angles en *radians*.

Exemples :

$$(4 + 5j) + (2 - 3j) = 6 + 2j \quad (2.18)$$

$$(4 + 5j)^2 = (16 - 25) + 40j = -9 + 40j \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{4 + 5j} = \frac{4 - 5j}{(4 + 5j)(4 - 5j)} = \frac{4 - 5j}{16 + 25} = \frac{4 - 5j}{41} \simeq 0,098 - 0,122j \quad (2.20)$$

$$\left(5 \exp j \frac{\pi}{3}\right) \left(2 \exp j \frac{\pi}{2}\right) = 10 \exp j \frac{5\pi}{6} \quad (2.21)$$

$$\frac{5 \exp(j\pi/3)}{2 \exp(j\pi/2)} = 2,5 \exp\left(-j \frac{\pi}{6}\right) \quad (2.22)$$

Cf. exercices : 2.1 ; 2.2 ; 2.3 ; 2.11.

2.2 LA REPRÉSENTATION COMPLEXE

Les courants électriques et les tensions, les champs électriques et les champs magnétiques sont souvent des fonctions sinusoïdales du temps. Par exemple, un *courant alternatif* est de la forme

$$I = I_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.23)$$

où I_m est la *valeur maximale* du courant, $\omega = 2\pi f$ est la *pulsation* et f la *fréquence*. La quantité entre parenthèses est la *phase*, α étant la phase à $t = 0$.

Le point I de la Fig. 2.2 tourne sur un cercle de rayon I_m dans le plan complexe à la pulsation ω . Sa projection sur l'axe réel est alors

$$I = I_m \cos \omega t \quad (2.24)$$

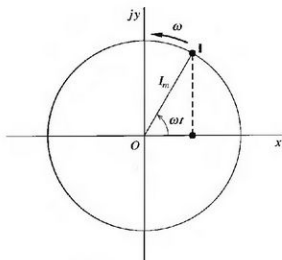


Figure 2.2 Le point I dans le plan complexe décrit un cercle de rayon I_m autour de l'origine O. Il représente le nombre complexe $I_m \exp j\omega t$. Sa projection sur l'axe x vaut $I_m \cos \omega t$.

On a posé $\alpha = 0$ pour simplifier. Nous avons donc

$$I = \operatorname{Re} (I_m \exp j\omega t) = \operatorname{Re} l \quad (2.25)$$

où l'opérateur Re signifie « partie réelle de ce qui suit ». La quantité entre parenthèses est la *représentation complexe* l dessinée sur la figure 2.2 :

$$l = I_m \exp j\omega t = I_m \cos \omega t + j I_m \sin \omega t \quad (2.26)$$

l en représentation complexe est donc égal à la variable I plus le terme imaginaire $j I_m \sin \omega t$ ajouté formellement.

Alors

$$\frac{dl}{dt} = j\omega l, \quad \frac{d^2 l}{dt^2} = (j\omega)^2 l = -\omega^2 l, \quad \frac{d^n l}{dt^n} = (j\omega)^n l, \quad \text{etc.} \quad (2.27)$$

On vérifie facilement que

$$\operatorname{Re} (j\omega l) = \frac{dI}{dt}, \quad \operatorname{Re} (-\omega^2 l) = \frac{d^2 I}{dt^2}, \quad \text{etc.} \quad (2.28)$$

En d'autres termes,

$$\operatorname{Re} l = I \quad (2.29)$$

$$\operatorname{Re} \frac{dl}{dt} = \operatorname{Re} j\omega l = \frac{dI}{dt} \quad (2.30)$$

$$\operatorname{Re} \frac{d^2 l}{dt^2} = \operatorname{Re} (j\omega)^2 l = \frac{d^2 I}{dt^2}, \quad \text{etc.} \quad (2.31)$$

Par conséquent, si on remplace la variable I par sa représentation complexe l , l'opérateur d/dt devient alors un *facteur* $j\omega$ et une équation *différentielle* contenant des dérivées temporelles devient une équation *algébrique* !

Une variable en représentation complexe peut être multipliée par un nombre complexe :

$$(a + bj)l = (a + bj)I_m \exp j\omega t = r I_m \exp j(\omega t + \theta) \quad (2.32)$$

où r est le module de $a + bj$ et θ son argument.

On peut aussi diviser une variable en représentation complexe par un nombre complexe :

$$\frac{l}{a + bj} = \frac{I_m}{r} \exp j(\omega t - \theta) \quad (2.33)$$

Au lieu d'avoir une fonction sinusoïdale du temps t , on pourrait avoir une fonction sinusoïdale d'une coordonnée :

$$E = E_m \cos kx \quad (2.34)$$

La représentation complexe correspondante serait alors

$$E = E_m \exp jkx \quad (2.35)$$

Dans le cas d'une onde progressive, on a une fonction sinusoïdale à la fois de t et de z par exemple :

$$E = E_m \cos(\omega t - kz) \quad (2.36)$$

où k est le vecteur d'onde. Cette onde se propage dans la direction positive de l'axe z . En représentation complexe,

$$\mathbf{E} = E_m \exp j(\omega t - kz) \quad (2.37)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -jk \mathbf{E} \quad (2.38)$$

Les grandeurs vectorielles peuvent être aussi exprimées en représentation complexe. Par exemple, une force pourrait être une fonction sinusoïdale du temps :

$$\mathbf{F} = (F_m \cos \omega t) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.39)$$

Alors

$$\mathbf{F} = (F_m \exp j\omega t) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.40)$$

est un vecteur en représentation complexe.

Cf. exercice 2.4.

2.3 USAGE DE LA REPRÉSENTATION COMPLEXE

Pour utiliser la représentation complexe, on exprime d'abord les fonctions sinus ou cosinus sous la forme $x_m \cos(\omega t + \theta)$ puis on les écrit sous forme complexe

$$x = x_m \exp j(\omega t + \theta) \equiv x_m \cos(\omega t + \theta) + jx_m \sin(\omega t + \theta) \quad (2.41)$$

On effectue ensuite les calculs en représentation complexe. On conserve presque toujours le résultat en représentation complexe. Si toutefois on veut une fonction réelle, on élimine simplement la partie imaginaire.

Exemple : Résoudre une équation différentielle linéaire du deuxième degré en représentation complexe

Un des types d'équations différentielles les plus courants est de la forme :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega t \quad (2.42)$$

Ici tous les termes sont réels. Cette équation décrit le mouvement d'une masse m soumise à la force extérieure $F_m \cos \omega t$, à une force de rappel $-kx$ et à une force de frottement $-bv$ comme sur la Fig. 2.3 : le produit de la masse m par l'accélération d^2x/dt^2 est égal à la somme des forces appliquées.

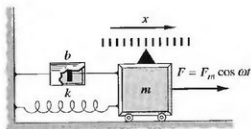


Figure 2.3 Masse m soumise à une force $F = F_m \cos \omega t$, à une force de rappel $-kx$ exercée par un ressort, et à une force de frottement $-b dx/dt$ exercée par un amortisseur. Au repos, $x = 0$.

La solution stationnaire est de la forme $x_m \cos(\omega t + \theta)$, où x_m est l'amplitude du mouvement. La résolution de cette équation en représentation complexe est un problème simple. On utilise la représentation complexe de x_m

$$x = x_m \exp j(\omega t + \theta) \quad (2.43)$$

dont la partie réelle est le déplacement x . On pose aussi

$$F = F_m \exp j\omega t \quad (2.44)$$

La substitution de F et x dans l'équation différentielle est triviale :

$$-m\omega^2 x + b j \omega x + kx = F \quad (2.45)$$

et

$$x = \frac{F}{k - m\omega^2 + j b \omega} \quad (2.46)$$

Ainsi, en exprimant le dénominateur sous forme polaire on obtient

$$x_m = \frac{F_m}{[(k - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2]^{1/2}}, \quad \theta = -\arctan \frac{b\omega}{k - m\omega^2} \quad (2.47)$$

Le véritable déplacement est la partie réelle de x , soit

$$x = x_m \cos(\omega t + \theta) \quad (2.48)$$

Cf. exercice 2.5.

2.4 PRODUIT DE VARIABLES EN REPRÉSENTATION COMPLEXE

On a souvent besoin de la valeur *moyenne* du produit de deux grandeurs sinusoïdales. Or si on essaie de multiplier des variables en représentation complexe, on rencontre des problèmes. Considérons un exemple simple. Supposons qu'une tension alternative $V = V_m \cos \omega t$ soit appliquée aux bornes d'une résistance R . Le courant vaut alors $I = (V_m \cos \omega t)/R$. La puissance instantanée dissipée dans la résistance est

$$P_{\text{inst}} = IV = \frac{V_m^2 \cos^2 \omega t}{R} \quad (2.49)$$

et la puissance moyenne est

$$P_{\text{moy}} = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \quad (2.50)$$

la valeur moyenne de $\cos^2 \omega t$ étant $1/2$. Ici V_{eff} est la *valeur quadratique moyenne* ou *valeur efficace* de la tension, c'est-à-dire la racine carrée de la valeur moyenne de V au carré :

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_m}{2^{1/2}} \simeq 0,707 V_m \quad (2.51)$$

pour une fonction sinus ou cosinus.

Si on utilise la représentation complexe

$$V = V_m \exp j\omega t \quad \text{et} \quad I = \frac{V_m \exp j\omega t}{R} \quad (2.52)$$

alors

$$IV = \frac{V_m^2 \exp 2j\omega t}{R} \quad (2.53)$$

dont la partie réelle $(V_m^2/R) \cos 2\omega t$ n'est *ni* la puissance instantanée *ni* la puissance moyenne. Les variables en représentation complexe ne doivent donc *pas* être multipliées de cette manière.

Supposons qu'on ait deux grandeurs sinusoïdales de *même fréquence*

$$A = A_m \cos \omega t \quad \text{et} \quad B = B_m \cos(\omega t + \theta) \quad (2.54)$$

La moyenne temporelle de leur produit vaut alors

$$\begin{aligned} \langle A_m(\cos \omega t) B_m \cos(\omega t + \theta) \rangle \\ = \langle A_m B_m \cos \omega t (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) \rangle \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$= \langle A_m B_m (\cos^2 \omega t \cos \theta - \cos \omega t \sin \omega t \sin \theta) \rangle \quad (2.56)$$

où $\langle x \rangle$ signifie « valeur moyenne de x ». La valeur moyenne de $\cos^2 \omega t$ sur une période est $1/2$, comme nous l'avons vu plus haut, tandis que celle de $\cos \omega t \sin \omega t$ est nulle. Alors

$$\langle A_m(\cos \omega t) B_m \cos(\omega t + \theta) \rangle = \frac{1}{2} A_m B_m \cos \theta = A_{\text{eff}} B_{\text{eff}} \cos \theta \quad (2.57)$$

où les valeurs efficaces sont définies comme dans l'Éq. 2.51.

Si on utilise la représentation complexe

$$A = A_m \exp j\omega t \quad \text{et} \quad B = B_m \exp j(\omega t + \theta) \quad (2.58)$$

alors la moyenne temporelle du produit de leurs parties réelles est donnée correctement par

$$\frac{1}{2} \text{Re} (AB^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \{ A_m \exp(j\omega t) B_m \exp[-j(\omega t + \theta)] \} \quad (2.59)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} [A_m B_m \exp(-j\theta)] = \frac{1}{2} A_m B_m \cos \theta \quad (2.60)$$

$$= A_{\text{eff}} B_{\text{eff}} \cos \theta \quad (2.61)$$

comme ci-dessus.

La moyenne temporelle du produit de deux variables A et B en représentation complexe est donc égale à la moitié de la partie réelle du produit AB^* où B^* est le complexe conjugué de B . Rappelons que le complexe conjugué de B s'obtient à partir de B en remplaçant j par $-j$.

Cf. exercices : 2.6 ; 2.7.

2.5 QUOTIENT DE VARIABLES EN REPRÉSENTATION COMPLEXE

La division d'une variable en représentation complexe par une autre *de même fréquence* donne un nombre complexe :

$$\frac{r_1 \exp j(\omega t + \alpha)}{r_2 \exp j(\omega t + \beta)} = \frac{r_1}{r_2} \exp j(\alpha - \beta) \quad (2.62)$$

Cf. exercices : 2.8 ; 2.9.

2.6 VECTEURS TOURNANTS

Si on exprime un vecteur tournant en représentation complexe, on rencontre un autre type de problème. Supposons que

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_m \cos \omega t + \hat{y}E_m \sin \omega t \quad (2.63)$$

Le vecteur $\mathbf{E}$ tourne donc dans l'espace réel comme dans le problème 2.10, et $d\mathbf{E}/dt$ est perpendiculaire à $\mathbf{E}$.

En représentation complexe,

$$\mathbf{E} = E_m (\exp j\omega t) \hat{x} + E_m \exp j \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \hat{y} \quad (2.64)$$

et

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = j\omega \mathbf{E} \quad (2.65)$$

Cette équation est correcte. Le problème est qu'elle *semble* indiquer que $d\mathbf{E}/dt$ est colinéaire à $\mathbf{E}$, ce qui est faux comme on peut le voir sur la Fig. 2.4.

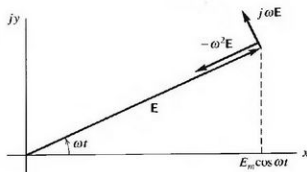


Figure 2.4 Le vecteur tournant $\mathbf{E}$ en représentation complexe est de module constant. Mais il tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à la pulsation ω (en rad/s). Sa dérivée temporelle est $d\mathbf{E}/dt$ ou $j\omega\mathbf{E}$, dans la direction indiquée. Sa dérivée seconde est $-\omega^2\mathbf{E}$.

Le facteur j fait tourner une variable en représentation complexe de $+\pi/2$ comme dans l'Éq. 2.9.

Cf. exercice 2.10.

2.7 NOTATIONS

Nous avons utilisé la police **sans-serif** pour les variables en représentation complexe et la *police italique* habituelle pour les autres variables. Cependant, il est fréquent d'utiliser pour les variables en représentation complexe la même police italique que pour les autres variables, et d'omettre l'opérateur Re . Ainsi, on écrit en pratique

$$x = x_m \exp j\omega t, \quad \frac{dx}{dt} = j\omega x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \text{etc.} \quad (2.66)$$

où il est implicite que les parties imaginaires ont été ajoutées formellement.

2.8 RÉSUMÉ

Un *nombre complexe* z s'écrit $z = a + bj$ où $j = (-1)^{1/2}$ et a et b sont des nombres réels. On représente habituellement les nombres complexes dans le plan complexe comme en Fig. 2.1, d'où

$$z = a + bj = r \exp(j\theta) \quad (2.8)$$

Le *complexe conjugué* d'un nombre complexe est son symétrique par rapport à l'axe réel :

$$z^* = a - bj = r \exp(-j\theta) \quad (2.11)$$

L'*addition* et la *soustraction* de nombres complexes sont plus simples en représentation cartésienne :

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + j(b + d) \quad (2.13)$$

Au contraire, la multiplication et la division sont plus simples en représentation polaire :

$$(r_1 \exp j\theta_1)(r_2 \exp j\theta_2) = r_1 r_2 \exp j(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.16)$$

$$\frac{r_1 \exp j\theta_1}{r_2 \exp j\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \exp j(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.17)$$

Si on doit manipuler les dérivées temporelles d'une quantité de la forme $I = I_m \cos \omega t$, il est en général conseillé de l'exprimer en *représentation complexe*

$$I = I_m \exp j\omega t = I_m \cos \omega t + j I_m \sin \omega t \quad (2.26)$$

on a alors

$$\frac{dI}{dt} = j\omega I, \quad \frac{d^2I}{dt^2} = -\omega^2 I, \quad \frac{d^n I}{dt^n} = (j\omega)^n I \quad (2.27)$$

étant entendu que seules les parties réelles sont physiquement significatives.

La variable en représentation complexe

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \exp j(\omega t - kz) \quad (2.37)$$

décrit une *onde plane* qui se propage dans la direction positive le long de l'axe z , k étant le *vecteur d'onde*. Les quantités $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}$ peuvent être des vecteurs. Dans ce cas $\mathbf{E}$ est un vecteur en représentation complexe.

On a parfois besoin de la moyenne temporelle du produit de deux grandeurs sinusoïdales *de même fréquence*, comme I et V dans un circuit électrique alternatif. Cette moyenne est donnée par $\frac{1}{2} \operatorname{Re} IV^*$, où I et V sont exprimés en représentation complexe.

Le quotient de deux variables en représentation complexe, encore de *même fréquence*, est un nombre complexe.

EXERCICES

2.1 Les nombres complexes en représentation polaire sont souvent écrits $r\angle\theta$ où r est le module et θ l'argument, exprimé en radians.

Exprimer $1 + 2j$ de cette manière.

2.2

- (a) Exprimer les nombres complexes $1 + 2j$, $-1 + 2j$, $-1 - 2j$ et $1 - 2j$ en représentation polaire.
 (b) Simplifier les expressions suivantes, en les gardant sous forme cartésienne : $(1 + 2j)(1 - 2j)$, $(1 + 2j)^2$, $1/(1 + 2j)^2$, $(1 + 2j)/(1 - 2j)$.

2.3 Qu'arrive-t-il à un nombre complexe dans le plan complexe quand il est (a) multiplié par j , (b) multiplié par j^2 , (c) divisé par j ?

2.4 Trouver les parties réelles des variables en représentation complexe $(1 + 3j) \exp j(\omega t + 2)$ et $[\exp j(\omega t + 2)] / (1 + 3j)$.

2.5 Résoudre l'équation différentielle suivante en représentation complexe :

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 4x = 5 \cos 6t$$

2.6 Trouver la valeur efficace des signaux représentés en Fig. 2.5.

- 2.7** Un circuit électrique débite un courant de valeur efficace 1,00 A quand il est alimenté par une tension efficace de 120 V à 60 Hz. Le courant retarde de $\pi/4$ rad sur la tension.
 (a) Exprimer V et I en représentation complexe et calculer la puissance moyenne dissipée.
 (b) Calculer maintenant la puissance $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta$ où θ vaut $\pi/4$.

2.8 Trouver la valeur de

$$\frac{5}{3}, 14 \exp j(\omega t + 3) \\ 3, 72 \exp j(\omega t + 5)$$

sous forme cartésienne.

2.9 Montrer que

$$\ln(a + bj) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) + j \arctan \frac{b}{a}$$

si a est positif. Le point $a + bj$ se trouve alors dans le premier ou le quatrième quadrant. Si a n'est pas positif, attention à utiliser le bon angle (Partie 2.1).

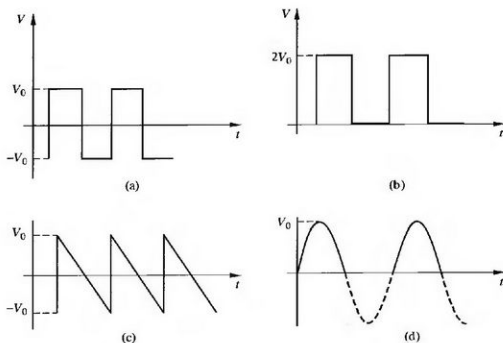


Figure 2.5

2.10 Montrer que la variable $\mathbf{V} = V_m [\hat{x} \exp j\omega t + \hat{y} \exp j(\omega t - \pi/2)]$ en représentation complexe décrit un vecteur de module constant V_m qui tourne dans la direction positive dans le plan xy à la pulsation ω .

2.11 La racine carrée d'un nombre complexe.

Posons $a + jb = (c + jd)^2$. $c + jd$ est alors la racine carrée de $a + jb$. Montrer que

$$c^2 = \frac{a \pm (a^2 + b^2)^{1/2}}{2}$$

$$d^2 = \frac{b^2}{2 [a \pm (a^2 + b^2)^{1/2}]}$$

Chapitre 3

Champs électriques : loi de Coulomb et théorème de Gauss

Dans les chapitres 3 à 10 nous étudions les champs électriques engendrés par l'accumulation de charges électriques. Pour simplifier, les charges électriques seront stationnaires ou se déplaceront lentement. Nous négligerons aussi leur champ magnétique.

La simplification est l'essence même de la Science : la Nature est si excessivement complexe qu'il est impossible de comprendre un phénomène sans se concentrer sur des aspects spécifiques. Selon la légende, Newton découvrit la loi de la gravitation après avoir regardé une pomme tomber d'un arbre. Énumérons toutes les variables : la couleur de la pomme, son orientation et sa forme, l'heure du jour, etc., etc. S'il avait essayé de prendre tout en considération, ses successeurs feraient encore des expériences avec des citrons et des prunes, avec des bâtons et des pierres.

Nous supposons donc que la vitesse v de nos charges en mouvement est beaucoup plus petite que la vitesse c de la lumière, ou plus précisément que $v^2 \ll c^2$. C'est seulement dans les chapitres 11 à 13 que nous pourrions discuter le cas des charges rapides. Mais même des charges très lentes engendrent des champs magnétiques notables, que nous négligeons pour le moment.

Ce premier chapitre sur les champs électriques concerne deux lois fondamentales et bien établies, la loi de Coulomb et le théorème de Gauss.

3.1 LE CHAMP ÉLECTRIQUE E

Un corps électriquement chargé est entouré d'un champ électrique. Par exemple, en un point P au voisinage d'une sphère conductrice isolée portant une charge Q , le *champ électrique* vaut

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.1)$$

où r est la distance entre le centre de la sphère et P , $\hat{\mathbf{r}}$ est le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur, et la constante

$$\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \quad (3.2)$$

est la *permittivité du vide*.⁽¹⁾

Les champs électriques peuvent être compliqués, selon la complexité de la distribution de charge.

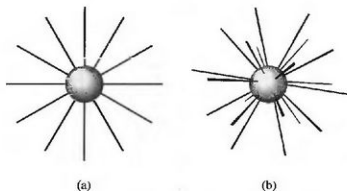


Figure 3.1 Lignes de champ électrique au voisinage d'une sphère conductrice chargée.

(a) Dans cette représentation bidimensionnelle usuelle la densité des lignes est proportionnelle à $1/r$, ce qui donne la fausse impression que E est proportionnel à $1/r$.

(b) Cette figure plus réaliste représente des lignes de champ électrique de même longueur et régulièrement espacées sur la sphère, projetées sur le plan du papier. On voit la densité des lignes de champ décroître beaucoup plus vite quand la distance augmente.

Pour tracer une *ligne de champ électrique*, il faut joindre bout à bout des petits vecteurs $d\mathbf{s} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}}$ pointant en direction de $\mathbf{E}$. On calcule d'abord $\mathbf{E}$ en un point de départ arbitraire, disons x_0, y_0 . Puis, sur une ligne de champ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} \quad (3.3)$$

et le point suivant est en $x_0 + dx, y_0 + dy$, etc.

(1) Le dénominateur de l'Éq. 3.1 est ennuyeux : pourquoi y a-t-il un facteur $4\pi\epsilon_0$ dans ce dénominateur ? Ne pourrait-on pas changer les unités de charge électrique ou de champ électrique pour éliminer ce facteur ? La loi de Coulomb, dans l'Éq. 3.5, a le même dénominateur. Le système d'unités basé sur l'Éq. 3.1 est dit *rationalisé*. En unités non rationalisées, la loi de Coulomb s'écrit $F = Q_1 Q_2 / r^2$, sans le facteur $1/(4\pi\epsilon_0)$. Le Coulomb est alors une grandeur *mécanique* dont la dimension est $M^{1/2} L^{3/2} / T$! Ce n'est pas très satisfaisant ; en effet, cela nous fait retourner à la physique du début du XIX^e siècle. Mais en outre, le fait de « simplifier » la loi de Coulomb, qui n'est *jamais* utilisée, complique la plupart des équations utiles en rajoutant des facteurs 4π ou $1/(4\pi)$. Les unités rationalisées ont été découvertes et proposées par Heaviside vers l'année 1885. Voir l'annexe C. Bien plus d'un siècle plus tard, beaucoup d'auteurs utilisent encore des unités non rationalisées.

Il faut garder à l'esprit que les lignes de champ électrique, comme les lignes de champ magnétique, ne sont rien de plus que des « outils visuels » ; leur seule fonction est de montrer la direction du champ en un point donné de l'espace. Elles sont extrêmement utiles pour visualiser les champs, même si les lignes de champ individuelles n'existent pas réellement. Voir la Fig. 3.1.

Cf. exercice 3.1.

3.2 LA LOI DE COULOMB

Soient deux charges ponctuelles Q_a et Q_b séparées par une distance r , les champs électriques interagissent comme en Figs. 3.2a et 3.2b, et la force exercée par Q_a sur Q_b est

$$\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{E}_a Q_b \quad (3.4)$$

$$= \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} \quad (3.5)$$

$$\simeq 9 \times 10^9 \frac{Q_a Q_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} \quad (3.6)$$

où $\hat{\mathbf{r}}_{ab}$ est un vecteur unitaire orienté de Q_a vers Q_b . C'est la loi de Coulomb. La force est répulsive si les deux charges sont de même signe et attractive si les charges sont de signes opposés. On sait que l'exposant de r vaut 2 avec une précision de 10^{-16} .

Notons que chaque charge possède son propre champ radial, que la deuxième charge soit présente ou non.

Nous ne pourrions pas donner de définition correcte du coulomb (symbole C) avant le chapitre 17. Pour le moment, nous pouvons soit prendre la valeur de ϵ_0 donné et utiliser la loi de Coulomb comme définition provisoire de l'unité de charge, soit dire que le Coulomb est égal à $6,24151 \times 10^8$ fois la charge de l'électron.

L'équation 3.4 fournit une définition du champ électrique $\mathbf{E}$ en un point : c'est la force exercée sur une charge unitaire en ce point. Un champ électrique est donc exprimé en N/C, et

$$1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{J/m}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{J/C}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

puisque 1 V est aussi 1 J/C.

Si la charge s'écoule à la vitesse de 1 C/s, le courant vaut un ampère (symbole A). Que se passe-t-il si Q_a ou Q_b se déplace ? La loi de Coulomb reste-t-elle valide ?

- 1) Si Q_a est fixe et Q_b mobile, la loi de Coulomb s'applique alors à la force sur Q_b , quelle que soit la vitesse de Q_b . Ceci est un fait expérimental : les trajectoires des particules chargées dans les oscilloscopes, spectrographes de masse et accélérateurs d'ions sont toujours calculées sur cette base.
- 2) Si Q_a n'est pas stationnaire, alors la loi de Coulomb n'est plus valide. Nous reviendrons sur ce fait dans le chapitre 13.

La loi de Coulomb s'applique à une paire de charges situées dans le vide. Elle s'applique aussi aux diélectriques et aux conducteurs si F_{ab} est la force directe entre Q_a et Q_b et ne tient pas compte des forces provenant des autres charges présentes dans le milieu.

Avec des charges étendues, la « distance entre les charges » n'a pas de signification précise. En outre, la présence de Q_b peut modifier la répartition de la charge Q_a et vice versa, conduisant à une variation compliquée de la force avec la distance.

Les forces électriques dans la nature sont énormes comparées à la force gravitationnelle, pour laquelle

$$F = 6,67259 \times 10^{-11} \frac{m_a m_b}{r^2} \quad (3.7)$$

Par exemple, la force gravitationnelle sur un proton à la surface du Soleil (masse = 2×10^{30} kg, rayon = 7×10^8 m) est égale à la force électrique entre un proton et un microgramme d'électrons, séparés par une distance égale au rayon du Soleil. Ou encore, la répulsion électrique entre deux électrons (masse = $9,1 \times 10^{-31}$ kg) vaut environ $4,2 \times 10^{42}$ fois leur attraction gravitationnelle.

Il y a deux raisons pour lesquelles, heureusement, nous n'avons pas conscience de l'énormité des forces électriques. Premièrement, la matière ordinaire est totalement neutre, ou elle paraît telle. Des expériences ont montré qu'aucun atome ni aucune molécule ne porte de charge plus grande que 10^{-20} fois la charge de l'électron. Deuxièmement, la mobilité de certains des électrons dans la matière empêche l'accumulation d'une quantité de charge notable de l'un ou l'autre signe.

Cf. exercices : 3.2 ; 3.3 ; 3.4 ; 3.5.

3.3 LE PRINCIPE DE SUPERPOSITION

S'il y a plusieurs charges, chacune impose son propre champ indépendamment des autres et le champ $\mathbf{E}$ résultant est simplement le vecteur somme des $\mathbf{E}$ individuels. C'est le principe de superposition. Voir les Figs. 3.2a et 3.2b.

Dorénavant nous utiliserons des *coordonnées primées* pour le point source P' où se trouvent les charges et des *coordonnées non primées* pour le point champ P , où nous calculons le champ.

Par exemple, si la charge électrique est distribuée continûment sur un volume fini comme en Fig. 3.3, alors au point champ $P(x, y, z)$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV' \quad (3.8)$$

où ρ est la densité de charge volumique au point $P'(x', y', z')$ de la source, $\hat{\mathbf{r}}$ est le vecteur unitaire orienté de P' vers P , r est la distance entre P' et P , et dV' est l'élément de volume $dx' dy' dz'$ en P' .

S'il y a aussi une charge surfacique de densité σ C/m² sur une aire A' , on doit ajouter l'intégrale de surface

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A'} \frac{\sigma \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dA'$$

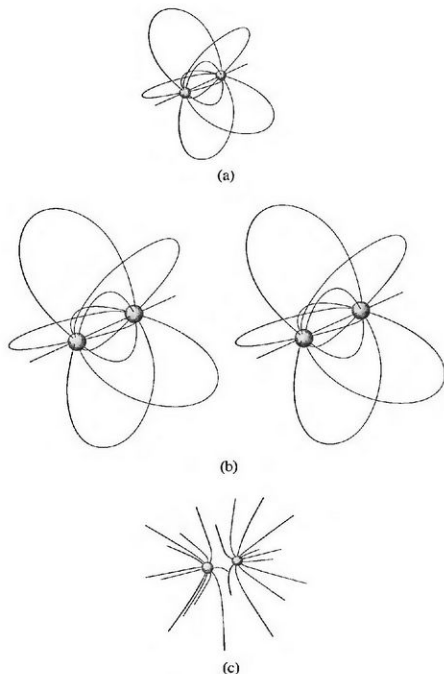


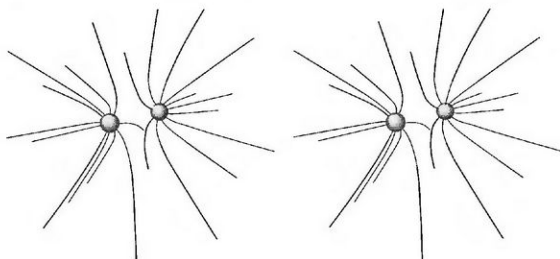
Figure 3.2a

(a) lignes de champ électrique au voisinage de deux charges $+Q$ et $-Q$. Ce sont les lignes de champ pour la somme vectorielle des deux champs. La force est attractive : les lignes de champ électrique sont « en tension ».

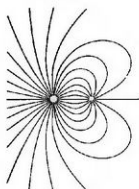
(b) Le même champ, représenté en trois dimensions.

Ceci est une paire de figures stéréoscopiques représentant à nouveau les mêmes lignes de champ, vues de deux points voisins. On peut voir le champ en trois dimensions de la façon suivante : regarder en direction des figures, d'assez loin. On voit quatre figures au lieu de deux. Ajuster alors ses yeux afin de superposer les deux figures du milieu, laissant trois figures au lieu de quatre ; se concentrer sur la figure du milieu. Plusieurs essais peuvent être nécessaires, mais cela vaut la peine ! Certaines personnes ne parviennent pas à ajuster leurs yeux correctement.

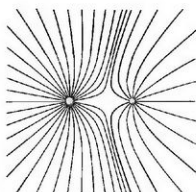
(c) Le champ de deux charges égales $+Q$ et $+Q$. La force est répulsive : les lignes de champ électrique « se repoussent latéralement ».



(d)



(e)



(f)

Figure 3.2b

(d) Figures stéréoscopiques représentant le champ de deux charges $+Q$ et $+Q$. Voir la légende de la figure 3.2a.

(e) Le champ de charges $+2Q$ et $-Q$.

Certaines des lignes de champ de la charge $+2Q$ s'étendent à l'infini.

(f) Le champ des charges $+2Q$ et $+Q$.

S'il y a en outre une charge linéique de longueur L et de densité λ C/m, on ajoute l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl'$$

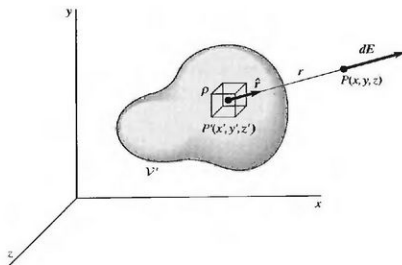


Figure 3.3 Distribution de charge de densité volumique ρ occupant un volume V' . L'élément de volume en $P'(x', y', z')$ engendre un champ $d\mathbf{E}$ en $P(x, y, z)$.

Exemple : Le champ électrique d'une paire de charges ponctuelles

Nous reviendrons sur ce champ dans un des exemples de la partie 4.3.

Référons-nous à la figure 3.4. Calculons $\mathbf{E}$ au point $P(x, y)$. En ce point,

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d_1^2} \quad (3.9)$$

où

$$d_1^2 = (a+x)^2 + y^2 \quad (3.10)$$

et

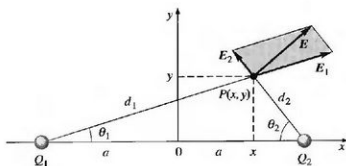
$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d_1^2} (\cos \theta_1 \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_1 \hat{\mathbf{y}}) \quad (3.11)$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d_1^2} \left(\frac{a+x}{d_1} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{d_1} \hat{\mathbf{y}} \right) \quad (3.12)$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d_1^3} [(a+x)\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}] \quad (3.13)$$

De même,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d_2^2} \quad (3.14)$$

Figure 3.4 Point P dans le champ de deux charges ponctuelles Q_1 et Q_2 .

$$\text{où} \quad d_2^2 = (a - x)^2 + y^2 \quad (3.15)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d_2^2} (-\cos\theta_2 \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta_2 \hat{\mathbf{y}}) \quad (3.16)$$

Notons le signe négatif devant le terme $\cos\theta_2$: la composante x de $\mathbf{E}_2$ est négative, sur la figure. Ainsi,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d_2^2} \left(-\frac{a-x}{d_2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{d_2} \hat{\mathbf{y}} \right) \quad (3.17)$$

$$= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d_2^3} [(x-a)\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}] \quad (3.18)$$

et, en $P(x, y)$,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (3.19)$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d_1^3} [(a+x)\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}] + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d_2^3} [(x-a)\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}] \quad (3.20)$$

Vérifions. Posons $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$. En $x = 0$, pour tout y , les lignes de champ doivent être parallèles à l'axe x , car les composantes selon y doivent s'annuler. Est-ce le cas ? Pour $x = 0$, $d_1 = d_2 = d$ et avec $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$, l'éq. 3.20 donne

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^3} (a\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^3} (-a\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}) \quad (3.21)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^3} 2a\hat{\mathbf{x}} = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \frac{a}{d} \hat{\mathbf{x}} \quad (3.22)$$

comme attendu.

Voici une autre vérification simple. À l'origine, $d_1 = d_2 = a$ et, à nouveau avec $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$,

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} (2a\hat{\mathbf{x}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} 2\hat{\mathbf{x}} \quad (3.23)$$

Le champ est deux fois plus grand que si on avait seulement une charge à la distance a , et il est orienté vers la droite sur la figure, comme attendu.

3.4 LE POTENTIEL ÉLECTRIQUE V ET LE ROTATIONNEL DE E

Imaginons une charge d'essai Q' située au point A qui peut se déplacer dans un champ électrique E . Le champ exerce sur elle une force $Q'E$. Pour éloigner la charge du point A on doit exercer une force $-Q'E$. Donc l'énergie nécessaire pour déplacer Q' à une vitesse constante de A à un point B le long d'un chemin donné est égale à l'intégrale curviligne de la force $-Q'E$ sur le chemin qui va de A à B :

$$\mathcal{E} = - \int_A^B Q'E \cdot d\mathbf{l} \quad (3.24)$$

On suppose que Q' est suffisamment petite pour ne pas perturber notablement les charges qui engendrent le champ.

Si le chemin est fermé, le travail total effectué sur la charge Q' est alors

$$\mathcal{E} = - \oint Q'E \cdot d\mathbf{l} \quad (3.25)$$

Pour évaluer cette intégrale nous considérons d'abord le champ d'une seule charge ponctuelle stationnaire Q . Alors

$$\oint Q'E \cdot d\mathbf{l} = Q' \oint \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q'Q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l}}{r^2} \quad (3.26)$$

Remarquons que $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l}$ est la variation dr de r sur le chemin $d\mathbf{l}$, si bien que

$$\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l}}{r^2} = \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right)$$

Mais la somme des incréments de $1/r$ sur un chemin fermé est nulle, puisque r a la même valeur au début et à la fin. L'intégrale est donc nulle, et le travail net effectué en déplaçant Q' autour d'un chemin fermé quelconque dans le champ de la charge fixe Q est nul.

Si le champ électrique est celui d'une distribution de charge fixe, alors les intégrales curvilignes correspondant à chaque charge individuelle sont toutes nulles. Ainsi, pour une distribution quelconque de charges fixes,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.27)$$

Un champ électrostatique est donc conservatif (Partie 1.6). Cette propriété importante dérive du fait que la force électrique dans le champ d'une charge ponctuelle est radiale.

Nous pouvons maintenant montrer que le travail effectué en déplaçant une charge d'essai Q' à vitesse constante du point A au point B est indépendant du chemin suivi. Soient m et n deux chemins quelconques allant de A à B , comme en Fig. 3.5. Ces deux chemins forment une courbe fermée et le travail effectué pour aller de A à B le long de m , et ensuite revenir à A le long de n , est nul. Donc le travail effectué pour aller de A à B est le même le long de m et le long de n .

Maintenant choisissons un point de référence $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et définissons une fonction scalaire V de $P(x, y, z)$ telle que

$$V_P - V_{P_0} = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.28)$$

C'est l'énergie nécessaire pour déplacer une charge unitaire de P_0 à P . Cette définition est sans ambiguïté car l'intégrale est la même pour tous les chemins allant de P à P_0 . Donc pour une paire quelconque de points A et B ,

$$V_A - V_B \equiv - \int_A^B (\text{grad } V) \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.29)$$

comme sur la Fig. 3.5, et donc

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad (3.30)$$

Le potentiel électrique V décrit complètement le champ ; le signe négatif fait que $\mathbf{E}$ est orienté vers une *décroissance* de V .

Il faut cependant remarquer que V n'est pas défini de manière unique, car le point P_0 est arbitraire. On peut ajouter à V une quantité quelconque indépendante des coordonnées, sans affecter $\mathbf{E}$.

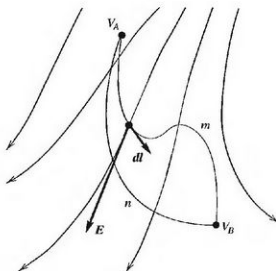


Figure 3.5 Différence de potentiel $V_A - V_B$ entre deux points.

Cette différence est égale à l'intégrale curviligne de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ de A à B , où $\mathbf{E}$ est le champ électrique et $d\mathbf{l}$ est un déplacement infinitésimal sur le chemin le long duquel l'intégrale est effectuée. Les lignes fines sont les lignes de $\mathbf{E}$.

De l'Éq 3.27 et du théorème de Stokes (Partie 1.8), on déduit

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (3.31)$$

Ceci est évident aussi à cause du fait que $\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot grad } V \equiv 0$.

N'oublions pas que nous traitons ici des champs *statiques* dus essentiellement à des charges stationnaires. S'il y avait des courants dépendant du temps, $\text{rot } \mathbf{E}$ ne serait alors pas nécessairement nul, et $\text{grad } V$ ne décrirait qu'une partie de $\mathbf{E}$. Nous examinerons ces phénomènes plus compliqués à partir du chapitre 18.

3.4.1 Le potentiel électrique V en un point

L'équation 3.29 montre que $\mathbf{E}$ est lié à la *différence* de potentiel entre deux points. Si on veut parler du potentiel en un point donné, on doit définir le potentiel au point de *référence* P_0 . Alors en un point P

$$V = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.32)$$

Par convention, P_0 est au potentiel nul ou au potentiel de la *terre*. Quand les charges s'étendent sur une région finie, il est souvent commode de choisir P_0 à l'infini.

Si le champ est celui d'une seule charge ponctuelle isolée, alors

$$V = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.33)$$

Le signe de V est le même que celui de Q . Voir la figure 3.6

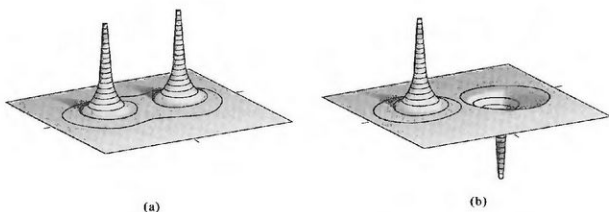


Figure 3.6 (a) Potentiel V , tracé sur l'axe vertical, dans un plan contenant deux charges égales. (b) Potentiel V , à nouveau tracé verticalement, dans un plan contenant deux charges d'amplitude égale mais de signes opposés.

Comme l'énergie $\mathcal{E}$ nécessaire pour amener une charge Q d'un point P_0 , où $V = 0$, à P est VQ , alors $V = \mathcal{E}/Q$, et l'unité de V est le J/C, ou *volt* (symbole V).

Le principe de superposition s'applique à V aussi bien qu'à $\mathbf{E}$. Pour une distribution de charge de densité volumique de charge ρ ,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho dV'}{r} \quad (3.34)$$

avec r comme en Fig. 3.3. Le volume V' contient toutes les charges. S'il y a des charges surfaciques, on ajoute une intégrale de surface. S'il y a des charges linéiques on ajoute une intégrale curviligne.

Pour certaines géométries, l'intégrale ci-dessus diverge. Dans ces cas-là, on calcule d'abord $\mathbf{E}$ puis on intègre pour trouver V .

Par exemple, l'intégrale pour le potentiel V à une distance D d'une charge linéique infinie de densité linéique λ qui s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ est proportionnelle à $\ln(2/0)$! Mais E est simple à calculer, grâce au théorème de Gauss de la partie 3.6.

Exemple : Le potentiel électrostatique V à la surface du Soleil

La surface du Soleil⁽¹⁾ que l'on voit en lumière blanche est connue sous le nom de *photosphère*. Voir la Fig. 17.11. Sa température est d'environ 6400 K et la pression d'environ $1,2 \times 10^4$ Pa, soit environ un huitième de la pression atmosphérique à la surface de la Terre. Tous les éléments sont présents mais l'hydrogène (90 %) et l'hélium (9 %) prédominent. Seule une petite fraction de l'hydrogène, environ 0,04 %, est ionisée et la densité d'électrons et de protons libres sont presque égaux.

Qu'en vaut le potentiel électrostatique V à la surface du Soleil ? Ce potentiel n'est pas nul car les électrons tendent à s'échapper plus facilement que les ions, beaucoup plus lourds. Le courant net doit-il être nul ? Oui, car sinon la charge électrostatique sur le Soleil augmenterait indéfiniment — et cela fait un bon moment que le Soleil est là. Qu'en pensez-vous ? V est-il positif ou négatif ?

C'est cette évaporation qui cause le *vent solaire*. Un phénomène similaire se produit sur d'autres étoiles et dans les galaxies.

Cette évaporation semble ne pas avoir une grande importance en astrophysique. Même les galaxies géantes ont des différences de potentiel entre le centre et la surface qui sont seulement de l'ordre du kilovolt, comme sur le soleil.

Voir le problème 3.15, où on calcule la charge électrostatique portée par la Terre ; dans le cas de la Terre, le phénomène est complètement différent.

La fraction F des particules qui possèdent assez d'énergie pour s'échapper est donnée par

$$F = \exp \left(- \frac{\text{énergie cinétique de libération}}{k_B T} \right) \quad (3.35)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T la température de la surface. Ceci est la *fonction de distribution des vitesses de Maxwell*. L'exposant est $mv^2/(2k_B T)$.

- 1) Tout d'abord, quelle est l'énergie cinétique de libération pour une particule neutre de masse m à la surface d'une étoile de masse M et de rayon R ?

L'énergie nécessaire pour éloigner m du rayon R vers l'infini, contre l'attraction gravitationnelle, vaut $G M m / R$. Si on appelle v la vitesse de libération,

$$\frac{1}{2} m v^2 = G \frac{M m}{R} \quad (3.36)$$

L'énergie cinétique de libération est donc proportionnelle à la masse m de la particule mais la vitesse de libération est indépendante de m .

(1) Pour une revue générale des phénomènes solaires voir Zirin [58].

Si les électrons et les protons étaient neutres, alors nous trouverions que la fraction F pour les électrons et pour les protons serait

$$F_e = \exp\left(-\frac{GMm_e}{Rk_B T}\right) \quad \text{et} \quad F_p = \exp\left(-\frac{GMm_p}{Rk_B T}\right) \quad (3.37)$$

et nous trouverions alors que

$$\frac{F_e}{F_p} = \exp\left[\frac{GM}{Rk_B T}(m_p - m_e)\right] \gg 1 \quad (3.38)$$

Ce dernier exposant est un nombre très grand, environ 4×10^4 , et le rapport du membre de gauche est un nombre encore plus grand — beaucoup plus grand.

- 2) Quelle est maintenant l'énergie cinétique de libération pour une particule chargée ?

L'énergie supplémentaire nécessaire pour extraire une particule de charge q vers l'infini est $-qV$, où V est le potentiel électrique au rayon R , soit *moins* l'énergie potentielle électrique⁽¹⁾. L'énergie supplémentaire $-qV$ est positive si q et V sont de signes opposés, ou si la force électrique est attractive.

L'énergie cinétique de libération pour une particule de masse m et de charge q est donc

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{R} - qV \quad (3.39)$$

- 3) Quel est donc le potentiel d'équilibre V à la surface d'une étoile ? Supposons qu'il y a des électrons et des protons libres à la même température, et un courant net nul.

La densité de protons et d'électrons reste constante dans une situation statique. Donc $F_e = F_p$, et les *énergies cinétiques* de libération pour les protons et les électrons sont égales. Posons $e = +1,6 \times 10^{-19}$ C. C'est la valeur absolue de la charge du proton et de l'électron. Alors

$$G\frac{Mm_p}{R} - eV = G\frac{Mm_e}{R} + eV \quad (3.40)$$

$$G\frac{M(m_p - m_e)}{R} = 2eV \quad (3.41)$$

$$G\frac{Mm_p}{R} \approx 2eV \quad \text{et} \quad V \approx G\frac{Mm_p}{2eR} \quad (3.42)$$

et le potentiel électrostatique V à la surface de l'étoile est *positif*.

(1) L'énergie potentielle électrique qV est proportionnelle à $1/r$, et elle est nulle quand q est à une distance infinie de l'étoile. Elle est positive si q et V ont le même signe, et négative sinon. Dans les deux cas, la force électrique tend à *diminuer* l'énergie potentielle. Si on trace le graphe de qV en fonction de r , on vérifie que la force électrique est répulsive si q et V ont le même signe, et qu'elle est attractive sinon.

- 4) Dans le cas du Soleil, voir la liste en annexe E pour les valeurs des constantes physiques. Dans ce cas

$$V \approx \frac{(6,7 \times 10^{-11})(2 \times 10^{30})(1,7 \times 10^{-27})}{2 \times (1,6 \times 10^{-19})(7 \times 10^8)} \approx +1000 \text{ V} \quad (3.43)$$

Puis, grâce au théorème de Gauss de la partie 3.6, $V = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$, d'où

$$Q \approx 4 \times 3,14 \times (8,85 \times 10^{-12})(7 \times 10^8) \times 1000 \approx +80 \text{ C} \quad (3.44)$$

Il y a un peu plus de protons libres que d'électrons libres dans le Soleil. La masse de protons en excès est $80 \times (1,7 \times 10^{-27})/(1,6 \times 10^{-19}) \approx 1 \times 10^{-6} \text{ kg}$, soit environ un milligramme, tandis que le Soleil a une masse de $2 \times 10^{30} \text{ kg}$!

Comme les *énergies cinétiques* de libération sont égales, les *vitesse*s de libération sont différentes, les protons libérés étant beaucoup plus lents que les électrons libérés, et il y a une densité volumique de charge positive dans l'atmosphère du Soleil.

3.4.2 Surfaces équipotentielles et lignes de champ de E

L'ensemble des points de l'espace qui sont à un potentiel donné V définit une *surface équipotentielle*. Par exemple, les surfaces équipotentielles au voisinage d'une charge ponctuelle isolée sont des sphères concentriques tandis que les surfaces équipotentielles au voisinage d'un fil chargé infini sont des cylindres coaxiaux. Ce sont les cas les plus simples. Des distributions de charge plus compliquées ont des surfaces équipotentielles plus compliquées.

Mais comment les surfaces équipotentielles sont-elles reliées à **E** ? Souvenons-nous que d'après la partie 3.4, **E** = $-\text{grad } V$. Donc **E** pointe en direction du *taux maximal de décroissance* de V . Cela signifie que le vecteur **E** est normal à la surface équipotentielle locale et qu'il est orienté vers les valeurs *plus basses* de V .

La charge ponctuelle isolée est un bon exemple. Disons que la charge est positive. Alors à son voisinage V est positif et décroît avec la distance, **grad** V est radial et orienté vers l'intérieur, et **E** est radial et orienté vers l'extérieur.

Nous reviendrons aux lignes de champ de **E** dans la partie 6.7.

Cf. exercices : 3.6 ; 3.7 ; 3.8 ; 3.9 ; 3.10 ; 3.11.

3.5 LE CHAMP ÉLECTRIQUE À L'INTÉRIEUR ET À L'EXTÉRIEUR DE CORPS MACROSCOPIQUES

Les corps macroscopiques sont constitués de noyaux de charge positive et d'électrons de charge négative. Cela soulève trois questions.

- 1) Peut-on calculer le champ à l'extérieur d'un corps électriquement chargé en supposant que la distribution de charge à l'intérieur est continue ? Si oui, on peut alors calculer le champ en intégrant sur la distribution de charge. Sinon, on doit trouver une autre façon de calculer.

En fait, on peut habituellement traiter les charges discrètes portées par les noyaux et les électrons dans les corps macroscopiques comme si elles étaient continues. Même les plus gros noyaux ont des diamètres de l'ordre de 10^{-14} mètres seulement. Les noyaux et les électrons sont si petits et si proches, par rapport aux dimensions des objets macroscopiques ordinaires, qu'on peut considérer une densité de charge électrique lentement variable, mesurée en coulomb par mètre cube ou par mètre carré.

- 2) Qu'en est-il maintenant du champ électrique à l'intérieur d'un corps chargé ? Bien entendu, le champ électrique au voisinage d'un noyau ou d'un électron est énorme. De plus, en un point donné ce champ électrique change de manière erratique avec le temps car les charges ne sont jamais parfaitement stationnaires. Dans notre contexte, il n'est pas utile de regarder le champ électrique de si près. Il nous suffit de calculer des moyennes temporelles et spatiales de $\mathbf{E}$ et V à l'intérieur d'un corps chargé en supposant une distribution de charge continue.
- 3) Est-il alors réellement possible de définir le champ électrique en un point P' à l'intérieur d'une charge distribuée continûment ? Il semble à première vue que la contribution au potentiel, dV , due à l'élément de charge $\rho dV'$ en P' est infinie, car r est nul. En fait, dV n'est pas infini.

Considérons une couche sphérique d'épaisseur dr et de rayon r centrée en P' . La charge dans cette couche contribue à dV en P' d'une quantité $(4\pi r^2 dr \rho)/(4\pi \epsilon_0 r) = (1/\epsilon_0)r dr \rho$. Une autre couche de rayon plus petit produit un dV plus petit. Le potentiel électrique converge donc, et l'intégrale est finie. Un raisonnement similaire montre que $\mathbf{E}$ converge aussi.

On peut donc calculer les champs électriques des distributions de charge réelles par les techniques habituelles du calcul intégral, que ce soit à l'intérieur ou à l'extérieur des distributions.

3.6 LE THÉORÈME DE GAUSS

Le théorème de Gauss relie le flux de $\mathbf{E}$ à travers une surface fermée à la charge totale contenue dans cette surface.

Considérons la Fig. 3.7, dans laquelle un volume fini $\mathcal{V}$ délimité par une surface $\mathcal{A}$ contient une charge Q . On peut calculer le flux sortant de $\mathbf{E}$ à travers $\mathcal{A}$ de la façon suivante. Le flux de $\mathbf{E}$ à travers l'élément de surface $d\mathcal{A}$ vaut

$$\mathbf{E} \cdot d\mathcal{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathcal{A}}{r^2} \quad (3.45)$$

Comme $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathcal{A}$ est la projection de $d\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathbf{r}}$, on peut écrire

$$\mathbf{E} \cdot d\mathcal{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (3.46)$$

où $d\Omega$ est l'angle solide sous-tendu par $d\mathcal{A}$ au point P' : l'angle solide $d\Omega$ est égal à l'aire $d\mathcal{A}$ projetée sur un plan perpendiculaire à $\hat{\mathbf{r}}$, divisée par r^2 .

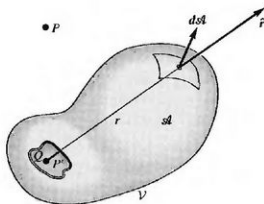


Figure 3.7 Charge ponctuelle Q placée à l'intérieur d'un volume V délimité par la surface d'aire A . Le théorème de Gauss stipule que l'intégrale de surface de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ sur A est égale à Q/ϵ_0 . Le vecteur $d\mathbf{A}$ est orienté vers l'extérieur.

Pour trouver le flux sortant de $\mathbf{E}$, on intègre sur la surface fermée A , ou sur un angle solide 4π stéradian. Alors

$$\int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.47)$$

Si Q est à l'extérieur de V en P , l'intégrale est nulle : l'angle solide sous-tendu par une surface fermée quelconque est 4π en un point P' à l'intérieur et 0 en un point P à l'extérieur. L'équation 3.47 est le *théorème de Gauss sous forme intégrale*.⁽¹⁾

Si la charge occupe un volume fini, on a alors

$$\int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (3.48)$$

où A est l'aire de la surface qui délimite le volume V , et ρ est la densité de charge électrique. Nous supposons qu'il n'y a pas de charge surfacique.

Si on applique le théorème de la divergence au membre de gauche, on trouve

$$\int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (3.49)$$

Comme cette équation est valable pour tout volume fini V , les intégrands sont égaux et

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.50)$$

en tout point de l'espace.

Ceci est le *théorème de Gauss sous forme locale*. Notons qu'il relie la densité locale de charge aux *dérivées spatiales* de $\mathbf{E}$ et pas à $\mathbf{E}$ lui-même.

Le théorème de Gauss exprimé sous cette forme est une loi *locale* parce qu'il relie le comportement de $\mathbf{E}$ au voisinage infinitésimal d'un point donné à la valeur de la densité de charge en ce point. Cependant, quand il est exprimé sous forme intégrale comme dans

(1) Conformément à l'usage habituel, nous sommes partis de la loi de Coulomb et avons ensuite déduit le théorème de Gauss de cette loi. Cette procédure semble assez rationnelle mais le théorème de Gauss est, en fait, plus général. Il s'applique à des charges en mouvement, quelle que soit leur vitesse ou leur accélération, alors que la loi de Coulomb, telle qu'elle est énoncée dans la partie 3.2, est valide seulement si Q_c est stationnaire.

l'Éq. 3.47, le théorème de Gauss est *non local* car il concerne une région finie et pas un point spécifique de l'espace.

Beaucoup de lois de la nature, en particulier les lois fondamentales de l'électromagnétisme, peuvent être exprimées sous deux formes équivalentes de ce genre, l'une locale et l'autre non locale. Avec les formes locales des lois physiques, qui sont des équations différentielles, on considère les phénomènes comme le résultat de processus qui se produisent dans les environs immédiats de chaque point de l'espace.

Exemple : Le champ d'une charge sphérique uniforme

Une charge sphérique Q a un rayon R et une densité de charge uniforme ρ , comme sur la Fig. 3.8. Déterminons E et V en fonction de la distance r au centre de la sphère. Par symétrie, E et V sont tous deux indépendants des coordonnées sphériques θ et ϕ .

Par symétrie, E est radial. Il est orienté vers l'extérieur si Q est positive.

1) Le champ électrique E .

À l'extérieur de la distribution de charge, en P où $r > R$, on imagine une sphère de rayon r et d'aire $4\pi r^2$. La charge contenue dedans est

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad (3.51)$$

Grâce au théorème de Gauss on a

$$E_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad (3.52)$$

comme si toute la charge était placée au centre O .

À l'intérieur de la sphère, en P' , la charge contenue dans la sphère imaginaire de rayon $r < R$ est $Q(r/R)^3$. En utilisant à nouveau le théorème de Gauss, on trouve

$$E_{\text{int}} = \frac{Q(r/R)^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (3.53)$$

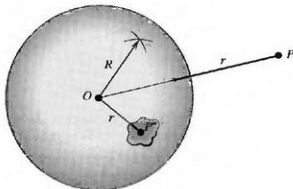


Figure 3.8 Distribution de charge sphérique.

La figure 3.9 représente E en fonction de r .

Notons que $E_{\text{int}} = E_{\text{ext}}$ en $r = R$. Cela est en accord avec le théorème de Gauss, car une couche sphérique d'épaisseur infinitésimale juste sous la surface de la sphère porte une charge nulle.

2) Le potentiel électrique V .

En P , représenté en Fig. 3.8,

$$V_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.54)$$

car le champ est le même que celui d'une charge ponctuelle Q en O .

Pour trouver le potentiel en un point P'' à l'intérieur, on utilise l'Éq. 3.33 :

$$V_{\text{int}} = \int_r^\infty E \, dr = \int_r^R E_{\text{int}} \, dr + \int_R^\infty E_{\text{ext}} \, dr \quad (3.55)$$

La dernière intégrale est simplement le potentiel en $r = R$ d'une charge ponctuelle Q placée en O , soit $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Alors

$$V_{\text{int}} = \int_r^R \frac{Qr \, dr}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \quad (3.56)$$

Voir la Fig. 3.9.

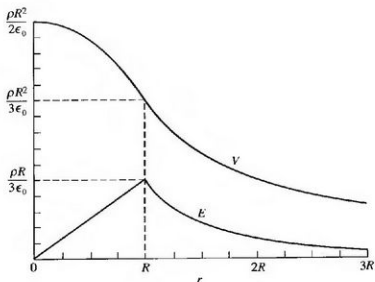


Figure 3.9 Potentiel V et champ électrique E en fonction de la distance radiale r à une distribution de charge sphérique de rayon R et de densité volumique de charge ρ .

Exemple : Le champ électrique d'un couple de fils parallèles de charges opposées

L'énergie électrique est distribuée par des câbles à fils parallèles. Calculons E et V à proximité d'un couple de charges linéiques de polarités opposées. Nous reviendrons sur ce champ quand nous discuterons la ligne de transmission à fils parallèles au chapitre 24. Notre discussion ici est calquée sur celle de l'exemple de la partie 3.3.

Deux charges linéiques longues et parallèles, de densités de charge

$$\lambda_A = +\lambda \quad \text{et} \quad \lambda_B = -\lambda \quad \text{C/m} \quad (3.57)$$

sont séparées par une distance $2a$ comme sur la Fig. 3.10. Le champ est indépendant de l'axe z perpendiculaire à la feuille.

On veut calculer à la fois V et E mais, comme nous l'avons signalé au paragraphe 3.4.1, dans ce cas spécifique, on doit d'abord calculer E . Le potentiel V viendra après.

- 1) Le champ E . Suivant le principe de superposition de la partie 3.3, le champ net est la somme vectorielle des champs des deux fils. Commençons par le champ E_A du seul fil de gauche, positif. Imaginons une surface cylindrique de rayon r_A centrée sur ce fil. Le champ est radial et grâce au théorème de Gauss, on sait que sur une longueur unitaire du cylindre imaginaire le flux de E , fois ϵ_0 , est égal à la charge contenue dedans :

$$\epsilon_0(2\pi r_A E_A) = \lambda, \quad \text{d'où} \quad E_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_A} \quad (3.58)$$

$$\text{où} \quad r_A = [(a+x)^2 + y^2]^{1/2} \quad (3.59)$$

Ce champ « s'éloigne » du fil positif, comme sur la figure 3.11.

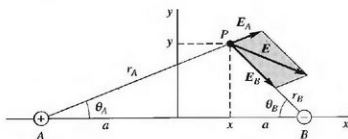


Figure 3.10 Paire de fils, A et B, perpendiculaires à la feuille.

Le fil A porte une charge $+\lambda$ C/m et le fil B une charge $-\lambda$ C/m. Le champ E_A « s'éloigne » de A, E_B est orienté vers B et le champ total E est orienté dans la direction indiquée.

De même, pour le fil négatif, le champ

$$E_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_B} \quad (3.60)$$

est orienté vers le fil, à nouveau comme sur la figure 3.11, avec

$$r_B = [(a-x)^2 + y^2]^{1/2} \quad (3.61)$$

Pour trouver le champ total au point $P(x, y)$, nous avons besoin de la somme vectorielle des deux champs E . Nous avons donc besoin de leurs composantes x et y . Tout d'abord,

$$\mathbf{E}_A = E_A(\cos \theta_A \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_A \hat{\mathbf{y}}) = E_A \left[\frac{(a+x)\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}}{r_A} \right] \quad (3.62)$$

et de même,

$$\mathbf{E}_B = E_B(\cos \theta_B \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta_B \hat{\mathbf{y}}) = E_B \left[\frac{(a-x)\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}}{r_B} \right] \quad (3.63)$$

si bien que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B \quad (3.64)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{a+x}{r_A^2} + \frac{a-x}{r_B^2} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{r_B^2} \right) y\hat{\mathbf{y}} \right] \quad (3.65)$$

Vérifions. Sur l'axe y , $x = 0$ et $r_A = r_B$. Alors $E_y = 0$ comme attendu : la ligne de champ est horizontale sur la figure. Par ailleurs, en l'origine $x = 0$, $y = 0$, $r_A = r_B = a$. Alors $E_y = 0$ et

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{2a}{a^2} = 2 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (3.66)$$

soit deux fois le E d'un seul fil portant une densité de charge λ , à une distance a , comme attendu encore une fois.

Si on trace quelques lignes de champ, on trouve des lignes de champ comme celles de la Fig. 3.11. Les lignes de champ peuvent être décrites comme des cercles passant à travers les fils. Étonnant !

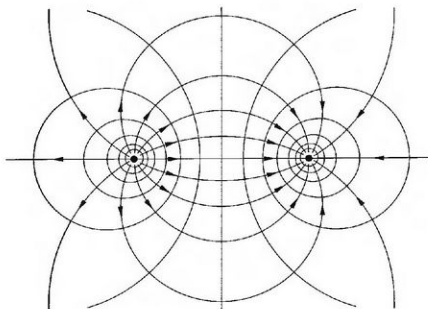


Figure 3.11 Lignes de champ électrique (avec les flèches) et lignes équipotentielles pour la paire de fils chargés de la Fig. 3.10.

2) Pour trouver le potentiel V au point P , référons-nous au paragraphe 3.4.1 :

$$V = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^{P_0} E_x dx + E_y dy \quad (3.67)$$

où P_0 est un point quelconque où on pose $V = 0$.

Simplifions au maximum et posons $y = 0$. Sur l'axe x , $E_y = 0$,

$$V_{y=0} = \int_x^{P_0} E_x dx \quad (3.68)$$

et

$$r_A = a + x, \quad r_B = a - x \quad (3.69)$$

Notre valeur de V sera valable seulement sur l'axe x . Choisissons aussi, comme point de référence P_0 où $V = 0$, l'origine $x = 0$. Alors

$$V_{y=0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_x^0 \left[\frac{a+x}{(a+x)^2} + \frac{a-x}{(a-x)^2} \right] dx \quad (3.70)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_x^0 \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] dx \quad (3.71)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln(a+x) - \ln(a-x)]_x^0 \quad (3.72)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{a+x}{a-x} \right]_x^0 \quad (3.73)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln 1 - \ln \frac{a+x}{a-x} \right) \quad (3.74)$$

Or $\ln 1 = 0$ et

$$V_{y=0} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+x}{a-x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a-x}{a+x} \quad (3.75)$$

Vérifions encore. En $x = 0$, V est proportionnel à $\ln 1 = 0$, donc $V = 0$. Correct. En $x = -a$, V est proportionnel à $\ln \infty$, soit $+\infty$. Ceci est juste également car le potentiel sur le fil de gauche, supposé infiniment fin, positif, est infini et positif. En $x = a$, V est proportionnel à $\ln 0$ soit à $-\infty$, ce qui est encore correct.

Nous pourrions aussi écrire que

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A} \quad (3.76)$$

Nous affirmons sans le démontrer que cette expression reste valable pour un point arbitraire $P(x, y)$.

Bien, mais qu'en est-il des fils *réels*? Dans les montages ménagers, le diamètre du fil et a sont tous deux de l'ordre de un ou deux millimètres, et l'approximation ci-dessus est sans utilité. Pourquoi? Parce que les charges se massent sur les surfaces internes des fils et que les distances r_A et r_B ne sont pas définissables.

Dans le cas des lignes de transmission à haute tension qu'on voit à la campagne, le diamètre du fil est de l'ordre du centimètre, a est de l'ordre du mètre, et l'approximation est satisfaisante.⁽¹⁾

Admettons que le diamètre du fil soit égal à 2 cm et $a = 1$ m. L'approximation ci-dessus est alors satisfaisante. Sur l'axe x , à droite du fil positif sur la Fig. 3.10,

$$r_A = 1 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad r_B = 2 - (1 \times 10^{-2}) = 1,99 \text{ m} \quad (3.77)$$

et

$$V_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1,99}{1 \times 10^{-2}} \right) = 1,80 \times 10^{10} \lambda \ln 199 \quad (3.78)$$

$$= 1,80 \times 10^{10} \times 5,29\lambda = +9,53 \times 10^{10} \lambda \quad \text{V} \quad (3.79)$$

Mais qu'en est-il de λ ? Posons $V_A = +10\,000$ V et $V_B = -10\,000$ V. Alors

$$\lambda = \frac{10\,000}{9,53 \times 10^{10}} = 1,05 \times 10^{-7} \text{ C/m} \quad (3.80)$$

Combien d'électrons cela fait-il ?

Puisque la charge de l'électron vaut $-1,60 \times 10^{-19}$ C,

$$n_e = \left| \frac{1,05 \times 10^{-7}}{-1,60 \times 10^{-19}} \right| = 6,56 \times 10^{11} \text{ électrons/m} \quad (3.81)$$

Donc le générateur qui maintient la différence de tension de 20 000 V entre les fils a transféré cette quantité d'électrons du fil positif au fil négatif. Est-ce une fraction appréciable des électrons de conduction dans le fil ? Non ! Comme on le verra au paragraphe 4.5.1, la densité d'électrons de conduction dans le cuivre est $8,1 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

La figure 3.11 montre un ensemble de lignes équipotentiellles. Ce sont encore des *cercles*. En faisant glisser la figure le long de l'axe perpendiculaire à la feuille, on obtient des surfaces équipotentiellles.

Le potentiel est grand et positif près du fil positif, grand et négatif près du fil négatif et nul sur l'axe y .

Notons que les lignes équipotentiellles sont perpendiculaires aux lignes de champ de $\mathbf{E}$. La raison en est que $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ (Éq. 3.30) si bien que $\mathbf{E}$ est orienté partout dans la direction opposée au taux maximal de croissance de V (Partie 1.2).

(1) Ces lignes sont presque invariablement constituées de trois ou six fils (plus un ou deux fils de terre) et ils transportent un courant triphasé, avec

$$V_1 = V_0 \cos \omega t, \quad V_2 = V_0 \cos [\omega t + (2\pi/3)], \quad V_3 = V_0 \cos [\omega t + (4\pi/3)]$$

Pourquoi un courant triphasé ? Parce que, pour une puissance transmise donnée, les pertes sur la ligne sont plus petites. Voir Lorrain et Corson [33], page 344. Ici nous supposons les tensions continues.

Exemple : Le potentiel moyen sur une surface sphérique. Le théorème d'Earnshaw

Comme autre illustration de l'utilisation du théorème de Gauss, nous allons prouver que le potentiel moyen $\langle V \rangle$ sur une surface sphérique quelconque de rayon R et de centre O a les deux propriétés suivantes : s'il n'y a pas de charges à l'intérieur, alors $\langle V \rangle$ est égal à la valeur de V au centre O . S'il y a une charge nette Q à l'intérieur et aucune charge à l'extérieur, alors $\langle V \rangle$ est égal à $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$.

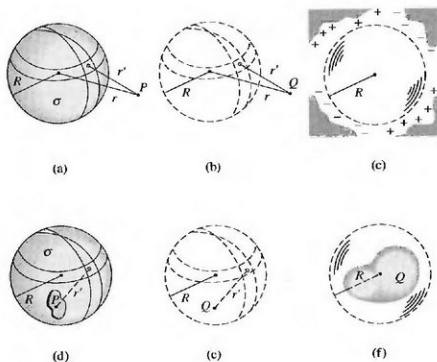


Figure 3.12 (a) Surface sphérique portant une distribution de charge uniforme σ .
 (b) Charge ponctuelle Q à l'extérieur d'une surface sphérique imaginaire de rayon R .
 (c) Surface sphérique imaginaire dans une région sans charge.
 Le potentiel moyen sur la surface est égal au potentiel au centre.
 (d) Surface sphérique portant une distribution de charge uniforme σ .
 Le point P est situé à l'intérieur.
 (e) Charge ponctuelle Q à l'intérieur d'une surface sphérique imaginaire de rayon R .
 (f) Surface sphérique imaginaire entourant une charge Q .
 Le potentiel moyen sur la surface est égal à $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$.

- 1) Imaginons d'abord une couche sphérique isolée de rayon R qui porte une densité surfacique de charge uniforme σ et une charge totale $Q = 4\pi R^2 \sigma$, comme sur la Fig. 3.12(a).

Alors en appliquant le théorème de Gauss, on trouve qu'en un point P quelconque à l'extérieur, à la distance r de O , le champ est le même que si on avait une charge ponctuelle Q à l'origine :

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{et} \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.82)$$

Mais on a également

$$V = \int_A \frac{\sigma dA}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{Q}{4\pi R^2} \int_A \frac{dA}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (3.83)$$

où A est l'aire de la couche.

L'égalisation de ces deux valeurs de V donne une relation purement géométrique concernant une sphère de rayon R et un point P à une distance $r > R$ de son centre :

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi R^2} \int_A \frac{dA}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (3.84)$$

Regardons la figure 3.12(b). Nous avons maintenant une sphère imaginaire de rayon R et une charge Q située à l'extérieur, à une distance r . Le membre de gauche de l'éq. 3.84 est égal au potentiel au centre de la sphère imaginaire, et le membre de droite est le potentiel moyen $\langle V \rangle$ sur la surface sphérique. Nous avons ainsi démontré que, sur la Fig. 3.12(b), le V moyen sur la sphère est simplement la valeur de V au centre.

Ce résultat s'applique à toute distribution de charge située à l'extérieur de la sphère, comme sur la Fig. 3.12(c), grâce au principe de superposition (Partie 3.3).

Imaginons maintenant provisoirement qu'il y ait un maximum de potentiel en un point O , dans une région où $\rho = 0$. Alors le potentiel moyen sur une sphère centrée en O doit être inférieur au potentiel en O , ce qui est contraire au résultat ci-dessus. Nous voyons qu'on ne peut jamais avoir de maximum de potentiel dans une région sans charge. Pour la même raison, on ne peut jamais avoir de minimum de potentiel non plus.

C'est le *théorème d'Earnshaw*.

Quelquefois on cherche à créer un puits de potentiel dans l'espace afin de piéger soit des ions soit des électrons. Le théorème d'Earnshaw montre que cela est impossible avec des champs électrostatiques.

- 2) Nous pouvons procéder de façon similaire pour trouver le potentiel moyen sur une surface sphérique quand les charges sont à l'intérieur.

Commençons de nouveau avec une charge Q distribuée uniformément sur la surface, comme en Fig. 3.12(d). En un point P quelconque à l'intérieur, E est nul pour la raison suivante : par symétrie E_θ et E_ϕ sont nuls. Pour trouver E_r , nous appliquons le théorème de Gauss à une surface sphérique concentrique qui a un rayon plus petit que R et donc ne contient aucune charge. On trouve $E_r = 0$. Alors $E = 0$ à l'intérieur, et le potentiel V en un point P à l'intérieur est égal au V sur la surface, c'est-à-dire à $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Donc en P sur la Fig. 3.12(d),

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \int_A \frac{\sigma dA}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{Q}{4\pi R^2} \int_A \frac{dA}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (3.85)$$

Le dernier terme est simplement le potentiel moyen sur la sphère imaginaire de la Fig. 3.12(e). Le potentiel moyen sur une surface sphérique de rayon R contenant une charge ponctuelle Q est donc $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$, quelle que soit la position de Q à l'intérieur. La même relation est valable pour une distribution de charge Q de volume fini à l'intérieur de la sphère, comme en Fig. 3.12(f).

Cf. exercices : 3.12 ; 3.13 ; 3.14 ; 3.15 ; 3.16 ; 3.17 ; 3.18 ; 3.19 ; 3.20 ; 3.21 ; 3.22 ; 3.23.

3.7 RÉSUMÉ

La force exercée par une charge ponctuelle stationnaire Q_a sur une charge ponctuelle Q_b , stationnaire ou en mouvement, est donnée par

$$\mathbf{F}_{ab} = \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} \approx 9 \times 10^9 \frac{Q_a Q_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} \quad (3.5, 3.6)$$

où $\epsilon_0 \simeq 8,85 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$, r est la distance entre les charges, et $\hat{\mathbf{r}}_{ab}$ est le vecteur unitaire orienté de Q_a vers Q_b . C'est la loi de Coulomb.

Un courant qui s'écoule au rythme de 1 C/s vaut 1 A.

Selon le principe de superposition, deux $\mathbf{E}$ ou plus qui agissent sur le même point se somment vectoriellement.

Un champ électrostatique est conservatif :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.27)$$

où C est une courbe fermée quelconque. Il s'ensuit que

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (3.31)$$

et que

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad (3.30)$$

où

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho dV'}{r} \quad (3.34)$$

est le potentiel électrique en un point P . Ici ρ est la densité volumique de charge, r est la distance entre $P(x, y, z)$ et l'élément de volume dV' en $P'(x', y', z')$ et V' contient toutes les charges. Cette intégrale s'applique à des distributions de charge finies et elle suppose que $V = 0$ à l'infini.

Le théorème de Gauss dérive de la loi de Coulomb. Sous forme intégrale

$$\int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.47)$$

où Q est la charge totale contenue à l'intérieur de la surface fermée d'aire A . Sous forme locale,

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.50)$$

EXERCICES

(R) 3.1 Champ électrique

Une charge $+Q$ est placée en $x = a, y = 0$, et une charge $-Q$ en $x = -a, y = 0$. Calculer le vecteur $\mathbf{E}$ au point $x = a, y = 2a$.

3.2 Loi de Coulomb

La force d'attraction entre deux charges de 1 C de signes opposés, séparées par une distance de 1 m, vaut environ 9×10^9 N.

Quel est le côté d'un cube de plomb pesant 9×10^9 N ?

Le plomb a une masse volumique de $1,13 \times 10^4$ kg/m³.

3.3 Loi de Coulomb

(a) Calculer la valeur du champ électrique qui serait juste suffisant pour compenser la force gravitationnelle de la Terre sur un électron.

(b) Si ce champ électrique était produit par un deuxième électron placé au-dessous du premier, quelle serait la distance entre les deux électrons ?

La charge de l'électron vaut $-1,6 \times 10^{-19}$ C et sa masse $9,1 \times 10^{-31}$ kg.

3.4 Tube cathodique

Le faisceau d'électrons dans le tube cathodique d'un oscilloscope est défléchi verticalement et horizontalement par deux paires de plaques de déflexion parallèles qui sont maintenues à une tension appropriée. Lorsque les électrons passent dans l'une des deux paires, ils sont accélérés par le champ électrique et leur énergie cinétique augmente. Ainsi, en régime stationnaire, on parvient à augmenter l'énergie cinétique des électrons sans dépenser de puissance dans les plaques de déflexion, tant que le faisceau ne touche pas les plaques.

Ce phénomène pourrait-il être utilisé pour une machine à mouvement perpétuel ?

3.5 Tube cathodique

Dans un tube cathodique, les électrons sont accélérés par une différence de potentiel de 5 kV. Une fois accélérés, ils voyagent horizontalement sur une distance de 200 mm.

Calculer la déflexion vers le bas causée sur cette distance par la force gravitationnelle.

Un électron porte une charge de $-1,6 \times 10^{-19}$ C et il a une masse de $9,1 \times 10^{-31}$ kg.

(R) 3.6 Canon à particules macroscopiques

On peut obtenir un faisceau de petites particules de la manière suivante : la figure 3.13 représente un condensateur à faces planes et parallèles avec un trou dans la plaque supérieure. Si une particule de poussière, par exemple, est introduite dans la région entre les plaques, elle touche tôt ou tard l'une des deux plaques et acquiert une charge de même polarité. Elle vole alors vers la plaque opposée et le processus se reproduit. La particule oscille entre les plaques jusqu'à ce qu'elle s'échappe, soit par les bords, soit par le trou central. On peut donc obtenir un faisceau sortant du trou en introduisant constamment des particules dans le condensateur. Pour obtenir de grandes vitesses, le canon doit, évidemment, fonctionner sous vide.

Les faisceaux de particules macroscopiques sont utilisés pour étudier les impacts de micrométéorites.

On a trouvé qu'une particule sphérique de rayon R posée sur une plaque chargée acquiert une charge

$$Q = 1,65 \times 4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R^2 E_0 \quad C$$

où E_0 est le champ électrique en l'absence de la particule et ϵ_r est la permittivité relative de la particule (Partie 7.9). On suppose que la particule est au moins légèrement conductrice.

En supposant que les plaques sont séparées de 10 mm et qu'une différence de potentiel de 15 kV leur est appliquée, trouver la vitesse d'une particule sphérique de 1 μm de diamètre quand elle sort du trou dans la plaque supérieure. On admettra que la particule a la densité de l'eau et que $\epsilon_r = 2$.

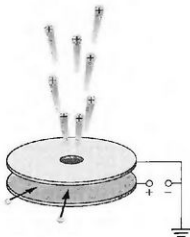


Figure 3.13

3.7 Vaporisation électrostatique

Quand on peint avec un pistolet à pulvérisation ordinaire, une partie de la peinture n'est pas déposée. La fraction perdue dépend de la forme de la surface, du dessin, etc., et elle peut atteindre 80 %. L'utilisation de pistolets à pulvérisation ordinaires dans les procédés industriels à grande échelle conduirait donc à un gaspillage et à une pollution intolérables.

L'efficacité de la peinture par pulvérisation peut être portée à presque 100 %, et la pollution considérablement réduite, en chargeant électriquement les gouttelettes de peinture et en appliquant une différence de potentiel entre le pistolet et l'objet à peindre.

On a trouvé que, dans ces dispositifs, les gouttelettes portent une charge spécifique d'environ un coulomb par kilogramme.

En supposant que le champ électrique dans la zone entre le pistolet et la pièce vaut au moins 10 kV/m, quel est le rapport minimal entre la force électrique et la force gravitationnelle ?

3.8 Analyseur cylindrique électrostatique

La figure 3.14 représente un analyseur électrostatique cylindrique, ou sélecteur de vitesse. Il consiste en une paire de conducteurs cylindriques séparés par une distance radiale de quelques millimètres.

Montrer que, si la distance radiale entre les surfaces cylindriques de rayon moyen R est a et si la tension entre elles est V , alors les particules de masse m collectées en I ont une vitesse

$$v = \left(\frac{QVR}{ma} \right)^{1/2}$$

3.9 Trieuse à graines électrostatique

On peut séparer les graines normales des graines décolorées et des corps étrangers à l'aide d'un dispositif qui fonctionne de la façon suivante. Les graines tombent une par une dans une paire de photocellules. Si la couleur n'est pas la bonne, une tension est appliquée à une aiguille qui dépose une charge sur la graine. Les graines tombent ensuite à travers une paire de plaques électriquement chargées qui défléchissent les particules indésirables dans un bac séparé. Une telle machine peut trier des petits pois à la vitesse de 100 par seconde, soit 2 tonnes par jour.

(a) Si les graines tombent au rythme de 100 par seconde, sur quelle distance doivent-elles tomber pour être séparées de 20 mm quand elles passent entre les photocellules ? On négligera la résistance de l'air.

(b) Supposons que les graines acquièrent une charge de $1,5 \times 10^{-19}$ C, que les plaques de déflexion soient parallèles et à 50 mm l'une de l'autre, et que la différence de potentiel entre elles soit de 25 000 V. Quelle hauteur doivent avoir les plaques de déflexion en dessous de l'aiguille de charge afin que les graines chargées soient défléchies de 40 mm à la sortie des plaques ? On supposera que l'aiguille qui charge les graines et le haut des plaques de déflexion sont proches de la photocellule.

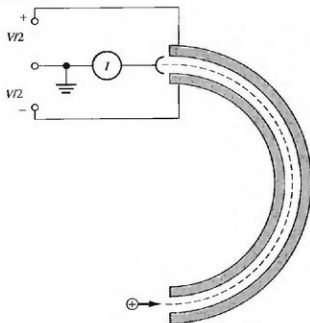


Figure 3.14

3.10 Rutherford découvre le noyau

En 1906, pendant une expérience historique qui a démontré la petite taille du noyau atomique, Rutherford a observé qu'une particule alpha ($Q_1 = 2 \times 1,6 \times 10^{-19}$ C) ayant une énergie cinétique de $7,68 \times 10^6$ eV ($7,68 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}$ J) rebondissait en arrière au cours d'une collision frontale avec un noyau d'or ($Q_2 = 79 \times 1,6 \times 10^{-19}$ C).

(a) Quelle est la distance minimale d'approche où l'énergie potentielle électrostatique est égale à l'énergie cinétique initiale ? On exprimera le résultat en femtomètres (10^{-15} m).

(b) Quelle est la force maximale de répulsion ?

(c) Quelle est l'accélération maximale en unités de g ? La masse d'une particule alpha est environ 4 fois celle d'un proton, soit $4 \times 1,7 \times 10^{-27}$ kg.

3.11 Propulseur électrostatique à ions

Les propulseurs à ions corrigent l'orientation ou la trajectoire des satellites.

La force exercée par un propulseur est égale à $m'v$, où m' est la masse de propergol éjectée par seconde et v est la vitesse d'échappement par rapport au propulseur.

La figure 3.15 schématise un propulseur qui éjecte un faisceau de particules chargées. Le propergol entre en P puis est ionisé en S . Les électrodes A et B forment une lentille qui accélère les ions positifs. Un faisceau d'ions positifs sort à droite à une vitesse déterminée par la tension d'accélération V . Les ions de masse m portent une charge ne où e est la valeur absolue de la charge électronique. Le courant est I . Les électrons émis par le filament F neutralisent le faisceau pour éviter que le satellite ne se charge.

(a) Montrer que la poussée est donnée par $F = I [2Vm/(ne)]^{1/2}$.

(b) Quelle est la valeur de F pour un faisceau de protons de courant 0,1 A quand $V = 50$ kV ?

(c) Si P est la puissance IV dissipée dans l'accélération des particules, montrer que

$$F = (2Pm')^{1/2} = \frac{2P}{v} = P \left(\frac{2m}{neV} \right)^{1/2}$$

Donc, pour une valeur donnée de P et m' , la poussée est indépendante du rapport charge sur masse des ions. Ou bien, pour P donnée, F est *inversement* proportionnelle à v . La dernière expression montre que, *pour une dissipation de puissance donnée P* , il est préférable d'utiliser des ions lourds portant une seule charge ($n = 1$) et une tension d'accélération V la plus *petite* possible.

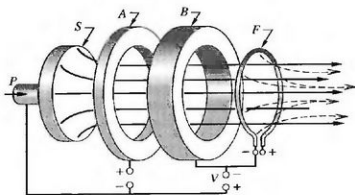


Figure 3.15

(d) Si la source d'électrons est éteinte et si le courant de faisceau I vaut 1 A, combien de temps faudra-t-il au corps du satellite pour atteindre une tension égale à la tension d'accélération, si V vaut 50 kV ? On supposera que le satellite est sphérique et qu'il a un rayon de 1 m. À ce moment-là le moteur cesse de fonctionner car les ions suivent le satellite.

3.12 Dérivées spatiales de E_x , E_y , E_z

Faire une liste de toutes les relations entre les différentes dérivées spatiales des trois composantes de $\mathbf{E}$, en utilisant le théorème de Gauss et le fait qu'un champ électrostatique est conservatif.

3.13 Champs possibles et impossibles

Un champ électrique est orienté partout selon z .

- (a) Que peut-on en conclure sur les valeurs des dérivées partielles de E par rapport à x , y , z (i) si la densité volumique de charge ρ est nulle et (ii) si ρ n'est pas nulle ?
- (b) Tracer les lignes de champ de E pour un champ possible et pour un champ impossible dans la mesure où $\text{rot } E = 0$.

③ 3.14 Densité d'électrons de conduction à la surface du cuivre électriquement chargé

Un atome de cuivre a un diamètre d'environ 0,3 nm.

- (a) Calculer (i) le nombre approximatif d'atomes par mètre carré, (ii) la densité surfacique de charge approximative qu'on obtiendrait si chaque atome acquérait un électron libre et (iii) le champ électrique correspondant.
- (b) Le plus grand champ électrique possible dans l'air est 3×10^6 V/m. À quelle distance se trouvent les électrons en excès pour cette valeur de E ?

3.15 Charge électrique de la Terre

Le champ électrique dans l'atmosphère près de la surface de la Terre vaut environ 100 V/m et il est orienté vers le bas. Le potentiel augmente avec l'altitude jusqu'à environ 300 000 V. Ce champ est maintenu par les orages, qui déposent des charges négatives sur la Terre à un rythme moyen d'environ 10^9 A.

Calculer la charge électrique portée par la Terre. On peut résoudre ce problème par deux méthodes équivalentes.

Quand on est debout, il y a une différence de potentiel de 200 V entre le haut de la tête et le sol. Cette différence est plus que nécessaire pour être électrocuté ! Où est l'erreur ? L'explication est que la densité de courant dans l'atmosphère est seulement de l'ordre de 10^{-12} A/m² et que la conductivité d'un organisme vivant est élevée. Par conséquent la différence de potentiel à travers le corps humain est inférieure à celle que l'on peut sentir de beaucoup d'ordres de grandeur. Voir *Physics Today*, mai 1999, pp. 15, 68.

3.16 Câble coaxial

Les figures 20.3 et 24.2 représentent des coupes d'un câble coaxial.

Montrer que, à une distance ρ de l'axe dans la région entre les deux conducteurs, $E = \lambda / (2\pi\epsilon_0\rho)$, où λ est la charge par unité de longueur sur le conducteur intérieur. Le vecteur E est orienté vers l'extérieur si λ est positive.

③ 3.17 Force entre une charge ponctuelle et une charge linéique

Une distribution de charge linéique uniforme de λ C/m est placée à une distance r d'une charge ponctuelle Q de signe opposé.

- (a) Calculer la force d'attraction.
- (b) Montrer que la force est la même que si la distribution linéique était remplacée par une seule charge $Q' = 2\lambda r$ placée au pied de la perpendiculaire abaissée de Q .

3.18 Faisceau de protons

Un faisceau de protons de $1,00 \mu\text{A}$ est accéléré par une différence de potentiel de $10\,000 \text{ V}$.

- Calculer la densité de charge dans le faisceau, une fois que les protons ont été accélérés, en supposant que la densité de courant est uniforme sur un diamètre de $2,00 \text{ mm}$ et nulle à l'extérieur.
- Calculer la composante radiale de E à l'intérieur et à l'extérieur du faisceau.
- Tracer le graphe de la composante radiale de E pour des valeurs de r allant de 0 à $10,0 \text{ mm}$.
- Le faisceau est situé sur l'axe d'un tube conducteur cylindrique, de rayon interne $10,0 \text{ mm}$, connecté à la terre. Tracer le graphe de V à l'intérieur du tube.
- Calculer la densité de charge électrique par unité de longueur sur l'intérieur du tube.

3.19 Le champ d'un noyau atomique

La dépendance radiale de la densité de charge électrique à l'intérieur d'un noyau atomique de rayon a est approximativement décrite par $\rho = \rho_0(1 - r^2/a^2)$, pour $r \leq a$, avec $\rho_0 = 5,0 \times 10^{25} \text{ C/m}^3$ et $a = 3,4 \text{ fm}$.

- Quelle est la charge totale Q ?
- Trouver E et V à l'extérieur du noyau. Que valent E et V à la surface ?
- Trouver E et V à l'intérieur du noyau. Que vaut V au centre ?
- Montrer que E est maximal en $r/a = 0,745$.
- Tracer des graphes représentant $E/[2\rho_0/(15\epsilon_0)]$ et $V/[2\rho_0/(15\epsilon_0)]$ en fonction de r pour r/a variant entre 0 et 5 .

3.20 Accélérateur d'ions

Un accélérateur de particules a une électrode à haute tension maintenue sous pression de SF_6 gazeux dans une enceinte métallique. On peut de cette manière maintenir des tensions beaucoup plus grandes que si l'électrode était dans l'air.

Supposons que l'électrode est sphérique et que son rayon est r_1 . Sa tension est V . L'enceinte a un rayon r_2 et elle est connectée à la terre. Le champ électrique est maximal à la surface de l'électrode. Il faut trouver les valeurs de r_1 et r_2 qui minimisent ce champ E .

Pour une valeur donnée de r_1 , la valeur optimale de r_2 est infinie, ce qui est absurde. Évidemment, le coût, le poids et l'encombrement limitent r_2 . Il faut donc optimiser r_1 pour un r_2 donné, qui vaut 483 mm dans un cas spécifique.

- Montrer que E à la surface de l'électrode haute tension ($r = r_1$) a une valeur minimale de $2V/r_1$ quand $r_1 = r_2/2$.
- Expliquer qualitativement pourquoi il y a un rayon r_1 optimal.
- Identifier une condition optimale n'est pas suffisant. Il faut encore évaluer à quel point cette condition est critique. Tracer E/V en $r = r_1$ pour $r_2 = 0,483 \text{ m}$ et pour des valeurs de r_1 allant de 100 à 400 mm .
- Quelle plage de valeurs de r_1 est permise si E peut être de 10% plus grand que $2V/r_1$?
- Calculer $2V/r_1$ pour $V = 5 \times 10^5 \text{ V}$ et pour le r_1 optimal.

3.21 Précipitation électrostatique

La précipitation électrostatique sert pour éliminer les particules de poussière des gaz industriels, par exemple pour éliminer les cendres en suspension dans la fumée des centrales thermo-électriques au charbon. Une décharge par effet corona ionise le gaz, puis les ions chargent les particules de poussière, qui sont entraînées par le champ électrique vers les électrodes, où elles sont collectées. Périodiquement, les électrodes sont secouées et la poussière tombe dans un réservoir.

Dans l'un de ces types d'appareils, l'anode est un cylindre de rayon intérieur $R = 150$ mm connecté à la terre, et la cathode est un fil axial maintenu à un potentiel $V = -50$ kV. Le gaz s'ionise et des ions des deux signes se forment lors de la décharge par effet corona près du fil. Les ions positifs atteignent rapidement le fil central tandis que les ions négatifs s'éloignent en direction radiale vers le cylindre. La charge volumique est donc négative sur la plus grande partie du volume du cylindre.

Dans ces conditions, les expériences montrent que E est approximativement uniforme et égal à V/R pour toutes les valeurs de r . Si les particules de poussière sont au moins légèrement conductrices elles acquièrent une charge négative Q de $12\pi\epsilon_0 E a^2$ où a est leur rayon. La charge est un peu plus petite si elles ne sont pas conductrices.

(a) Soit I le courant électrique radial par mètre et $\mathcal{M}$ la mobilité (vitesse/ E) des ions négatifs.

Montrer que, pour tout r , $I = 2\pi r \rho \mathcal{M} E$ où ρ est la densité volumique de charge $\epsilon_0 E/r$.

(b) La vitesse de dérive des particules de poussière est donnée par la loi de Stokes : elle correspond à la force EQ divisée par $6\pi\eta a$, où η est la viscosité du gaz.

Montrer que leur vitesse de dérive v vaut $2\epsilon_0 E^2 a / \eta$.

(c) Calculer I , ρ , v et le temps nécessaire à une particule de poussière pour dériver de la cathode à l'anode quand $\mathcal{M} = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$, $a = 5 \text{ } \mu\text{m}$ et $\eta = 2 \times 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$.

Cette théorie simplifiée néglige la turbulence, qui est importante en pratique.

3.22 L'expansion de l'Univers

En 1959 Lyttleton et Bondi suggérèrent que l'expansion de l'Univers pouvait être expliquée sur la base de la mécanique newtonienne si la matière portait une charge électrique nette.

Imaginons un volume sphérique V de dimension astronomique contenant de l'hydrogène atomique non-ionisé de densité uniforme N atomes par mètre cube, et supposons que la charge du proton soit égale à $(1 + y)e$ où e est la valeur absolue de la charge de l'électron.

(a) Trouver E au rayon R .

(b) Montrer que, pour $y > 10^{-18}$, la répulsion électronique devient plus grande que l'attraction gravitationnelle, donc le gaz se dilate.

(c) Montrer que la force de répulsion sur un atome est alors proportionnelle à sa distance R au centre et que, en conséquence, la vitesse radiale d'un atome en R est proportionnelle à R . On suppose que la densité est maintenue constante par la création continue de matière dans l'espace.

(d) Montrer que la vitesse v vaut R/T , où T est le temps nécessaire pour que la distance radiale R d'un atome donné augmente d'un facteur e . Ce temps T peut être considéré comme l'âge de l'Univers.

(c) Dans l'expérience de la goutte d'huile de Millikan, une gouttelette d'huile électriquement chargée est suspendue dans le champ électrique entre deux électrodes planes horizontales. On observe que la charge portée par la gouttelette change avec des incréments entiers à une précision de 10^{-5} .

Montrer que l'expérience de la goutte d'huile de Millikan nous porte à croire que y est inférieur à 10^{-16} .

3.23 Le champ E moyen sur un volume sphérique est égal à la valeur de E au centre

On sait que la force exercée par une distribution de charge sphérique uniforme sur une charge extérieure est la même que si la charge sphérique était concentrée en son centre.

(a) Utiliser ce fait pour montrer que le champ d'une charge ponctuelle est tel que sa moyenne volumique sur une sphère est égale à sa valeur au centre.

(b) Montrer que la même égalité s'applique à un champ électrostatique quelconque dans une région sans charge.

Chapitre 4

Champs électriques : équations de Poisson et de Laplace. Circuits électriques. Conduction

Nous en venons maintenant à l'équation de Poisson, qui relie la densité volumique de charge locale ρ au taux de variation spatiale du potentiel V . C'est une relation fondamentale qui dérive directement du théorème de Gauss. L'équation de Laplace correspond à celle de Poisson, avec ρ nulle. Les deux équations servent à calculer des champs électriques.

La conservation de la charge est un fait expérimental. Quelles que soient les circonstances, la charge électrique nette portée par un système fermé est constante. Nous exprimons cette loi sous une forme mathématique simple, l'appliquons quelques parties plus loin, et nous y reviendrons à plusieurs occasions.

La majeure partie de ce chapitre porte sur les conducteurs. Les conducteurs électriques ordinaires contiennent des électrons de conduction qui dérivent dans la direction opposée au champ électrique appliqué $\mathbf{E}$. Nous trouverons, entre autres, que cette vitesse de dérive est étonnamment basse et que la densité volumique de charge totale est normalement nulle.

4.1 LES ÉQUATIONS DE POISSON ET DE LAPLACE

Remplaçons $\mathbf{E}$ par $-\text{grad } V$ dans l'Éq. 3.50. Alors

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

C'est l'équation de Poisson. Elle relie la densité volumique de charge ρ en un point donné aux dérivées secondes spatiales de V au voisinage de ce point.

Dans une région où la densité de charge est nulle, on a

$$\Delta V = 0 \quad (4.2)$$

qui est l'équation de Laplace.

Le problème général consistant à trouver V dans le champ d'une distribution de charge donnée revient à trouver une solution, soit à l'équation de Laplace soit à l'équation de Poisson, qui satisfasse les conditions aux limites données. Les chapitres 9 et 10 décrivent des méthodes de résolution de ces deux équations.

Exemple : Le champ d'une charge sphérique uniforme

Considérons à nouveau une charge sphérique de densité volumique uniforme ρ et de rayon R , comme sur la Fig. 3.8.

À l'extérieur de la sphère, $\rho = 0$ et

$$\Delta V_{\text{ext}} = 0 \quad (4.3)$$

Par ailleurs, par symétrie, V_{ext} est indépendant de θ et de ϕ . Par conséquent, d'après la partie 1.10,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} \right) = 0, \quad r^2 \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} = A, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} = \frac{A}{r^2}, \quad E_{\text{ext}} = \frac{A}{r^2} \quad (4.5)$$

où A est une constante d'intégration. Ce résultat est en accord avec l'Éq. 3.52 avec $A = -Q/(4\pi\epsilon_0)$.

À l'intérieur de la sphère,

$$\Delta V_{\text{int}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial r} \right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_0}, \quad (4.8)$$

$$r^2 \frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial r} = -\rho \frac{r^3}{3\epsilon_0} + B, \quad (4.9)$$

$$E_{\text{int}} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{B}{r^2} \quad (4.10)$$

où B est une autre constante d'intégration.

Il est évident intuitivement que E_{int} ne peut pas devenir infini en $r = 0$: donc B est nul et

$$E_{\text{int}} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (4.11)$$

comme dans le premier exemple de la partie 3.6.

Exemple : Le générateur de puissance thermo-ionique et la diode thermo-ionique

La révolution industrielle fut un phénomène social complexe, en grande partie déclenché par l'invention au XVIII^e siècle de la machine à vapeur, qui pouvait convertir la chaleur en travail mécanique. L'équivalent moderne de la machine à vapeur est évidemment le moteur à combustion interne.

Mais comment peut-on convertir la chaleur, pas en travail mécanique, mais en *électricité* ? On peut le faire avec un moteur à essence ou un réacteur nucléaire qui actionne un générateur électrique. On peut aussi utiliser un générateur magnétohydrodynamique comme dans la partie 17.1, ou l'effet Peltier. Voilà une autre méthode.

Les *générateurs de puissance thermo-ioniques* convertissent la chaleur en électricité sans aucune pièce mobile, sauf des électrons libres. Ils sont utilisés dans l'espace avec des radio-isotopes comme sources de chaleur, et également comme turbines d'amont dans les centrales à vapeur pour améliorer l'efficacité totale.

Ces convertisseurs consistent en deux plaques, une cathode chaude et une anode froide, comme sur la Fig. 4.1. L'espace inter-électrodes peut être sous vide, mais habituellement il contient une vapeur de césium. Pourquoi du césium ? Pour deux raisons. Tout d'abord, le césium est adsorbé sur les plaques et réduit le travail de sortie ⁽¹⁾. Deuxièmement, la vapeur de césium s'ionise facilement et fournit des ions positifs lents qui aident à neutraliser la charge spatiale des électrons.

La cathode chaude émet des électrons qui traversent l'espace inter-électrodes, atteignent l'anode froide et reviennent à la cathode à travers une résistance de charge externe R .

Le courant à travers R s'écoule de la cathode vers l'anode, de telle sorte que l'« anode » est *négative* par rapport à la cathode. Ils n'y a que les électrons qui aient une énergie cinétique suffisante en quittant la cathode pour atteindre l'anode.

Comme l'analyse du générateur thermo-ionique est relativement complexe, nous discutons ici un appareil différent mais voisin, la *diode thermo-ionique*.

La cathode et l'anode sont planes et parallèles, et elles sont séparées par une distance s comme sur la Fig. 4.1, avec s petite par rapport à leurs dimensions transverses. La cathode est au potentiel nul. On suppose que les électrons ont une vitesse initiale nulle, et que le courant n'est pas limité par la température de la cathode mais peut être augmenté à volonté.

(1) L'énergie nécessaire pour extraire un électron de l'intérieur d'un métal jusqu'à un point juste à l'extérieur est $e\phi$, où e est la valeur absolue de la charge de l'électron et ϕ est le *travail de sortie* caractéristique du métal.

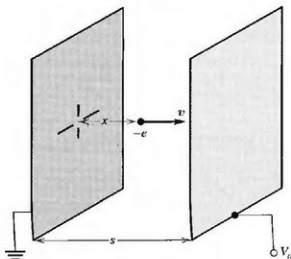


Figure 4.1 Schéma d'une diode thermo-ionique.

La cathode, à gauche, émet des électrons. Un électron de charge $-e$ dérive en direction de l'anode à une vitesse v . On a représenté des électrodes nettement séparées pour plus de clarté.

Comme V ne dépend que de x , par hypothèse, l'équation de Poisson 4.1 se réduit à

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.12)$$

où la densité volumique de charge électronique ρ est négative.

Donc d^2V/dx^2 est positive, mais nous n'avons pas encore déterminé ρ .

La densité de courant J est égale à la densité volumique de charge ρ multipliée par la vitesse des électrons : $J = \rho v$ (voir l'Éq. 4.44). Ainsi

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{\epsilon_0 v} \quad (4.13)$$

où J est la norme de la densité de courant.

La conservation de l'énergie implique

$$\frac{mv^2}{2} = eV \quad (4.14)$$

où m est la masse d'un électron et $-e$ est sa charge électrique :

$$e = +1,6 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

Alors

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{\epsilon_0 (2eV/m)^{1/2}} \quad (4.15)$$

Pour intégrer, on multiplie le membre de gauche par $2(dV/dx)dx$ et celui de droite par $2dV$. Il vient

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{4J(mV/2e)^{1/2}}{\epsilon_0} + A \quad (4.16)$$

où A est une constante d'intégration.

Nous déterminons maintenant la valeur de A . À la cathode, $V = 0$ et $A = (dV/dx)^2$. Mais dV/dx est nul sur la cathode, pour la raison suivante. Si on applique une tension à l'anode quand la cathode est froide, dV/dx est positive et égale à V_a/s . Si maintenant on chauffe la cathode, elle émet des électrons, il y a une charge volumique négative, et dV/dx au voisinage de la cathode décroît. Tant que dV/dx est positive sur la cathode, les électrons émis sont accélérés vers l'anode et ils ne peuvent pas retourner vers la cathode. Le courant est alors limité par l'émission thermo-ionique et pas par V_a . Cela est contraire à ce que nous avons supposé au début. Cependant, si dV/dx était négative, les électrons ne quitteraient jamais la cathode et la charge volumique serait nulle, ce qui est absurde. dV/dx ne peut donc être ni positive ni négative : elle est nulle, et A l'est aussi. (Voir néanmoins ci-dessous.) Alors

$$\frac{dV}{dx} = 2 \left(\frac{J}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} V^{1/4} \quad (4.17)$$

$$V^{3/4} = 1,5 \left(\frac{J}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} x + B \quad (4.18)$$

La constante d'intégration B est nulle car V est nulle en $x = 0$. Donc

$$V = \left(\frac{9J}{4\epsilon_0}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3} s^{4/3} \left(\frac{x}{s}\right)^{4/3} \quad (4.19)$$

Quand $x = s$, $V = V_a$. Par conséquent

$$V = V_a \left(\frac{x}{s}\right)^{4/3} \quad (4.20)$$

On a également, en oubliant le signe de E ,

$$E = \frac{4}{3} \frac{V_a}{s} \left(\frac{x}{s}\right)^{1/3} \quad (4.21)$$

$$J = \frac{4\epsilon_0(2e/m)^{1/2} V_a^{3/2}}{9s^2} = 2,335 \times 10^{-6} \frac{V_a^{3/2}}{s^2} \text{ A/m}^2 \quad (4.22)$$

$$\rho = \frac{4\epsilon_0 V_a}{9s^2 (x/s)^{2/3}} \quad (4.23)$$

L'équation 4.22 est connue sous le nom de *loi de Child-Langmuir*. Cette loi est valable seulement pour une diode à faces planes et parallèles, avec des effets de bord négligeables et pour des électrons émis à vitesse nulle. Pour une géométrie quelconque, cependant, J reste proportionnelle à $V_a^{3/2}$.

La figure 4.2 représente V , E et ρ en fonction de x/s .

Dans une diode thermo-ionique réelle, la vitesse d'émission des électrons est finie et il y a minimum de potentiel juste devant la cathode. Seuls les électrons ayant une vitesse initiale supérieure à une certaine valeur peuvent dépasser ce minimum.

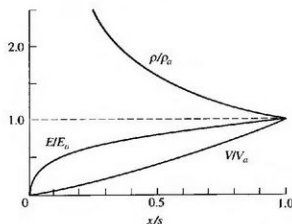


Figure 4.2 Densité volumique de charge ρ , champ électrique E et potentiel V en fonction de la distance x à la cathode d'une diode à faces planes et parallèles. L'indice a fait référence à la valeur de la variable sur l'anode.

4.1.1 Le théorème d'unicité pour les champs électrostatiques

Selon le *théorème d'unicité* pour les champs électrostatiques, *il ne peut pas exister plus d'un potentiel $V(x, y, z)$ qui satisfasse à la fois l'équation de Poisson et un ensemble donné de conditions aux limites*. Ce théorème est important car il nous laisse libres d'utiliser n'importe quelle méthode, même l'intuition, pour déterminer V . Si nous parvenons, d'une manière ou d'une autre, à trouver une fonction $V(x, y, z)$ qui satisfasse ces deux conditions, alors elle est la seule fonction potentiel possible.

Plusieurs démonstrations de ce théorème sont connues, chacune basée sur des approximations différentes. Nous supposons simplement que le théorème d'unicité est toujours valable.

4.2 CONSERVATION DE LA CHARGE ÉLECTRIQUE

Considérons une surface fermée d'aire A délimitant un volume V . La densité volumique de charge à l'intérieur est ρ . Des charges entrent et sortent et la densité de courant en un point donné sur la surface est $\mathbf{J}$ A/m².

Il est expérimentalement bien établi qu'il n'y a jamais de création nette de charge. Donc un flux net sortant quelconque dépeuple la charge intérieure Q : à un instant donné,

$$\int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\frac{dQ}{dt} \quad (4.24)$$

où le vecteur $d\mathbf{A}$ est orienté vers l'extérieur, d'après la convention de signe usuelle.

En appliquant le théorème de la divergence au membre de gauche, on trouve que

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (4.25)$$

Nous avons transféré la dérivée temporelle sous le signe d'intégrale, mais nous devons alors utiliser une dérivée partielle car ρ peut être également fonction de x, y, z .

Comme le volume V est quelconque, alors

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.26)$$

Les équations 4.24 et 4.26 sont, respectivement, les formes intégrale et locale de la loi de conservation de la charge électrique.

4.3 LA LOI D'OHM

Dans les bons conducteurs, comme le cuivre ou l'aluminium, chaque atome possède un ou deux électrons de conduction qui sont libres de se promener de ci de là dans le matériau.

Les semi-conducteurs peuvent contenir deux types de charges mobiles : les électrons de conduction et les trous positifs. Un *trou* est une lacune laissée par un électron libéré de la structure de liaison de valence dans le matériau. Un trou se comporte comme une particule libre de charge $+e$, et il se déplace à travers le semi-conducteur à peu près comme une bulle d'air dans l'eau.

Dans la plupart des bons conducteurs et semi-conducteurs, la densité de courant $\mathbf{J}$ est proportionnelle à $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.27)$$

où σ est la *conductivité électrique* du matériau exprimée en siemens/mètre, où un siemens⁽¹⁾ (symbole S) vaut 1 A/V. Cette relation fut énoncée pour la première fois par Ohm (1787-1854) et elle est connue sous le nom de *loi d'Ohm*. Nous trouverons une forme plus générale de cette loi dans la partie 17.5.

Le tableau 4.1 indique la conductivité de quelques matériaux courants.

Beaucoup de conducteurs ont une conductivité qui dépend de la température et peuvent servir comme détecteurs de température. Par exemple, les thermomètres à résistance de platine sont utilisés depuis de nombreuses années.

La loi d'Ohm s'applique rigoureusement aux métaux, mais n'est pas toujours valable pour la plupart des autres conducteurs. Par exemple, dans certains types de semi-conducteurs, J est proportionnelle à la puissance cinquième de E . En outre, certains conducteurs ne sont pas isotropes.

(1) D'après Ernst Werner von Siemens (1816-1892). Le mot s'écrit donc avec un s à la fin au singulier : un siemens. Le siemens était appelé autrefois le « mho ».

Si la loi d'Ohm s'applique, la *résistance* R entre deux électrodes fixées à un échantillon du matériau est

$$R = \frac{V}{I} \quad (4.28)$$

où V est la différence de potentiel entre les deux électrodes et I est le courant.

Tableau 4.1

Conducteur	Conductivité σ , S/m
Aluminium	$3,77 \times 10^7$
Laiton (65,8 Cu, 34,2 Zn)	$1,59 \times 10^7$
Chrome	$3,8 \times 10^7$
Cuivre	$5,80 \times 10^7$
Or	$4,50 \times 10^7$
Graphite	$7,1 \times 10^4$
Fer	$1,0 \times 10^7$
μ -métal (75 Ni, 2 Cr, 5 Cu, 18 Fe)	$0,16 \times 10^7$
Nickel	$1,3 \times 10^7$
Eau de mer	~ 5
Argent	$6,15 \times 10^7$
Étain	$0,870 \times 10^7$
Zinc	$1,86 \times 10^7$

Exemples : Différents cylindres

Pour un cylindre de section $\mathcal{A}$, de longueur L , de conductivité uniforme σ et avec des électrodes aux extrémités comme sur la Fig. 4.3(a),

$$I = \mathcal{A}J = \mathcal{A}\sigma E = \frac{\sigma \mathcal{A}V}{L} \quad (4.29)$$

$$R = \frac{L}{\sigma \mathcal{A}} \quad (4.30)$$

Le tube de la Fig. 4.3(b) a des rayons interne et externe R_1 et R_2 respectivement, une longueur L et une conductivité uniforme σ . Il y a des électrodes de cuivre sur les surfaces interne et externe du cylindre. La résistance d'un élément de cylindre d'épaisseur dr est $dr/(\sigma 2\pi rL)$. Alors

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sigma 2\pi rL} = \frac{1}{2\pi\sigma L} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (4.31)$$

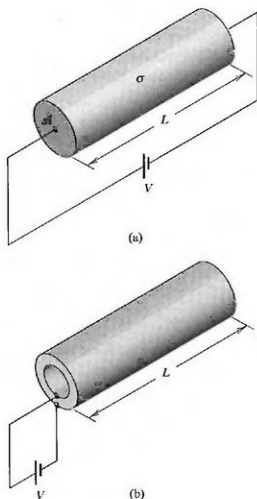


Figure 4.3 (a) Cylindre d'un matériau conducteur avec des électrodes à ses extrémités. (b) Tube d'un matériau conducteur avec des électrodes sur les surfaces interne et externe.

Exemple : Prospection géophysique par la méthode de la résistivité

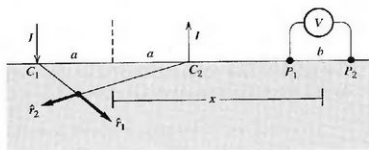


Figure 4.4 Localisation des anomalies de la conductivité dans le sol.

Ceci est une application de l'exemple donné dans la partie 3.1.

On peut localiser des anomalies de la résistivité dans le sol avec le dispositif indiqué en Fig. 4.4. Cette méthode est utilisée pour localiser des minerais conducteurs et des vestiges préhistoriques. Le courant qui circule entre les électrodes C_1 et C_2 crée

un champ électrique dans le sol, et on mesure la tension V entre les électrodes P_1 et P_2 qui sont déplacées sur le sol tout en restant à une distance fixe b l'une de l'autre. Avec $b \ll a$, V/b est égal à E à la position x . Les anomalies dans la conductivité du terrain se révèlent dans les courbes de E en fonction de x . Voyons comment cela se manifeste.

Supposons que la conductivité σ du sol soit uniforme. Le champ E , ici, est le champ dans le sol, à la surface. Posons donc $y = 0$. Alors, d'après la Fig. 4.4, en posant

$$d_1 = x + a, \quad d_2 = x - a \quad (4.32)$$

Posons aussi $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$ aux emplacements de C_1 et C_2 . Alors

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x+a)^3}(x+a) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x-a)^3}(x-a) \quad (4.33)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right] \quad (4.34)$$

Mais la charge Q est inconnue ! Il est facile de mesurer une tension ou un courant, mais les charges sont impossibles à mesurer, sauf dans des circonstances très particulières. Cherchons donc une relation entre la charge Q et le courant I . Imaginons une petite hémisphère de rayon $c \ll a$ centrée sur l'électrode C_1 . Sur cette surface,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \quad (4.35)$$

et

$$I = (2\pi c^2)\sigma E = 2\pi c^2\sigma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} = \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4.36)$$

si bien que

$$Q = \frac{2\epsilon_0 I}{\sigma} \quad (4.37)$$

En remplaçant dans l'Éq. 4.34,

$$E = \frac{V}{b} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right] \quad (4.38)$$

La valeur de la distance b choisie dépend de la taille de l'anomalie de conductivité attendue, et le courant I nécessaire dépend de la sensibilité du voltmètre disponible pour mesurer V .

4.4 * CIRCUITS ÉLECTRIQUES. LOIS DE KIRCHHOFF

Les deux lois de Kirchhoff sont les lois fondamentales de la théorie des circuits. Elles sont générales : elles s'appliquent même si les composants sont non-linéaires, actifs, dépendants du temps et présentent des hystérésis. (L'hystérésis est une propriété de certains composants dont les paramètres dépendent de leur histoire.) Kirchhoff (1824-1887) découvrit ces lois à l'âge de 21 ans.

Nous définissons d'abord des mots-clés, illustrés par le circuit de la figure 4.5. Les points A et B sont appelés *nœuds*, tandis que $ABCD$ et $AEFBA$ sont des *mailles*. Une *branche*, comme AB ou $BCDA$, connecte deux nœuds. Les courants I_a et I_b sont les courants de maille. Le courant de branche I_3 , circulant vers le bas en AB , est égal à $I_a - I_b$.

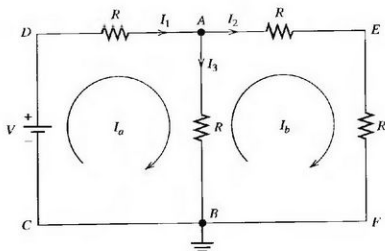


Figure 4.5 Circuit résistif à deux mailles alimenté par une source de tension continue V .

La loi de Kirchhoff pour les courants, encore appelée *loi des mailles*, est évidente : la somme algébrique des courants qui entrent dans un nœud est nulle.

Sur la figure, $I_1 = I_2 + I_3$. Si on utilise les courants de maille au lieu des courants de branche, cette loi est automatiquement satisfaite.

La loi de Kirchhoff pour les tensions, ou *loi des nœuds*, est aussi évidente : la somme des différences de potentiel autour d'une maille est nulle.

Ces lois servent à calculer les potentiels aux nœuds et les courants dans les branches.

Exemple :

Trouvons les courants de maille I_a , I_b et le potentiel V_A pour le circuit de la Fig.4.5.

Pour les deux mailles,

$$V - I_a R - (I_a - I_b)R = 0, \quad -(I_b - I_a)R - 2I_b R = 0 \quad (4.39)$$

Nous avons deux équations et deux inconnues, I_a et I_b .

En résolvant, on a

$$I_a = 0,6V/R, \quad I_b = 0,2V/R \quad (4.40)$$

$$V_A = (I_a - I_b)R = 0,4V \quad (4.41)$$

Cf. exercices 4.1 ; 4.2.

4.5 LA CONDUCTION

4.5.1 La conduction dans un champ électrique statique

Pour simplifier, nous supposons que les porteurs de charge sont des électrons de conduction.

Le mouvement détaillé d'un électron de conduction individuel est excessivement complexe car, de temps en temps, il entre en collision avec un atome et rebondit. Les atomes, bien entendu, oscillent autour de leur position d'équilibre, à cause de l'agitation thermique, et échantent de l'énergie avec les électrons de conduction.

En moyenne, chaque électron a une énergie cinétique de $\frac{3}{2}k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann et T est la température en kelvin. À température ambiante, la vitesse v_{th} associée à l'agitation thermique est donc donnée par

$$\frac{mv_{th}^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T = \frac{3}{2}(1,38 \times 10^{-23} \times 300) \approx 6 \times 10^{-21} \text{ J} \quad (4.42)$$

et

$$v_{th} \approx \left(\frac{12 \times 10^{-21}}{9,1 \times 10^{-31}} \right) \approx 10^5 \text{ m/s} \quad (4.43)$$

Sous l'action d'un champ électrique statique, le nuage d'électrons de conduction dérive à vitesse constante v_d telle que

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -Ne\mathbf{v}_d \quad (4.44)$$

où $\mathbf{v}_d$ est orientée dans la direction opposée à $\mathbf{J}$ et $\mathbf{E}$, et N est le nombre d'électrons de conduction par mètre cube.

La vitesse de dérive est faible. Dans le cuivre, $N = 8,1 \times 10^{28}$ électrons/m³. Si un courant de 1 A s'écoule à travers un fil de section 1 mm², $J = 10^6$ A/m² et v_d s'élève à environ 10^{-4} m/s, soit environ 400 millimètres par heure. La vitesse de dérive est donc plus petite que la vitesse due à l'agitation thermique de neuf ordres de grandeur !

Dans l'Éq. 4.44, v_d est petite, mais Ne est très grand. Dans le cuivre,

$$Ne = 8,1 \times 10^{28} \times 1,6 \times 10^{-19} \approx 10^{10} \text{ C/m}^3 \quad (4.45)$$

La faiblesse de la vitesse de dérive des électrons de conduction est la source de nombreux paradoxes. Par exemple, une antenne de transmission radio fait environ 75 m de haut et fonctionne à environ 1 MHz. Comment les électrons de conduction peuvent-ils aller d'un bout à l'autre en une microseconde ? La réponse est qu'ils ne le font pas : ils oscillent en avant et en arrière sur une distance de l'ordre d'un diamètre atomique, et cela suffit pour engendrer le courant nécessaire.

Ou encore, avec une vitesse de dérive si faible, comment peut-on allumer la lumière, disons à un kilomètre de distance, instantanément ? L'explication est qu'une onde se propage dans l'air, juste à l'extérieur du fil de cuivre, à une vitesse proche de celle de la lumière : la paire de fils se comporte comme un guide d'onde. Il y a une composante longitudinale de $\mathbf{E}$, à la fois dans l'air et dans le cuivre, qui pousse les électrons de conduction d'un côté ou de l'autre. Le nuage d'électrons de conduction dérive très

lentement mais il suffit de quelques microsecondes pour qu'il commence à se déplacer à l'autre bout, à une distance d'un kilomètre. Si la tension appliquée est continue, l'onde s'amortit très vite et il reste à l'intérieur du fil un champ électrique constant égal à $\mathbf{J}/\sigma$. Si la tension appliquée a une fréquence de, disons, 50 Hz, l'onde subsiste alors jusqu'à ce qu'on coupe la tension.

Le libre parcours moyen d'un électron de conduction entre les collisions est court : l'intervalle de temps entre les collisions est de l'ordre de 10^{-13} s tandis que la vitesse thermique vaut environ 10^5 m/s, comme nous l'avons vu plus haut, de sorte que le libre parcours moyen est de l'ordre de 10^{-8} m, soit seulement une centaine de diamètres atomiques. Les électrons de conduction sont donc comme liés au réseau cristallin. Ce fait est important, car les forces magnétiques exercées sur les électrons de conduction, comme dans un moteur électrique par exemple, sont transférées au matériau.

4.5.2 La mobilité $\mathcal{M}$ des électrons de conduction

La mobilité des électrons de conduction

$$\mathcal{M} = \left| \frac{v_d}{E} \right| = \frac{\sigma}{Ne} \quad (4.46)$$

est, par définition, une quantité positive⁽¹⁾. Nous avons utilisé l'Éq. 4.44. La mobilité est indépendante de E lorsque la loi d'Ohm est valable. Donc

$$\sigma = Ne\mathcal{M} \quad (4.47)$$

où, comme d'habitude, nous avons noté e la *valeur absolue* de la charge électronique.

Si le champ électrique moteur est constant, alors la vitesse de dérive est constante. Cela signifie que la moyenne temporelle de la force nette sur un électron de conduction est nulle, ou que la force moyenne de freinage due aux collisions compense juste la force $-eE$ exercée par le champ.

Quelle est la norme de cette force de freinage ? Elle vaut

$$-(-eE) = eE = -\frac{ev_d}{\mathcal{M}} = -\frac{e}{\mathcal{M}}v_d \quad (4.48)$$

d'après la définition de la mobilité $\mathcal{M}$. La force de freinage et v_d sont orientées en directions opposées.

Cette situation est similaire à celle d'un corps qui tombe dans l'eau ; après un certain temps, la force de viscosité compense exactement la force gravitationnelle, la force totale est nulle et la vitesse est constante.

Les grandeurs N , $\mathcal{M}$ et σ pour un bon conducteur (bc) et pour un semi-conducteur (sc) sont reliées de la façon suivante :

$$N_{bc} \gg N_{sc}, \quad \sigma_{bc} \gg \sigma_{sc}, \quad \mathcal{M}_{bc} \ll \mathcal{M}_{sc} \quad (4.49)$$

(1) Certains auteurs assignent à la mobilité le signe du porteur de charge.

4.5.3 La conduction dans un champ électrique alternatif

Si on néglige l'agitation thermique, deux forces agissent sur un électron de conduction : la force motrice eE et la force de freinage de l'Éq. 4.48.

Dans un champ électrique alternatif, ces deux forces ne sont pas égales et l'équation du mouvement est

$$m^* \frac{dv_d}{dt} = -eE_m \exp j\omega t - \frac{e}{\mathcal{M}} v_d \quad (4.50)$$

où m^* est la *masse effective*. Cette grandeur prend en compte les collisions. De manière générale, m^* est plus petite que la masse d'un électron isolé.

Dans le silicium $m^* = 0,97m$, mais dans l'arsénure de gallium (GaAs) la masse effective vaut seulement $0,07m$. Les vitesses de dérive électroniques dans les *dispositifs de physique des solides* sont de l'ordre de 10^5 m/s dans le silicium et environ 4 fois plus dans le GaAs.

Les vitesses de *dérive* des électrons, en physique des solides, sont donc environ *neuf* ordres de grandeur plus grandes que dans le cuivre, soit presque égales aux vitesses *thermiques* à température ambiante.

En remplaçant la dérivée temporelle par $j\omega$ et en simplifiant,

$$v_d = -\frac{\mathcal{M}}{1 + j\omega m^* \mathcal{M}/e} E_m \exp j\omega t \quad (4.51)$$

Comme $J = \sigma E = -Ne v_d$,

$$\sigma = \frac{Ne\mathcal{M}}{1 + j\omega m^* \mathcal{M}/e} \quad (4.52)$$

La conductivité est un nombre complexe. Cela signifie que le courant alternatif n'est pas en phase avec la tension alternative appliquée au dispositif.

Si $\omega = 0$, on retrouve l'Éq. 4.47. La relation ci-dessus n'est *pas* valable pour des fréquences de l'ordre de 1 GHz ou plus grandes, où les phénomènes atomiques deviennent prédominants.

Pour le cuivre à température ambiante,

$$\frac{\omega m^* \mathcal{M}}{e} = \frac{\omega m \sigma}{Ne^2} \quad (4.53)$$

$$= \frac{2\pi f \times 9,1 \times 10^{-31} \times 5,8 \times 10^7}{8,5 \times 10^{28} \times (1,6 \times 10^{-19})^2} \quad (4.54)$$

$$= 1,5 \times 10^{-13} f \quad (4.55)$$

Le terme imaginaire dans l'Éq. 4.52 est négligeable pour $f \ll 7 \times 10^{12}$ Hz ; jusqu'à environ 1 GHz le nuage d'électrons de conduction se déplace en phase avec E , et $\sigma = Ne\mathcal{M}$.

En diminuant la température on augmente le libre parcours moyen des porteurs, ce qui augmente la mobilité $\mathcal{M}$. Aux très basses températures la conductivité des métaux purs est imaginaire :

$$\sigma = -j \frac{Ne^2}{m^* \omega} \quad (4.56)$$

4.5.4 La densité volumique de charge ρ dans un conducteur

- 1) Soit un conducteur homogène en régime stationnaire. Alors $\partial\rho/\partial t = 0$ et, d'après la partie 4.2, $\text{div } \mathbf{J} = 0$. Si $\mathbf{J}$ est la densité de courant de conduction dans un conducteur homogène qui satisfait la loi d'Ohm $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, alors

$$\text{div } \mathbf{J} = \text{div}(\sigma\mathbf{E}) = \sigma \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (4.57)$$

Mais la divergence de $\mathbf{E}$ est proportionnelle à la densité volumique de charge ρ , d'après la partie 3.6. Donc, dans des conducteurs homogènes (où σ est indépendante des coordonnées) en régime stationnaire, ρ est nulle.

En règle générale, la densité *surfactive* de charge sur un corps conducteur qui porte du courant n'est pas nulle.

- 2) Supposons maintenant qu'on injecte une charge dans un morceau de cuivre en le bombardant d'électrons. Qu'arrive-t-il à la densité de charge ? Dans ce cas, d'après la partie 4.2,

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (4.58)$$

Mais, d'après la partie 3.6,

$$\text{div } \mathbf{J} = \sigma \text{div } \mathbf{E} = \frac{\sigma\rho}{\epsilon_r\epsilon_0} \quad (4.59)$$

où ϵ_r est la permittivité relative du matériau (Partie 7.9). Donc

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\sigma\rho}{\epsilon_r\epsilon_0}, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{\epsilon_r\epsilon_0}\right) \quad (4.60)$$

et ρ décroît exponentiellement avec le temps.

La permittivité relative ϵ_r d'un bon conducteur n'est pas mesurable car la conduction éclipse complètement la polarisation (Partie 7.2). On peut estimer que ϵ_r est de l'ordre de 3, comme dans les diélectriques communs.

L'inverse du coefficient de t dans l'exponentielle ci-dessus est le *temps de relaxation*.

Nous avons négligé le fait que σ dépend de la fréquence et est donc elle-même fonction du temps de relaxation. Les temps de relaxation dans les bons conducteurs sont, en fait, brefs ; en pratique ρ peut être considérée comme nulle. Par exemple, le temps de relaxation pour le cuivre à température ambiante vaut environ 4×10^{-14} s au lieu de $\approx 10^{-19}$ s selon le calcul ci-dessus.

- 3) Dans un conducteur homogène transportant un courant alternatif, ρ est nulle car l'Éq. 4.57 s'applique.
- 4) Dans un conducteur inhomogène portant un courant, ρ n'est pas nulle. Par exemple, en régime stationnaire,

$$\text{div } \mathbf{J} = \text{div}(\sigma\mathbf{E}) = (\text{grad } \sigma) \cdot \mathbf{E} + \sigma \text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (4.61)$$

et

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r\epsilon_0} = -\frac{(\text{grad } \sigma) \cdot \mathbf{E}}{\sigma} \quad (4.62)$$

Nous avons supposé que ϵ_r est uniforme.

- 5) Si le conducteur se déplace dans un champ magnétique, alors $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ ne s'applique pas et une densité volumique de charge peut exister. Voir les parties 17.5 et 17.6.

4.5.5 L'effet Joule

En l'absence de champ électrique, le nuage d'électrons de conduction reste en équilibre thermique avec le réseau cristallin du conducteur hôte. Sous l'effet d'un champ électrique, les électrons acquièrent de l'énergie cinétique entre les collisions et partagent cette énergie supplémentaire avec le réseau. Par conséquent, le conducteur s'échauffe. C'est l'*effet Joule*.

Quelle est la puissance acquise par les électrons de conduction ? Considérons un cube de conducteur d'arête a . Appliquons une tension V entre deux faces opposées. Le courant est I . Alors la puissance gagnée est VI , et la puissance dissipée sous forme de chaleur par mètre cube est

$$P' = \frac{VI}{a^3} = \left(\frac{V}{a}\right) \left(\frac{I}{a^2}\right) = EJ \quad (4.63)$$

$$= \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma} \quad \text{W/m}^3 \quad (4.64)$$

Si E et J sont des fonctions sinusoïdales du temps,

$$P'_{\text{moy}} = E_{\text{eff}} J_{\text{eff}} = \sigma E_{\text{eff}}^2 = \frac{J_{\text{eff}}^2}{\sigma} \quad (4.65)$$

4.6 CONDUCTEURS ISOLÉS DANS DES CHAMPS STATIQUES

Si on charge un conducteur homogène isolé, les électrons de conduction se déplacent jusqu'à ce qu'ils aient atteint leur position d'équilibre et ensuite, à l'intérieur du conducteur, $\mathbf{E}$ est nul.

Il s'ensuit que (1) tous les points à l'intérieur du conducteur sont au même potentiel ; (2) la densité volumique de charge est nulle, d'après l'Éq. 4.57 ; (3) toute charge statique nette est située à la surface du conducteur ; (4) $\mathbf{E}$ est normal à la surface du conducteur car sinon les charges circuleraient sur la surface ; (5) juste au-dessus de la surface, $E = \sigma_{\text{ch}}/\epsilon_0$ où σ_{ch} est la densité surfacique de charge, d'après le théorème de Gauss.

Notons ce paradoxe : grâce au théorème de Gauss, on peut exprimer $\mathbf{E}$ à la surface d'un conducteur uniquement en termes de la densité surfacique de charge *locale*, bien que $\mathbf{E}$ dépende des valeurs et des positions de *toutes* les charges, qu'elles soient situées sur le conducteur ou ailleurs.

Et si le conducteur n'est pas homogène ? Par exemple, on pourrait avoir un fil de cuivre serti sur une embase plaquée or. Alors, à cause de l'agitation thermique, quelques électrons de conduction dérivent à travers l'interface et créent un *potentiel de contact*, en général d'une fraction de volt. La valeur et le signe du potentiel de contact dépendent de la nature des matériaux.

Exemple : Conducteur creux contenant un corps chargé

La figure 4.6 montre une section d'un conducteur creux avec une charge électrique nette Q dans la cavité. La surface de Gauss située dans le conducteur en champ $\mathbf{E}$ nul contient une charge nette nulle, d'après le théorème de Gauss. Donc la charge surfacique sur la surface *interne* du conducteur est $-Q$.

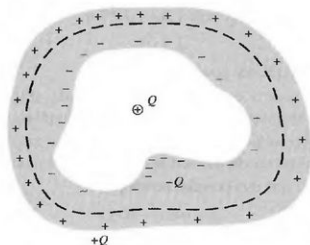


Figure 4.6 Section d'un conducteur creux contenant un corps qui porte une charge nette Q . La ligne pointillée est la section d'une surface de Gauss qui est située dans le matériau conducteur, où $E = 0$.

Si le conducteur porte une charge nette nulle, la charge totale sur la surface *externe* vaut alors Q .

La densité surfacique de charge en un point donné sur la surface *extérieure* du conducteur est indépendante de la distribution de Q dans la cavité. Elle est la même que si le conducteur était plein et portait une charge nette Q .

Inversement, le champ dans la cavité est indépendant du champ à l'extérieur du conducteur. Le conducteur agit donc comme un *écran électrostatique*.

Cf. exercices 4.3 ; 4.4 ; 4.5 ; 4.6 ; 4.7 ; 4.8 ; 4.9 ; 4.10 ; 4.11 ; 4.12 ; 4.13 ; 4.14 ; 4.15 ; 4.16.

4.7 RÉSUMÉ

L'équation de Poisson dérive de la forme locale du théorème de Gauss et de la relation $\mathbf{E} = -\text{grad } V$:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

Avec une densité volumique de charge ρ nulle, on obtient l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 \quad (4.2)$$

La loi de conservation de la charge électrique stipule que, quelles que soient les circonstances, la charge électrique nette d'un système fermé est une constante. Mathématiquement,

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.26)$$

où $\mathbf{J}$ et ρ sont respectivement la densité de courant et la densité de charge.

La plupart des conducteurs obéissent à la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.27)$$

où σ est la conductivité exprimée en siemens par mètre.

La loi de Kirchhoff pour le courant, ou loi des nœuds, affirme que la somme des courants qui entrent dans un nœud, dans un circuit électrique, est égale à zéro.

La loi de Kirchhoff pour la tension, ou loi des mailles, stipule que la somme des différences de potentiel sur un chemin fermé dans un circuit électrique est égale à zéro.

Dans un champ électrique indépendant du temps ,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -Ne\mathbf{v}_d \quad (4.44)$$

où N est le nombre de porteurs de charge par mètre cube, $-e$ est la charge d'un porteur et $\mathbf{v}_d$ est leur vitesse de dérive. Leur mobilité est définie par l'équation

$$\mathcal{M} = \frac{|\mathbf{v}_d|}{E} = \frac{\sigma}{Ne} \quad (4.46)$$

et

$$\sigma = Ne\mathcal{M} \quad (4.47)$$

Dans un champ électrique alternatif la conductivité σ est complexe :

$$\sigma = \frac{Ne\mathcal{M}}{1 + j\omega m^* \mathcal{M}/e} \quad (4.52)$$

où m^* est la masse effective du porteur de charge.

Si la densité de courant est J et le champ électrique E , alors la moyenne temporelle de la puissance dissipée par mètre cube sous forme de chaleur est

$$P'_{\text{moy}} = E_{\text{eff}} J_{\text{eff}} = \sigma E_{\text{eff}}^2 = \frac{J_{\text{eff}}^2}{\sigma} \quad \text{W/m}^3 \quad (4.65)$$

C'est l'effet Joule.

En conditions statiques il n'existe de charge électrique nette qu'à la surface d'un conducteur, et $\mathbf{E}$ est nul à l'intérieur. Juste à l'extérieur, $\mathbf{E}$ est normal à la surface et sa valeur est $\sigma_{\text{ch}}/\epsilon_0$ où σ_{ch} est la densité surfacique de charge.

EXERCICES

4.1 Potentiomètre

La figure 4.7 montre un circuit potentiomètre. Montrer que, quand $I = 0$,

$$V_{\text{ext}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{int}}$$

Ceci est un type de circuit commun. Il sert à mesurer une tension, dans ce cas V_{ext} , sans débiter de courant. Dans les traceurs de courbes le courant I , après amplification, commande un moteur qui déplace simultanément le stylo et la prise intermédiaire du potentiomètre, dans la direction qui fait décroître I . Les résistances R_1 et R_2 agissent comme un diviseur de tension.

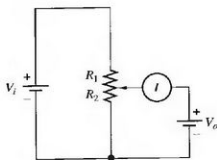


Figure 4.7

4.2 Cube

Douze résistances égales R forment les arêtes d'un cube comme dans la Fig. 4.8.

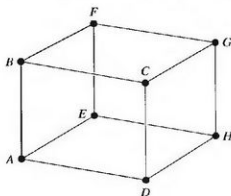


Figure 4.8

(a) Une pile est connectée entre A et G .

Peut-on trouver un ensemble de trois points qui soient au même potentiel ?

Peut-on en trouver un autre ?

(b) Imaginons maintenant qu'on ait une feuille de cuivre qui connecte le premier ensemble et une autre feuille de cuivre qui connecte le deuxième ensemble. Ceci n'affecte pas les courants dans les résistances.

Montrer maintenant que

$$R_{AG} = (5/6)R$$

4.3 Densité d'électrons de conduction dans le cuivre

L'objet de ce problème est de donner une idée de l'énormité de la densité de charge électrique dans la matière.

Prenons l'exemple des électrons de conduction dans le cuivre. Un atome de cuivre contient 29 électrons, dont un est un électron de conduction. Le cuivre a pour nombre de masse 64 et pour masse volumique $8,9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Supposons que nous ayons deux sphères de cuivre, chacune ayant un volume de 1 cm^3 . Les sphères sont vidées de leurs électrons de conduction et séparées par une distance de 100 mm.

(a) Calculer la force de répulsion. Montrer que cette force est égale à environ 0,5 % de la force d'attraction entre le Soleil et la Terre. Voir la liste des constantes physiques dans l'annexe E.

(b) Calculer maintenant l'énergie emmagasinée dans une sphère. Il s'agit, bien entendu, de l'énergie nécessaire pour extraire les électrons de conduction.

- (c) Combien coûterait cette énergie, à 10 centimes d'Euro par kilowatt-heure ?
 (d) Pour obtenir cette énergie, on construit une grande centrale nucléaire qui peut fournir un gigawatt de puissance électrique. Combien d'années faudra-t-il pour fournir cette énergie ?

4.4 Vitesse de dérive des électrons de conduction

Le cuivre a un nombre de masse de 64 et une masse volumique de $8,9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.

- (a) Calculer le nombre d'atomes par mètre cube et le diamètre approché d'un atome.
 (b) Calculer la charge λ portée par les électrons de conduction sur 1 m de fil de cuivre de 1 mm de diamètre. Il y a un électron de conduction par atome.
 (c) Calculer la vitesse de dérive des électrons de conduction en mètres par heure quand le fil transporte un courant de 1 A.

4.5 Conduction dans un milieu non uniforme

Deux électrodes de cuivre à faces planes et parallèles sont séparées par une plaque d'épaisseur s dont la conductivité σ varie linéairement de σ_0 , près de l'électrode positive, à $\sigma_0 + a$ près de l'électrode négative. On néglige les effets de bord. La densité de courant est J .

Trouver le champ électrique dans la plaque conductrice en fonction de la distance x à l'électrode positive.

4.6 Pertes Joule

Soit une résistance de 100 k Ω de puissance nominale 1/4 W. Quelle est la tension maximale qui peut être appliquée à ses bornes ?

4.7 Réfraction des lignes de E à l'interface entre milieux de conductivités différentes

Nous verrons au paragraphe 8.2.3 que la composante tangentielle de E est continue à l'interface entre deux milieux.

Montrer que, à la frontière entre deux milieux de conductivités σ_1 et σ_2 , une ligne de E , ou une ligne de J , est « réfractée » de telle façon que $\tan \theta_1 / \sigma_1 = \tan \theta_2 / \sigma_2$, où θ_1 et θ_2 sont les angles formés par une ligne de E avec la normale à l'interface.

4.8 Densité surfacique de charge à l'interface entre milieux de conductivités différentes

Un courant de densité J s'écoule dans la direction normale à l'interface entre deux milieux de conductivités σ_{co1} et σ_{co2} . Le courant s'écoule du milieu 1 au milieu 2.

Montrer que la densité surfacique de charge σ_{ch} vaut $\epsilon_r \epsilon_0 J (1/\sigma_{co2} - 1/\sigma_{co1})$. On supposera que ϵ_r a la même valeur des deux côtés. Si le courant n'est pas normal à l'interface, le J ci-dessus est la composante normale de la densité de courant.

4.9 Conduction dans un milieu inhomogène

Dans un milieu inhomogène, la conductivité σ est fonction des coordonnées.

Montrer que, en régime stationnaire, ou quand $E = -\text{grad } V$, et si σ ne s'annule nulle part,

$$\Delta V + \text{grad } V \cdot \text{grad } \tau = 0$$

où $\tau = \ln \sigma$.

4.10 Résistance d'une coquille sphérique

Soit une coquille sphérique de conductivité uniforme σ et de rayons interne et externe R_1 et R_2 , respectivement. Elle a des électrodes de cuivre plaquées sur les surfaces interne et externe. Montrer que la résistance vaut $(1/R_1 - 1/R_2)/(4\pi\sigma)$.

4.11 Film résistif

Un film carré de Nichrome, un alliage de nickel et de chrome, a des électrodes de cuivre déposées sur deux bords opposés.

Montrer que la résistance entre les électrodes ne dépend que de l'épaisseur du film et de sa conductivité, tant qu'il reste carré. Cette *résistance surfacique* s'exprime en *ohm par carré*.

4.12 Un théorème sur la résistance d'une plaque

Soit une plaque rectangulaire $ABCD$ d'épaisseur s et de conductivité σ . Avec des électrodes conductrices sur les bords AB et CD , sa résistance vaut R_1 . Avec les électrodes en BC et DA , elle vaut R_2 .

Montrer que $R_1 R_2 = 1/(\sigma^2 s^2)$.

Cette équation s'applique aussi à toute région délimitée par des lignes équipotentielles et des lignes de flux du courant.

4.13 E et J dans une pile

Une pile alimente une résistance R comme en Fig. 4.9. La pile agit comme une pompe, poussant les électrons de conduction vers l'électrode négative. Elle est cylindrique, de longueur s et de section A , avec des électrodes à chaque extrémité. Alors $|\text{grad } V| = V/s$ et, à l'intérieur de la pile, $J = \sigma(E_p - |\text{grad } V|)$, où E_p est le « champ de pompage ».

Trouver la tension de sortie en fonction du courant. On prendra $R = s/(\sigma A)$ comme résistance de sortie de la pile.

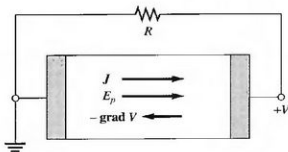


Figure 4.9

4.14 Mobilité et dérive d'un électron

Un modèle simple pour la dérive d'un électron de conduction est le suivant : l'électron décrit une trajectoire balistique pendant un certain temps, sous l'action du champ électrique ambiant, puis l'électron subit une collision. Sa vitesse juste après la collision n'est pas corrélée à sa vitesse avant la collision, et on la prendra égale à zéro.

L'électron commence alors une autre trajectoire balistique, et le processus se répète. Soient Δt le temps moyen entre deux collisions et m^* (paragraphe 4.5.3) la masse effective.

Trouver la mobilité en termes de Δt et m^* .

Voir le problème 4.4.

4.15 Conduction par les trous

Nous avons dérivé l'Éq. 4.50 de l'hypothèse que les porteurs de charge sont des électrons. Supposons que les porteurs soient des trous. La charge change alors de signe et les deux termes de droite sont positifs. Si c'est le cas, la fonction complémentaire, qu'on obtient en négligeant le terme forcé $eE_m \exp j\omega t$, est

$$v_d = v_{d0} \exp \left(\frac{e}{m^* \mathcal{M}} \right) t$$

Donc v_d augmente exponentiellement avec le temps, ce qui est absurde.

Montrer que, si les porteurs sont des trous, alors

$$m^* \frac{dv_d}{dt} = +eE_m \exp j\omega t - \frac{e}{\mathcal{M}} v_d$$

et que

$$v_d = + \frac{\mathcal{M}}{1 + j\omega m^* \mathcal{M}/e} E_m \exp j\omega t, \quad \sigma = \frac{Ne\mathcal{M}}{1 + j\omega m^* \mathcal{M}/e}$$

④ 4.16 Résistojet

La figure 4.10 indique le principe de fonctionnement d'un *résistojet* utilisé comme propulseur pour corriger la trajectoire ou l'orientation d'un satellite. L'hydrogène entre en P .

En supposant une conversion complète de l'énergie électrique en énergie cinétique, calculer la poussée pour une puissance fournie de 3 kW et un flux d'hydrogène de 0,6 g/s.

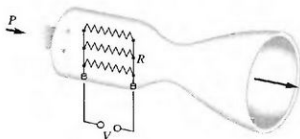


Figure 4.10

Chapitre 5

Champs électriques : les multipôles électriques

Les multipôles électriques sont des ensembles de charges ponctuelles possédant certaines symétries. Leur intérêt réside dans le fait que les objets réels chargés, comme les antennes et les noyaux atomiques, engendrent des champs électriques susceptibles d'être exprimés comme une somme de champs multipolaires.

À part le monopôle, qui correspond à une seule charge ponctuelle, le multipôle le plus utile est le dipôle, qui consiste en deux charges de même valeur absolue et de signes opposés, à une certaine distance. La plupart des molécules se comportent comme de petits dipôles. Beaucoup d'antennes rayonnent également comme des dipôles électriques oscillants.

5.1 LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE

Le *dipôle électrique* est un type de distribution de charge courant. Nous y reviendrons plus loin dans ce chapitre puis au chapitre 25.

Le dipôle électrique consiste en deux charges, l'une positive et l'autre négative, de même valeur absolue, séparées par une distance s . On détermine V et $\mathbf{E}$ en un point P situé à une distance $r \gg s$, comme sur la Fig. 5.1. En P ,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (5.1)$$

où, si $r \gg s$,

$$r_a = r + \frac{s}{2} \cos \theta, \quad \frac{r_a}{r} = 1 + \frac{s}{2r} \cos \theta \quad (5.2)$$

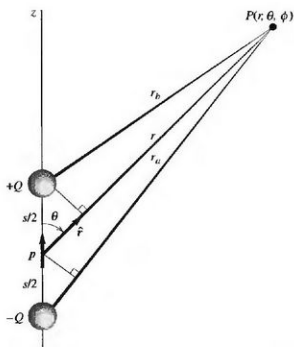


Figure 5.1 Deux charges $+Q$ et $-Q$ séparées par une distance s et formant un dipôle. Le moment dipolaire est $\mathbf{p}$. On calcule le potentiel en un point P en sommant les potentiels des deux charges.

Pour trouver l'inverse de ce rapport, rappelons-nous la série

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} x^3 + \dots \quad (5.3)$$

En posant $n = -1$, avec $x = s \cos \theta / (2r) \ll 1$, on peut ne garder que les deux premiers termes et

$$\frac{r}{r_a} \approx 1 - \frac{s}{2r} \cos \theta \quad (5.4)$$

De même, comme

$$\frac{r_b}{r} = 1 - \frac{s}{2r} \cos \theta \quad (5.5)$$

$$\frac{r}{r_b} \approx 1 + \frac{s}{2r} \cos \theta \quad (5.6)$$

et

$$V = \frac{Qs}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad (r^3 \gg s^3) \quad (5.7)$$

Notons que le potentiel dans le champ d'un dipôle décroît comme $1/r^2$, tandis que le potentiel d'une seule charge ponctuelle varie seulement comme $1/r$. Ceci est dû au fait que les charges d'un dipôle semblent proches pour un observateur à une certaine distance, de sorte que leurs champs se compensent de mieux en mieux quand la distance r augmente.

Le moment dipolaire $\mathbf{p} = Q\mathbf{s}$ est un vecteur orienté de la charge négative vers la charge positive. Donc

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5.8)$$

On peut maintenant trouver le champ électrique $\mathbf{E}$. En coordonnées sphériques,

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (5.9)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (5.10)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (5.11)$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (5.12)$$

Donc E pour un dipôle décroît comme le cube de la distance r .

La figure 5.2 représente les lignes de champ de $\mathbf{E}$ et les lignes équipotentielles pour un dipôle électrique. En faisant tourner les lignes équipotentielles autour de l'axe vertical on engendre des surfaces équipotentielles.

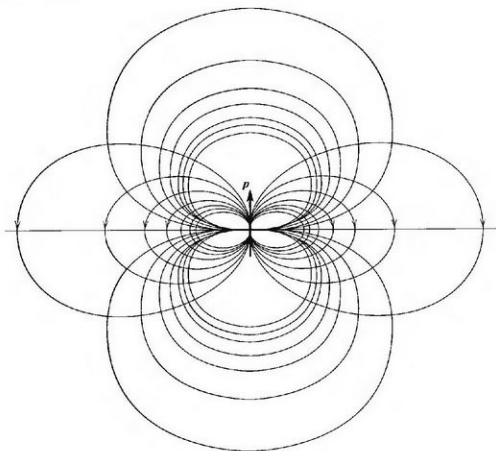


Figure 5.2 Lignes de $\mathbf{E}$, représentées avec des flèches, et lignes équipotentielles pour le dipôle électrique de la Fig. 5.1. Dans la région centrale, les lignes deviennent trop serrées pour être visibles.

Plus généralement, le moment dipolaire d'une distribution de charge vaut

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}' \rho dV' = Q \left(\int_{V'} \mathbf{r}' \rho dV' / \int_{V'} \rho dV' \right) = Q \mathbf{r}' \quad (5.13)$$

où Q est la charge totale nette dans le volume V' et $\mathbf{r}'$ définit la position du centre de charge, par analogie avec le centre de masse en mécanique.

Si $Q = 0$, alors $\mathbf{r}' \rightarrow \infty$ et $Q\mathbf{r}'$ est indéterminé. Cependant, l'intégrale de $\mathbf{r}' \rho dV'$ nous donne encore la valeur correcte de $\mathbf{p}$. Si $Q = 0$, le moment dipolaire est indépendant du choix de l'origine (Problème 5.1).

Si $Q \neq 0$, le moment dipolaire de la distribution est nul quand l'origine est au centre de charge, car alors $\mathbf{r}' = 0$.

Cf. exercices : 5.1 ; 5.2 ; 5.3 ; 5.4 ; 5.5.

5.2 * LE QUADRUPOLE ÉLECTRIQUE LINÉAIRE⁽¹⁾

Le *quadrupôle électrique linéaire* est un ensemble de trois charges, comme sur la Fig. 5.3(a). La séparation s est, ici aussi, petite devant la distance r au point P . En P ,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_a} - \frac{2Q}{r} + \frac{Q}{r_b} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} - 2 \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ici, on rencontre une difficulté : si on insère les Éqs. 5.4 et 5.6 après avoir remplacé $s/2$ par s , on trouve que $V = 0$. L'explication est que ces approximations, basées sur les Éqs. 5.2 et 5.5, ne sont pas assez fines pour être utilisées avec le quadrupôle. Voici une meilleure approximation.

Pour le triangle inférieur de la Fig. 5.3(a),

$$r_a^2 = r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta \quad (5.15)$$

Divisons les deux membres par r^2 , et prenons-en l'inverse :

$$\frac{r}{r_a} = \left(1 + \frac{s^2}{r^2} + \frac{2s}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \quad (5.16)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{s^2}{r^2} + \frac{2s}{r} \cos \theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{s^2}{r^2} + \frac{2s}{r} \cos \theta \right)^2 - \dots \quad (5.17)$$

En négligeant les termes d'ordre au moins $(s/r)^3$,

$$\frac{r}{r_a} = 1 - \frac{s}{r} \cos \theta + \frac{s^2}{r^2} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \quad (5.18)$$

(1) Les astérisques indiquent les parties qui peuvent être « sautées » sans perdre la cohérence d'ensemble. Cependant, les polynômes de Legendre du paragraphe 5.4.1 sont nécessaires pour la partie 10.1.

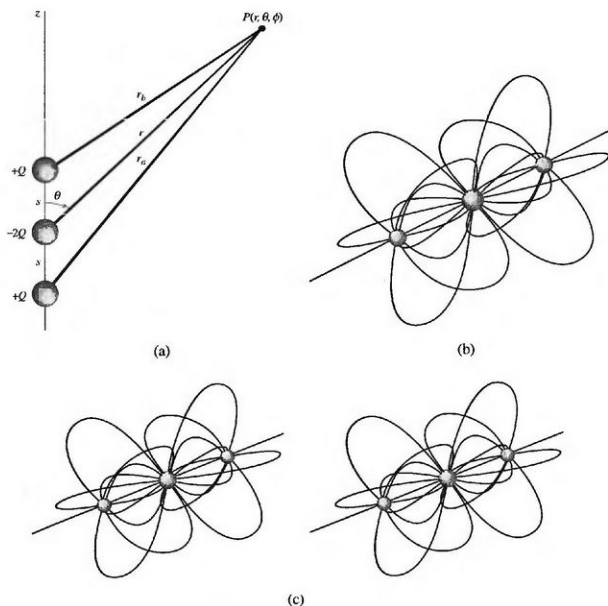


Figure 5.3 (a) Charges $+Q$, $-2Q$, $+Q$ formant un quadrupôle linéaire. La longueur du quadrupôle est $2s$. (b) Lignes de champ électrique. (c) Vue stéréo des lignes de champ. Voir la Fig. 3.2a.

Notons que nous prenons maintenant en compte des termes d'ordre $(s/r)^2$. Cette approximation est donc meilleure. En effet, c'est seulement le troisième terme de la série qui est significatif pour le quadrupôle.

De même,

$$\frac{r}{r_b} = 1 + \frac{s}{r} \cos \theta + \frac{s^2}{r^2} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \quad (5.19)$$

et

$$V = \frac{2Qs^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \quad (r^3 \gg s^3) \quad (5.20)$$

Le potentiel V d'un quadrupôle électrique linéaire varie comme $1/r^3$, tandis que E , calculé comme pour le dipôle, varie comme $1/r^4$. Les champs des trois charges s'annulent presque complètement pour $r \gg s$.

Cf. exercice 5.6.

5.3 * LES MULTIPÔLES ÉLECTRIQUES

On peut étendre le concept de dipôle et quadrupôle à un nombre plus grand de charges positives et négatives. De telles distributions de charge sont appelées *multipôles*. Une seule charge ponctuelle est un *monopôle*. Un *dipôle* est obtenu en déplaçant un monopôle d'une petite distance s_1 et en remplaçant le monopôle d'origine par un autre de même valeur absolue mais de signe opposé. De même, un *quadrupôle* est obtenu en déplaçant un dipôle d'une petite distance s_2 et en remplaçant le dipôle d'origine par un autre de même valeur absolue mais de signe opposé. Pour le quadrupôle linéaire, $s_2 = s_1$.

Le concept de multipôle peut être étendu indéfiniment. Par exemple, le quadrupôle peut être déplacé d'une petite distance s_3 et le quadrupôle d'origine être remplacé par un autre dans lequel le signe de toutes les charges a été changé. Cela donne un *octopôle*. Un 2^l -pôle nécessite l déplacements $s_1, s_2, \dots, s_l$.

Nous avons vu que le potentiel dipolaire varie comme $1/r^2$ et le potentiel quadrupolaire comme $1/r^3$. Pour un 2^l -pôle, V varie comme $1/r^{l+1}$ et E comme $1/r^{l+2}$.

Nous avons calculé le potentiel V dans le champ d'un dipôle et d'un quadrupôle de la façon suivante. Nous avons trouvé la somme des potentiels des charges individuelles, l'avons développée en série puis tronquée. Cette approche est directe et à l'avantage de montrer exactement quelles sont les approximations effectuées. Les problèmes 5.5 et 5.6 explorent une méthode différente qui est plus élégante mais qui ne révèle pas la nature exacte des approximations.

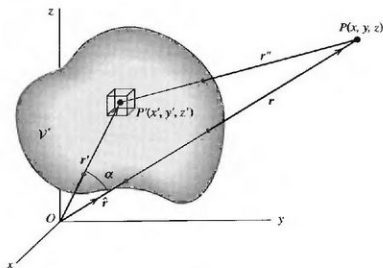


Figure 5.4 Distribution de charge arbitraire contenue dans un volume V' . Le potentiel en P est le même que si on avait, à l'origine, un monopôle, plus un dipôle, plus un quadrupôle, plus un octopôle, etc. Cependant, r doit être plus grande que la valeur maximale de r' .

5.4 * LE CHAMP ÉLECTRIQUE À L'EXTÉRIEUR D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGE, DÉVELOPPÉE EN MULTIPÔLES

Une distribution de charge de densité $\rho(x', y', z')$ occupe un volume $\mathcal{V}'$ et s'étend à une distance maximale $r'_{\max}$ d'une origine arbitraire O , comme en Fig. 5.4. On choisit O soit à l'intérieur du volume soit à son voisinage.

Nous allons voir que le potentiel V en un point P à l'extérieur de la distribution de charge tel que $r > r'_{\max}$ est le même que (1) le potentiel V_1 d'une charge ponctuelle, ou monopôle, égale à la charge nette de la distribution, plus (2) le potentiel V_2 d'un dipôle ponctuel de moment dipolaire égal à celui de la distribution de charge, plus (3) le potentiel V_3 d'un quadrupôle ponctuel de moment quadrupolaire égal à celui de la distribution de charge, et ainsi de suite, le monopôle, le dipôle, le quadrupôle, etc., étant tous placés en l'origine arbitraire.

De même, le $\mathbf{E}$ au point P est la somme des champs $\mathbf{E}$ des monopôle, dipôle, quadrupôle, etc. ci-dessus.

Si $Q = 0$, V_2 est alors indépendant du choix de l'origine. Plus généralement, V_l est indépendant du choix de l'origine si tous les moments multipolaires sont nuls jusqu'au 2^{l-1} -pôle.

Puisque le potentiel V d'un monopôle décroît comme $1/r$, celui d'un dipôle comme $1/r^2$, celui d'un quadrupôle comme $1/r^3$, etc., alors à grande distance, lorsque $r \gg r'_{\max}$, le champ d'une distribution de charge quelconque est simple. C'est celui d'une charge ponctuelle à l'origine et $V \approx V_1$. De plus près, $V \approx V_1 + V_2$. D'encore plus près, V_3 devient discernable, puis V_4 , etc., et le champ devient de plus en plus complexe.

5.4.1 * La valeur de V . Les polynômes de Legendre⁽¹⁾

Nous voulons trouver V en un point P tel que $r > r'_{\max}$. D'après la Fig. 5.4, il vaut

$$V = \int_{\mathcal{V}'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 r''} \quad (5.21)$$

où

$$r'' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad (5.22)$$

Le point $P(x, y, z)$ est fixé. r'' est donc une fonction de x', y', z' , et on peut développer $1/r''$ en série de Taylor autour de l'origine. Ce développement nous amènera à une méthode puissante pour l'analyse de champs asymétriques. Nous y reviendrons au chapitre 10.

Soit

$$w(u) = \frac{1}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad (5.23)$$

(1) Les polynômes de Legendre sont nécessaires pour la partie 10.1.

Le facteur u est sans dimension. Nous cherchons $w(1)$, qui est $1/r'$:

$$w(1) = \frac{1}{r'} = w(0) + \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)_{u=0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right)_{u=0} + \dots \quad (5.24)$$

où $w(0) = 1/r$. Pour calculer les dérivées du membre de droite, nous avons besoin de la dérivée partielle de $|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ par rapport à u :

$$\frac{\partial}{\partial u} |u\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \frac{\partial}{\partial u} [(ux' - x)^2 + (uy' - y)^2 + (uz' - z)^2]^{1/2} \quad (5.25)$$

$$= \frac{1}{2|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} (2ux'^2 - 2x'x + 2uy'^2 - 2y'y + 2uz'^2 - 2z'z) \quad (5.26)$$

$$= \frac{u\mathbf{r}'^2 - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{(u\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad (5.27)$$

Donc

$$\frac{\partial w}{\partial u} = -\frac{1}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} \frac{(u\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = -\frac{(u\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \quad (5.28)$$

et

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)_{u=0} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} = \frac{r' \cos \alpha}{r^2} \quad (5.29)$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ et α sont définis comme en Fig. 5.4. En outre,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{3[(u\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}']^2}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^5} - \frac{r'^2}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \quad (5.30)$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right)_{u=0} = \frac{3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} = \frac{r'^2 (3 \cos^2 \alpha - 1)}{r^3} \quad (5.31)$$

Tableau 5.1 Les polynômes de Legendre.

n	$P_n(\cos \alpha)$
0	1
1	$\cos \alpha$
2	$\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2}$
3	$\frac{5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{4}$
4	$\frac{35 \cos^4 \alpha - 30 \cos^2 \alpha + 3}{8}$
5	$\frac{63 \cos^5 \alpha - 70 \cos^3 \alpha + 15 \cos \alpha}{16}$

En général,

$$\left(\frac{\partial^n w}{\partial u^n} \right)_{u=0} = \frac{r^n}{r^{n+1}} n! P_n(\cos \alpha) \quad (5.32)$$

où

$$P_n(\cos \alpha) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \alpha)^n} (\cos^2 \alpha - 1)^n \quad (5.33)$$

est un *polynôme de Legendre*. Le tableau 5.1 donne les six premiers *polynômes de Legendre* et la figure 5.5 représente les quatre premiers en fonction de l'angle α . Pour tout α ,

$$|P_n(\cos \alpha)| \leq 1 \quad (5.34)$$

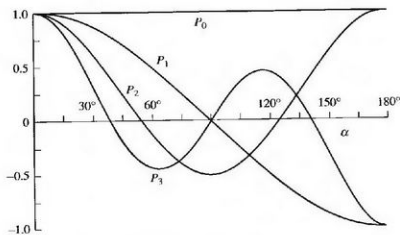


Figure 5.5 Les quatre premiers polynômes de Legendre $P_n(\cos \alpha)$.

Donc d'après l'Éq. 5.24

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{r' \cos \alpha}{r^2} + \frac{r'^2 (3 \cos^2 \alpha - 1)}{2r^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} r^n P_n(\cos \alpha) \quad (5.35)$$

Puisque $|P_n(\cos \alpha)| \leq 1$ comme ci-dessus, cette série converge pour $r'_{\max} < r$.

En substituant ceci dans l'Éq. 5.21, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V'} \rho dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{V'} r' \cos \alpha \rho dV' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{V'} r'^2 \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \rho dV' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^4} \int_{V'} r'^3 \frac{5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{2} \rho dV' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \int_{V'} r'^4 \frac{35 \cos^4 \alpha - 30 \cos^2 \alpha + 3}{8} \rho dV' + \dots \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + \dots \quad (5.37)$$

Examinons successivement les trois premiers termes de la série.

5.4.2 * Le terme monopolaire

Le premier terme est le V qu'on aurait en P si toute la charge était concentrée en l'origine arbitraire :

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.38)$$

où Q est la charge nette de la distribution. C'est le terme *monopolaire*. Il est nul si la charge nette est nulle. Sa valeur dépend de la position choisie pour l'origine.

5.4.3 * Le terme dipolaire

Le deuxième terme varie comme $1/r^2$, comme le potentiel électrique d'un dipôle. D'après l'Éq. 5.36,

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{V'} r' \cos \alpha \rho dV' = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \int_{V'} \mathbf{r}' \rho dV' \quad (5.39)$$

où l'intégrale de droite est le *moment dipolaire* de la distribution de charge :

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}' \rho dV' \quad (5.40)$$

Donc

$$V_2 = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5.41)$$

comme dans l'Éq. 5.8.

5.4.4 * Le terme quadrupolaire

Considérons maintenant le terme V_3 de l'Éq. 5.36. Il contient un facteur $1/r^3$, comme le V du quadrupôle linéaire de la partie 5.2. Si on calcule V_3 pour le quadrupôle linéaire avec les charges Q , $-2Q$ et Q en $z = s$, 0 et $-s$ respectivement, on trouve qu'il est égal au V de l'Éq. 5.20. Donc V_3 est le potentiel d'un petit quadrupôle en l'origine. Or,

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{V'} \frac{1}{2} r'^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) \rho dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{V'} \frac{1}{2} [3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2] \rho dV' \end{aligned} \quad (5.42)$$

Posons

$$\hat{\mathbf{r}} = l\hat{\mathbf{x}} + m\hat{\mathbf{y}} + n\hat{\mathbf{z}} \quad (5.43)$$

où l , m , n sont les *projections* de $\hat{\mathbf{r}}$ et où

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (5.44)$$

Développons et regroupons les termes. On obtient

$$\begin{aligned}
 V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} & \left(3mn \int_{V'} y' z' \rho dV' + 3nl \int_{V'} z' x' \rho dV' \right. \\
 & + 3lm \int_{V'} x' y' \rho dV' + \frac{3l^2 - 1}{2} \int_{V'} x'^2 \rho dV' \\
 & \left. + \frac{3m^2 - 1}{2} \int_{V'} y'^2 \rho dV' + \frac{3n^2 - 1}{2} \int_{V'} z'^2 \rho dV' \right) \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

Ces intégrales, comme l'intégrale de l'Éq. 5.40, ne dépendent que de la distribution de charge électrique dans V' , et pas des coordonnées x, y, z du point P où on évalue le champ. Elles correspondent aux neuf composantes du moment quadrupolaire de la distribution de charge :

$$p_{xx} = \int_{V'} x'^2 \rho dV' = \overline{Qx'^2} \quad (5.46)$$

$$p_{yy} = \int_{V'} y'^2 \rho dV' = \overline{Qy'^2} \quad (5.47)$$

$$p_{zz} = \int_{V'} z'^2 \rho dV' = \overline{Qz'^2} \quad (5.48)$$

$$p_{yz} = p_{zy} = \int_{V'} y' z' \rho dV' = \overline{Qy'z'} \quad (5.49)$$

$$p_{zx} = p_{xz} = \int_{V'} z' x' \rho dV' = \overline{Qz'x'} \quad (5.50)$$

$$p_{xy} = p_{yx} = \int_{V'} x' y' \rho dV' = \overline{Qx'y'} \quad (5.51)$$

Les barres indiquent, comme d'habitude, une valeur moyenne. Donc

$$\begin{aligned}
 V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} & \left(3mnp_{yz} + 3nlp_{zx} + 3lmp_{xy} \right. \\
 & \left. + \frac{3l^2 - 1}{2} p_{xx} + \frac{3m^2 - 1}{2} p_{yy} + \frac{3n^2 - 1}{2} p_{zz} \right) \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

Si la distribution de charge est symétrique autour de l'axe z ,

$$p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0, \quad p_{xx} = p_{yy} \quad (5.53)$$

Il est alors pratique de définir une seule quantité

$$Q = 2(p_{zz} - p_{xx}) \quad (5.54)$$

qui est aussi appelée le *moment quadrupolaire* de la distribution de charge.

Comme $l^2 + m^2 + n^2 = 1$,

$$V_3 = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 r^3} (3n^2 - 1) = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (5.55)$$

au point r, θ, ϕ en coordonnées sphériques.

On peut, bien sûr, déduire le champ électrique de la relation $\mathbf{E} = -\text{grad } V$.

Exemple : * Le moment quadrupolaire du deutéron

La distribution de charge dans un deutéron (le noyau d'un atome de deutérium, comprenant un proton et un neutron) a la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé. (En faisant tourner une ellipse autour de son *grand* axe on génère un ellipsoïde de révolution *allongé*, tandis qu'une rotation autour de son *petit* axe génère un ellipsoïde de révolution *aplati*.) Le deutéron est donc légèrement allongé le long d'un axe. Le « rayon » du deutéron vaut 1,963 fm, soit $1,963 \times 10^{-15}$ m, et son moment quadrupolaire vaut $+0,28590 \text{ fm}^2 \times e$. Voir l'Éq. 5.54 : le signe plus signifie que l'ellipsoïde est allongé ; un signe négatif signifierait qu'il est aplati.

Exemple : * Le champ d'un ensemble de six charges ponctuelles disposées symétriquement autour de l'origine

La figure 5.6 représente six charges. Un point P de l'espace est à la distance $r > a$ de l'origine. Le potentiel en P est donné par la série de l'Éq. 5.37. Calculons les trois premiers termes. D'après l'Éq. 5.38,

$$V_1 = \frac{12Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.56)$$

D'après les Éqs. 5.40 et 5.41,

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{r}'_i Q_i = 0 \quad \text{et} \quad V_2 = 0 \quad (5.57)$$

D'après les Éqs. 5.46 à 5.51,

$$p_{xx} = 2a^2 Q, \quad p_{yy} = 2a^2 Q, \quad p_{zz} = 8a^2 Q, \quad (5.58)$$

$$p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0 \quad (5.59)$$

Finalement, d'après l'Éq. 5.52,

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [(3l^2 - 1)a^2 Q + (3m^2 - 1)a^2 Q + (3n^2 - 1)4a^2 Q] \quad (5.60)$$

$$= \frac{a^2 Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3l^2 + 3m^2 + 12n^2 - 6) \quad (5.61)$$

$$= \frac{a^2 Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (9n^2 - 3) = \frac{3a^2 Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3n^2 - 1) \quad (5.62)$$

et

$$Q = 12a^2 Q \quad (5.63)$$

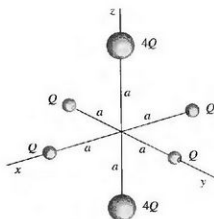


Figure 5.6 Six charges disposées symétriquement autour de l'origine.

On trouve aussi que $V_4 = 0$ et que

$$V_5 = \frac{Qa^4}{16\pi\epsilon_0 r^5} [35(l^4 + m^4 + 4n^4) - 90n^2 - 12] \quad (5.64)$$

En P ,

$$V = V_1 + V_3 + V_5 + \dots \quad (5.65)$$

$$= \frac{6Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ 2 + \frac{3n^2 - 1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{24} [35(l^4 + m^4 + 4n^4) - 90n^2 - 12] \frac{a^4}{r^4} + \dots \right\} \quad (5.66)$$

Comme les projections l , m , n sont chacune au plus de l'ordre de un, avec $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, le coefficient de a^2/r^2 est aussi de l'ordre de un et pour $r \geq 10a$ la série se réduit à son premier terme avec une erreur d'au plus 1 %. Les termes V_3 , V_5 , ... deviennent progressivement plus importants lorsque r/a décroît.

La figure 5.7 montre une surface équipotentielle pour cette distribution de charge.

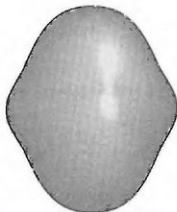


Figure 5.7 Surface équipotentielle pour la distribution de charge de la Fig. 5.6. La valeur de V est le potentiel au point $(0; 0; 1,8a)$. Plus loin des charges, les surfaces équipotentielles sont presque sphériques.

Cf. exercices : 5.7; 5.8; 5.9; 5.10; 5.11; 5.12.

5.5 * RÉSUMÉ

Le *dipôle électrique* consiste en un couple de charges de même valeur absolue Q mais de signes opposés, séparées par une distance s . Son *moment dipolaire* $\mathbf{p}$ vaut Qs , vecteur orienté de la charge négative vers la charge positive.

À une distance r du dipôle,

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (r^3 \gg s^3) \quad (5.8)$$

Le *quadrupôle électrique linéaire* consiste en quatre charges $Q, -Q, -Q, Q$ comme en Fig. 5.3. Alors

$$V = \frac{2Qs^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2}, \quad (r^3 \gg s^3) \quad (5.20)$$

où $\cos\theta = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$.

À une certaine distance à l'extérieur d'une distribution de charge, le potentiel peut être écrit en série

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + \dots \quad (5.37)$$

Ici V_1 est le potentiel en P dû à une charge unique, appelée *monopôle*, égale à la charge nette de la distribution et située à la position de l'origine arbitraire. De même, V_2 est le potentiel en P dû à un *dipôle* dont le moment dipolaire est celui de la distribution et aussi situé à l'origine, etc. :

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.38)$$

$$V_2 = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5.41)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3mnp_{yz} + 3nlp_{zx} + 3lmp_{xy} + \frac{3l^2 - 1}{2} p_{xx} + \frac{3m^2 - 1}{2} p_{yy} + \frac{3n^2 - 1}{2} p_{zz} \right) \quad (5.52)$$

où l, m, n sont les projections du vecteur $\mathbf{r}$ qui définit la position de P et où

$$p_{xx} = Q\overline{x'^2}, \quad p_{yy} = Q\overline{y'^2}, \quad p_{zz} = Q\overline{z'^2} \quad (5.46 \text{ à } 5.48)$$

$$p_{yz} = p_{zy} = Q\overline{y'z'}, \quad p_{zx} = p_{xz} = Q\overline{z'x'}, \quad p_{xy} = p_{yx} = Q\overline{x'y'} \quad (5.49 \text{ à } 5.51)$$

EXERCICES

5.1 Moment dipolaire d'une distribution de charge dont la charge nette est nulle

Montrer que, si sa charge nette Q est nulle, alors le moment dipolaire d'une distribution de charge est indépendant du choix de l'origine.

5.2 Moment dipolaire de charges linéiques parallèles

Deux charges linéiques $+Q$ et $-Q$ s'étendent respectivement de $(-a, 0, c)$ à $(a, 0, c)$ et de $(-a, 0, -c)$ à $(a, 0, -c)$. Calculer leur moment dipolaire.

5.3 Moment dipolaire d'une charge surfacique sphérique

Calculer le moment dipolaire d'une couche sphérique de rayon R portant une densité surfacique de charge $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$.

5.4 Moment dipolaire d'une charge surfacique sphérique

- (a) Calculer le moment dipolaire d'une couche sphérique de rayon R dont la densité surfacique de charge est $\sigma_0(1 + \cos \theta)$.
 (b) Que vaut le moment dipolaire si le centre de la sphère est en $Z\hat{z}$?
 (c) Que vaut le moment dipolaire si le centre de la sphère est en $X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$?

5.5 Expression alternative pour le potentiel dans le champ d'un dipôle électrique

Nous avons trouvé que, dans le champ d'un dipôle électrique,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

En se référant à la Fig. 5.8, montrer que, si la longueur du dipôle est petite, alors

$$V = \frac{Qs}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d}{dz'} \left(\frac{1}{r'} \right) \right]_{z'=0}$$

où z' est la position d'une charge ponctuelle sur l'axe z et $\mathbf{r}' = x\hat{x} + y\hat{y} + (z - z')\hat{z}$.

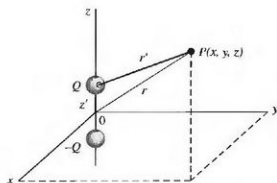


Figure 5.8

5.6 Expression alternative pour le potentiel dans le champ d'un quadrupôle électrique

En se référant au problème précédent et à la Fig. 5.9, montrer que le potentiel dans le champ d'un quadrupôle électrique linéaire est

$$V = \frac{ps}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d}{dz'} \left(\frac{\cos \theta}{r'^2} \right) \right]_{z'=0}$$

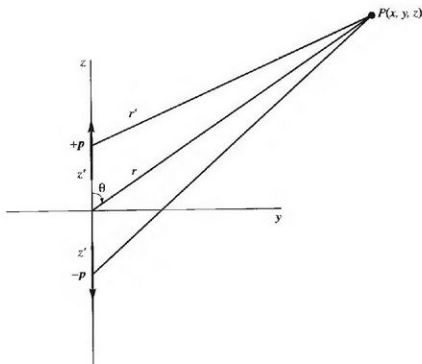


Figure 5.9

⑤ 5.7 Développement multipolaire du champ d'une seule charge ponctuelle

Une charge ponctuelle unique Q est situé en $P'(0, 0, s)$.

Développer d'abord son potentiel au point P en termes multiplicaires. Le vecteur $\mathbf{r}$ qui définit la position de P forme un angle θ avec l'axe z , et $r \gg s$. La distance de Q à P est r' . On négligera les termes d'ordre au moins $(s/r)^4$. Écrire alors les valeurs de V_1, V_2, V_3 .

5.8 Potentiel près d'un dipôle

Calculer V exactement pour un dipôle, et identifier les termes quadrupolaire et octopolaire. Le terme octopolaire varie comme $(s/r)^4$. On pourra donc négliger les termes en $(s/r)^5, (s/r)^6$, etc.

⑤ 5.9 Champ d'un cube chargé

Un cube de côté $2a$ porte une densité volumique de charge uniforme ρ . L'origine des coordonnées est au centre. Calculer V_1, V_2, V_3 à l'extérieur du cube.

5.10 Champ d'une charge linéique

Une charge linéique Q s'étend de $z = -a/2$ à $z = a/2$.

(a) Calculer les termes monopolaire, dipolaire et quadripolaire dans le développement de V .

(b) Pour quelle valeur de la distance r au centre de la charge le terme quadripolaire vaut-il moins de 1 % du terme monopolaire, si $3n^2 - 1$ est de l'ordre de l'unité ?

R 5.11 Champ d'un ensemble de six charges ponctuelles égales

Sur la Fig. 5.6, prenons toutes les charges égales à Q . Calculer V_4 et V_5 pour $r > a$.

5.12 Champ d'un quadripôle

Tracer les lignes du champ électrique pour un quadripôle formé par les charges $+Q$, $-Q$, $+Q$, $-Q$ disposées aux sommets d'un carré. Les charges sur une diagonale ont le même signe.

On se rappellera que, sur une ligne de champ, $dy/dx = E_y/E_x$.

Chapitre 6

Champs électriques : énergie, capacité et forces

Ce chapitre porte sur l'énergie accumulée dans un champ électrique et sur les forces résultantes exercées sur des conducteurs chargés⁽¹⁾. Il traite également des condensateurs, objets prévus pour emmagasiner de l'énergie électrique.

6.1 L'ÉNERGIE POTENTIELLE $\mathcal{E}$ D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGE, EXPRIMÉE EN TERMES DE CHARGES ET POTENTIELS

6.1.1 L'énergie potentielle d'un ensemble de charges ponctuelles

Imaginons un ensemble de N charges ponctuelles distribuées dans l'espace comme sur la Fig. 6.1. Il n'y a pas d'autres charges à proximité. Une charge donnée occupe un point où le potentiel dû aux *autres* charges est V . La charge considérée possède donc une énergie potentielle qui peut être positive ou négative. Le système dans son ensemble possède une énergie potentielle $\mathcal{E}$ que nous allons calculer.

Supposons que les charges restent en équilibre sous l'action des forces électriques et de forces de contrainte mécanique.

L'énergie potentielle du système est égale au travail effectué par les forces électriques pour disperser les charges vers l'infini. Après la dispersion, les charges sont infiniment loin les unes des autres et l'énergie potentielle est nulle.

(1) Voir Booker [3].

Déplaçons d'abord Q_1 lentement vers l'infini, tout en gardant les forces électriques et mécaniques en équilibre. Au cours de ce processus l'accélération et l'énergie cinétique sont nulles. Les autres charges restent immobiles. La diminution d'énergie potentielle $\mathcal{E}_1$ est égale à Q_1 multipliée par le potentiel V_1 dû aux autres charges à la position initiale de Q_1 :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{1N}} \right) \quad (6.1)$$

Toutes les charges sauf Q_1 apparaissent dans la série entre parenthèses.

Une fois Q_1 enlevée, repoussons Q_2 à l'infini vers un point infiniment éloigné de Q_1 . La diminution d'énergie potentielle vaut cette fois-ci

$$\mathcal{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{2N}} \right) \quad (6.2)$$

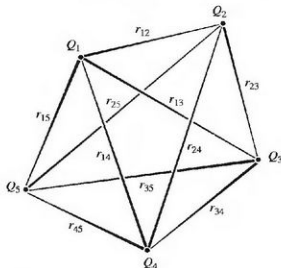


Figure 6.1 Ensemble de charges ponctuelles $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ séparées par des distances $r_{12}, r_{13}, r_{14}, \text{etc.}$

La série pour $\mathcal{E}_2$ contient $N - 2$ termes. Nous poursuivons le processus pour toutes les charges restantes, jusqu'à la $N^{\text{ème}}$ charge qui peut rester à sa position initiale puisqu'elle se trouve dans un champ nul.

L'énergie potentielle de la distribution de charge initiale est alors

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \dots + \mathcal{E}_N \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + \frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_4}{r_{14}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{1N}} \right) \\ &+ \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + 0 + \frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{2N}} \right) \\ &+ \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + 0 + 0 + \frac{Q_4}{r_{34}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{3N}} \right) + \dots \\ &+ \frac{Q_N}{4\pi\epsilon_0} (0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Nous réécrivons maintenant cette équation-tableau, en remplaçant les zéros situés à gauche et en dessous de la diagonale par des termes égaux à leur symétrique situé à droite et au-dessus de la diagonale. Chaque terme de la série apparaît alors deux fois et on peut écrire

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{E} = & \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + \frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_4}{r_{14}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{1N}} \right) \\
 & + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{21}} + 0 + \frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{2N}} \right) \\
 & + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{31}} + \frac{Q_2}{r_{32}} + 0 + \frac{Q_4}{r_{34}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{3N}} \right) + \cdots \\
 & + \frac{Q_N}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{N1}} + \frac{Q_2}{r_{N2}} + \frac{Q_3}{r_{N3}} + \frac{Q_4}{r_{N4}} + \cdots + 0 \right)
 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dans le membre de droite, la première ligne correspond à $Q_1 V_1$, la deuxième ligne à $Q_2 V_2$, et ainsi de suite, V_i étant, pour le système non perturbé, le potentiel dû à toutes les charges sauf Q_i au point occupé par Q_i . Alors

$$2\mathcal{E} = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \cdots + Q_N V_N \quad (6.6)$$

et l'énergie potentielle de la configuration de charge initiale vaut

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i \quad (6.7)$$

La présence du facteur $1/2$ résulte du calcul précédent. Admettons que toutes les charges soient positives. Alors le potentiel à la position d'une charge donnée, juste avant qu'elle soit envoyée à l'infini, est alors (sauf pour Q_1) inférieur au potentiel au même point de la distribution de charge originale. En moyenne, le potentiel juste avant le déplacement vaut la moitié du potentiel de la distribution de charge initiale.

Cette énergie $\mathcal{E}$, qui *ne comprend pas* l'énergie nécessaire pour assembler les charges individuelles elles-mêmes, peut être positive, négative ou nulle. Par exemple, pour deux charges du même signe, $\mathcal{E}$ est positive. Pour des charges de signe opposé, $\mathcal{E}$ est négative. Pour une seule charge, $\mathcal{E}$ est nulle.

Mais quelle est l'énergie nécessaire tout simplement pour modifier une distribution de charge sans la disperser à l'infini ? Cette énergie est évidemment égale à l'énergie potentielle finale moins l'énergie potentielle initiale, quelle que soit la méthode choisie pour effectuer la modification.

6.1.2 L'énergie potentielle d'une distribution de charge continue

Pour une distribution continue de charge électrique, on remplace Q_i par ρdV et la somme discrète par une intégrale sur un volume V quelconque qui contient toute la charge :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V V \rho dV \quad (6.8)$$

Cette intégrale est égale au travail effectué par les forces électriques pour passer de la distribution de charge donnée à la situation où $\rho = 0$ partout, soit en éloignant toute la charge à l'infini, soit en fusionnant les charges positives et négatives, ou encore en combinant ces deux processus.

À première vue, cela semble une généralisation évidente de l'équation précédente. Ce n'est pas le cas, parce que nous avons à présent inclus l'énergie nécessaire pour assembler les charges macroscopiques individuelles. En fait, comme nous le verrons dans la partie 6.2, l'intégrale ci-dessus est toujours positive.

Remarquons que le potentiel V sous l'intégrale ne contient pas de contribution provenant de l'élément de charge ρdV lui-même. Nous avons vu dans la partie 3.5 que l'élément infinitésimal de charge en un point donné ne contribue pas à V .

Pour des densités de charge surfaciques σ , l'énergie accumulée vaut

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_A V \sigma dA \quad (6.9)$$

où A comprend toutes les surfaces chargées.

6.1.3 Charges ponctuelles et distributions linéiques de charge

Supposons que nous ayons une distribution de charge sphérique Q de densité volumique uniforme et de rayon R . En utilisant la valeur V_i du potentiel à l'intérieur, valeur que nous avons calculée dans le premier exemple de la partie 3.6, on a

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^R \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3} \right) \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right] 4\pi r^2 dr = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad (6.10)$$

Si R est nul, alors $\mathcal{E}$ est infinie, ce qui n'a pas de sens. Les électrons sont vraisemblablement des charges ponctuelles, et travailler avec ce résultat absurde pose des problèmes difficiles dont les solutions sont bien au-delà de la portée de ce livre. Dans le cas d'une distribution linéique de charge, $\mathcal{E}$ est également infinie.

Les charges ponctuelles et les distributions linéiques de charge ne sont donc pas admises dans ce contexte. Néanmoins, nous suivons l'usage habituel et utilisons les termes un peu impropres de charges ponctuelles et de distributions linéiques de charge quand leur rayon est négligeable. Les distributions surfaciques de charge, elles, ne posent pas de problème.

Cf. exercice 6.1.

6.2 L'ÉNERGIE POTENTIELLE $\mathcal{E}$ D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGE ÉLECTRIQUE EXPRIMÉE EN TERMES DE $\mathbf{E}$

Nous avons exprimé l'énergie potentielle $\mathcal{E}$ d'une distribution de charge en fonction de la densité de charge volumique ρ et du potentiel V . Or ρ et V sont tous deux liés à $\mathbf{E}$, si bien qu'il doit être possible d'exprimer $\mathcal{E}$ uniquement en termes de $\mathbf{E}$. C'est ce que nous faisons ici. On trouve

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV \quad (6.11)$$

où le volume $\mathcal{V}$ comprend toutes les régions où règne un champ électrique $\mathbf{E}$. Nous pouvons alors calculer $\mathcal{E}$ en attribuant à chaque point de l'espace une *densité d'énergie électrique* égale à $\epsilon_0 E^2/2$.

Comme la valeur de $\mathcal{E}$ trouvée ci-dessus est positive, celle donnée par l'Éq. 6.8 est également toujours positive.

Ces deux expressions équivalentes de $\mathcal{E}$, l'une en termes de ρ et V et l'autre en termes de $\mathbf{E}$, sont également importantes. Elles mettent en relief des aspects différents mais complémentaires des phénomènes électriques. Dans la première expression $\mathcal{E}$ est l'énergie potentielle d'un système de *charges*; dans la seconde $\mathcal{E}$ est l'énergie emmagasinée dans un *champ*.

Nous appliquons tout d'abord la formule ci-dessus au champ d'un conducteur sphérique chargé, puis nous en donnons une démonstration générale.

Exemple : L'énergie potentielle $\mathcal{E}$ d'une sphère conductrice

Calculons l'énergie potentielle $\mathcal{E}$ d'une sphère conductrice de rayon R portant une charge Q , de trois façons différentes.

Première méthode :

Toute la charge Q est au potentiel $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Nous avons donc

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (6.12)$$

Deuxième méthode :

Imaginons que le rayon du conducteur sphérique chargé croisse lentement jusqu'à devenir finalement infini. Le travail mécanique total effectué par les charges est égal à l'énergie potentielle initiale.

Pendant l'expansion, le champ à l'extérieur ne change pas (à nouveau le théorème de Gauss !). Un élément de charge $\sigma dA = \epsilon_0 E dA$ est soumis à un champ électrique d'amplitude $E/2$ (Partie 6.8), et le travail effectué par cet élément quand le rayon de la sphère croît de dr est

$$d\mathcal{E} = (\epsilon_0 E dA) \left(\frac{E}{2} \right) dr = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV \quad (6.13)$$

où dV est l'élément de volume balayé par l'élément d'aire dA . Une fois le rayon augmenté jusqu'à l'infini, le travail total effectué par la charge est

$$\mathcal{E} = \int_R^\infty \int_{A(r)} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dA(r) dr = \int_R^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (6.14)$$

comme ci-dessus.

Troisième méthode :

Soit $A(r)$ l'aire d'une surface quelconque de rayon r , concentrique à la sphère conductrice et extérieure à elle, représentée sur la Fig. 6.2. Grâce au théorème de Gauss (Partie 3.6), on obtient :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \int_{A(r)} \epsilon_0 E dA \int_R^\infty E dr \quad (6.15)$$

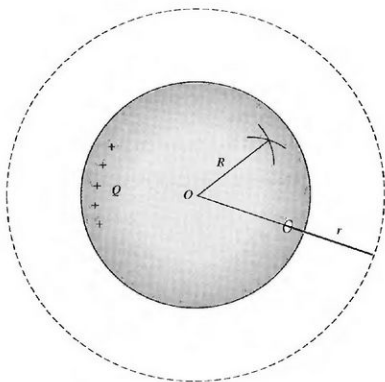


Figure 6.2 Conducteur sphérique portant une charge Q .
En pointillés, une surface imaginaire concentrique d'aire $A(r)$.

Puisque les deux intégrales sont indépendantes l'une de l'autre, on a aussi

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_R^\infty \left(\int_{A(r)} \epsilon_0 E dA \right) E dr \quad (6.16)$$

$$= \frac{1}{2} \int_R^\infty (4\pi r^2 \epsilon_0 E) E dr = \int_R^\infty \frac{\epsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr \quad (6.17)$$

$$= \int_R^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R} \quad (6.18)$$

comme précédemment.

► **L'énergie potentielle $\mathcal{E}$ d'une distribution de charge exprimée en termes de E : démonstration générale**

Nous ne traitons pas le cas irréaliste d'un potentiel V discontinu, qui requiert un E infini. Nous fixons aussi $V = 0$ à l'infini, ce qui exclut les charges de dimensions infinies. V a alors une valeur maximale finie $V_{\max}$ et une valeur minimale $V_{\min}$ avec $V_{\max} \geq 0$, $V_{\min} \leq 0$.

Supposons $V_{\min}$ négative, et imaginons un conducteur qui occupe tous les points où $V = V_{\min}$. Le conducteur se dilate vers l'équipotentielle $V_{\min} + dV$. Ceci ne modifie pas le reste du champ. Finalement, le conducteur atteint l'équipotentielle $V = 0$. Pendant la dilatation, toute charge rencontrée s'accumule sur la surface du conducteur.

D'après la deuxième méthode ci-dessus, le travail effectué par la charge est égal à l'intégrale de $\epsilon_0 E^2/2$ sur le volume balayé.

Supposons maintenant $V_{\max}$ positif et imaginons un autre conducteur qui occupe la région où $V = V_{\max}$. Il se dilate comme ci-dessus jusqu'à ce qu'il arrive à l'équipotentielle $V = 0$. De nouveau, le travail effectué est l'intégrale de $\epsilon_0 E^2/2$ sur le volume balayé.

Si les deux conducteurs se rencontrent, alors immédiatement avant le contact les densités surfaciques de charge ont le même module (même E), des signes opposés et sont au même potentiel. Elles s'annulent. La densité de charge est maintenant nulle partout, soit parce que la charge est dispersée à l'infini soit parce que les charges positives et négatives se sont neutralisées.

L'énergie initiale emmagasinée est donc correctement donnée par l'intégrale de $\epsilon_0 E^2/2$.

Cf. exercices : 6.2 ; 6.3 ; 6.4 ; 6.5.

6.3 LA CAPACITÉ D'UN CONDUCTEUR ISOLÉ

Imaginons un conducteur de dimensions finies très éloigné de tout autre corps et qui porte une charge Q . Si Q change, le potentiel du conducteur change aussi. Comme nous le montrons dans la suite, le rapport Q/V est constant. La *capacité* d'un conducteur isolé est

$$C = \frac{Q}{V} \quad (6.19)$$

La capacité d'un conducteur isolé est donc égale à la charge supplémentaire requise pour augmenter son potentiel de un volt. L'unité de capacité est le *farad* (symbole F), ou C/V.

L'énergie emmagasinée dans le champ d'un conducteur isolé est

$$\mathcal{E} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \quad (6.20)$$

Nous montrons maintenant que la capacité C d'un conducteur isolé dépend seulement de ses dimensions et de sa forme. Le conducteur est dans l'air. Le potentiel dans la région entourant le conducteur est $V(x, y, z)$. Il obéit à l'équation de Laplace et il est nul à l'infini car le conducteur est de dimensions finies par hypothèse. À la surface du conducteur la

densité de charge σ est $\epsilon_0 E$ (Partie 4.6), ou ϵ_0 fois le taux de changement de $V(x, y, z)$ dans la direction normale à la surface. Une conséquence immédiate est que la valeur du potentiel du conducteur détermine la densité surfacique de charge $\sigma = -\epsilon_0 \text{grad } V$ sur le conducteur. Par conséquent, le potentiel du conducteur détermine aussi la charge totale Q sur le conducteur.

Remarquons que l'équation $\Delta V = 0$ est linéaire, de façon que tout multiple de $V(x, y, z)$ en est aussi solution. Si V croît partout d'un facteur a , ce nouveau potentiel V obéit à l'équation de Laplace à l'extérieur du conducteur, est nul à l'infini et égal à aV_c sur le conducteur. Il est en outre la seule fonction continue de x, y, z satisfaisant ces trois conditions. Nous pouvons conclure que si le potentiel du conducteur augmente d'un facteur a , alors V augmente partout du même facteur a et de la même façon, σ et Q augmentent du même facteur.

La charge Q d'un conducteur isolé est donc proportionnelle à sa tension V , et sa capacité $C = Q/V$ dépend seulement de ses dimensions et de la forme du conducteur.

Exemple : La capacité d'une sphère conductrice

Si une sphère conductrice isolée de rayon R porte une charge Q , le potentiel à sa surface est $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ et

$$\begin{aligned} C = 4\pi\epsilon_0 R &\approx 1,11 \times 10^{-10} R \quad \text{F} \\ &\approx 111 R \quad \text{pF} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Cf. exercice 6.6.

6.4 LA CAPACITÉ ENTRE DEUX CONDUCTEURS

Nous avons maintenant deux conducteurs isolés non chargés. En transférant une charge Q d'un conducteur à l'autre on établit entre eux une *différence* de potentiel V . Par définition, la *capacité* entre les conducteurs est Q/V . La capacité dépend uniquement de la géométrie des conducteurs et de leur position relative.

Les paires de conducteurs spécialement dessinées pour avoir une capacité donnée sont appelées *condensateurs*.

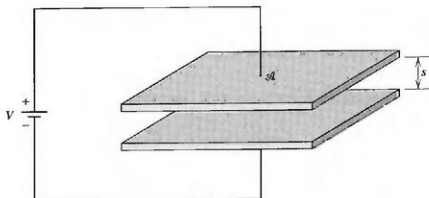


Figure 6.3 Condensateur à faces planes et parallèles connecté à une pile.

Exemple : Le condensateur à faces planes et parallèles

Un condensateur à faces planes et parallèles (Fig. 6.3) est constitué de deux plaques conductrices d'aire A séparées par une distance s . Les plaques portent des charges Q et $-Q$. Nous négligeons les effets de bord. Le théorème de Gauss donne

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}, \quad V = \frac{Qs}{A\epsilon_0} \quad (6.22)$$

Alors

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{s} \quad (6.23)$$

En outre, l'énergie emmagasinée est

$$\mathcal{E} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 s}{2\epsilon_0 A} \quad (6.24)$$

ou encore

$$\mathcal{E} = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 A} \right)^2 A s = \frac{Q^2 s}{2\epsilon_0 A} \quad (6.25)$$

Exemple : Condensateurs en parallèle et en série

Des condensateurs connectés en parallèle partagent la même tension. Pour deux condensateurs disposés comme en Fig. 6.4(a),

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2 \quad (6.26)$$

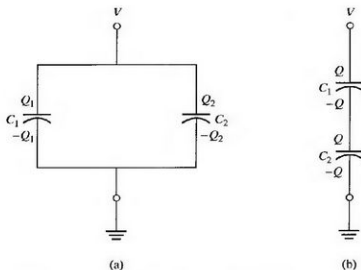


Figure 6.4 (a) Deux condensateurs connectés en parallèle.
(b) Deux condensateurs connectés en série.

Des condensateurs connectés en série portent la même charge, comme indiqué sur la Fig. 6.4(b). Alors

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C} \quad (6.27)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (6.28)$$

Donc des condensateurs en parallèle se somment comme des résistances en série, et des condensateurs en série se somment comme des résistances en parallèle.

Cf. exercices : 6.7 ; 6.8 ; 6.9 ; 6.10 ; 6.11 ; 6.12 ; 6.13 ; 6.14 ; 6.15.

6.5 * LA CONSTANCE DE TEMPS⁽¹⁾

On connecte une résistance aux bornes d'un condensateur comme sur la Fig. 6.5(a). La tension initiale aux bornes du condensateur est V_0 . Que se passe-t-il ? À l'instant t ,

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad \text{et } V = IR \quad (6.29)$$

et donc

$$V = \frac{Q}{C} = IR = -\frac{dQ}{dt}R, \quad \text{d'où } \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \quad (6.30)$$

En pratique, on mesure des tensions, pas des charges. Nous divisons donc les numérateurs dans la dernière équation par C , avec $Q/C = V$:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{RC}, \quad \text{d'où } V = V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (6.31)$$

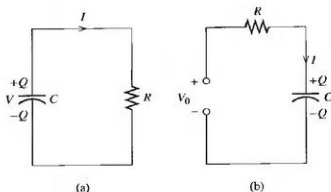


Figure 6.5

Le produit RC est appelé la *constante de temps* du circuit car, après un temps RC , la tension aux bornes du condensateur a diminué d'un facteur e . Pour $t \gg RC$, $V \approx 0$.

Mais que se passe-t-il si l'on applique une tension constante V_0 à un condensateur, initialement non chargé, à travers une résistance, comme sur la Fig. 6.5(b) ? Alors $I = +dQ/dt$ et

$$V_0 = IR + \frac{Q}{C} = \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C}, \quad \text{d'où } \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC} \quad (6.32)$$

(1) Pour une discussion plus exhaustive des circuits électriques, voir [32].

En divisant à nouveau par C , on a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_0}{RC} - \frac{V}{RC}, \quad \text{d'où } V = V_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right] \quad (6.33)$$

La tension V aux bornes du condensateur s'établit à partir de zéro avec la même constante de temps RC , et atteint finalement la valeur asymptotique V_0 .

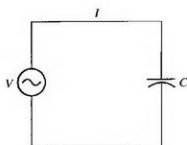
6.6 * LE COURANT ALTERNATIF DANS UN CONDENSATEUR

La figure 6.6(a) montre un générateur de courant alternatif connecté à un condensateur. Alors

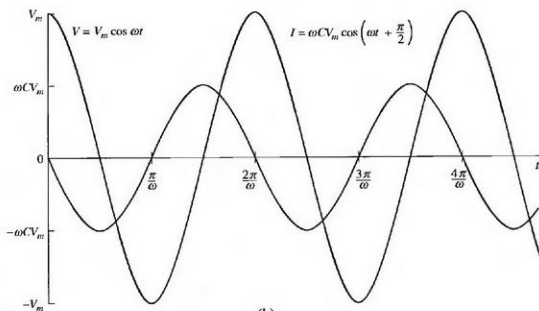
$$Q = CV_m \cos \omega t, \quad (6.34)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega CV_m \sin \omega t = \omega CV_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.35)$$

Le courant précède la tension par $\pi/2$ radians, comme sur la Fig. 6.6(b).



(a)



(b)

Figure 6.6 (a) Condensateur C connecté à un générateur qui délivre une tension V .
(b) V et I en fonction du temps pour un condensateur. Ici, le courant précède la tension de 90° et $\omega C = 0,5 \text{ S}$.

En représentation complexe (Chapitre 2),

$$I = j\omega Q = j\omega CV \quad (6.36)$$

où I , Q , V sont tous exprimés en représentation complexe. À un instant donné, l'énergie accumulée dans le condensateur est

$$\mathcal{E}_{\text{inst}} = \frac{CV^2}{2} = \frac{CV_m^2 \cos^2 \omega t}{2} \quad (6.37)$$

et l'énergie moyenne emmagasinée est

$$\mathcal{E}_{\text{moy}} = \frac{CV_m^2/2}{2} = \frac{CV_{\text{eff}}^2}{2} \quad (6.38)$$

► * L'impédance Z

Par analogie avec la loi d'Ohm pour les circuits en régime continu, on écrit la *loi d'Ohm pour les circuits en régime alternatif* :

$$I = \frac{V}{Z} \quad (6.39)$$

où I et V sont tous deux exprimés en représentation complexe et Z est l'*impédance* du circuit, exprimée en ohms. L'impédance d'une résistance est R .

Pour un condensateur, on déduit de l'Éq. 6.36

$$Z = \frac{1}{j\omega C} \quad (6.40)$$

Les impédances en série et en parallèle se comportent comme des résistances en série et en parallèle.

Les impédances sont en général des nombres complexes, donc de la forme

$$Z = R + jX \quad (6.41)$$

où X est la *réactance*. Dans le cas d'un circuit dipolaire passif et linéaire comprenant seulement des résistances et des condensateurs, aussi compliqué soit-il, l'impédance entre les deux bornes est un nombre complexe $R + jX$.

La réactance X d'une capacité C est négative :

$$jX = \frac{1}{j\omega C}, \quad X = -\frac{1}{\omega C} \quad (6.42)$$

Le courant dans un condensateur précède la tension appliquée ; intuitivement, on peut comprendre que, quelle que soit la combinaison de résistances et de condensateurs, le courant aux bornes précèdera la tension. La réactance pour le circuit complet sera donc négative, ou autrement dit capacitive.

Les deux lois de Kirchhoff pour les courants et pour les tensions vues dans la partie 4.4 s'appliquent aux circuits en régime alternatif si on utilise la représentation complexe et les impédances.

Exemple : *

À une fréquence de 1 kHz, un condensateur d'un microfarad possède une impédance Z de $-159j \Omega$. Si on applique une tension de 10 V à cette fréquence entre les bornes d'un condensateur, le courant a alors une amplitude de 62,9 mA et il précède la tension de 90° .

Cf. exercices : 6.16 ; 6.17.

6.7 FORCES ÉLECTRIQUES SUR UN CONDUCTEUR

Un élément de charge σdA à la surface d'un conducteur est exposé au champ électrique créé par toutes les *autres* charges ; il est donc soumis à une force électrique. En conditions statiques cette force est perpendiculaire à la surface, car sinon on aurait un champ tangent et un courant tangent. La force agit aussi sur le conducteur, auquel σdA est liée par des forces électriques internes.

Pour calculer l'amplitude de la force électrique, considérons un conducteur portant une densité surfacique de charge σ avec un champ électrique d'amplitude E près de la surface. Grâce au théorème de Gauss, on sait que cette amplitude E vaut σ/ϵ_0 . Or la force exercée sur σdA n'est *pas* $E\sigma dA$, car le champ qui agit sur σdA est seulement celui des *autres* charges du système.

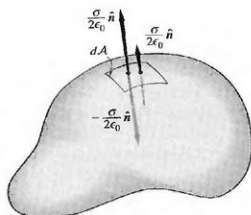


Figure 6.7 La densité surfacique de charge locale σ sur un conducteur crée deux champs électriques de directions opposées, comme indiqué par les deux flèches de gauche. L'ensemble des autres charges engendrent le champ représenté par la flèche de droite. Le résultat net est un champ d'amplitude σ/ϵ_0 à l'extérieur et zéro à l'intérieur. Le vecteur unitaire $\hat{n}$ est dirigé vers l'extérieur, comme d'habitude.

On peut calculer le champ créé par σdA elle-même grâce au théorème de Gauss. Le flux de E sortant de σdA est $\sigma dA/\epsilon_0$, pour moitié vers l'intérieur et pour moitié vers l'extérieur, comme schématisé sur la Fig. 6.7. σdA fournit donc exactement la moitié du champ total E en un point extérieur proche de la surface et annule le champ des autres charges à l'intérieur.

Par conséquent, le champ E agissant sur σdA est $\sigma/2\epsilon_0$ et la force sur l'élément de surface dA du conducteur vaut

$$dF = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sigma dA = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dA \quad (6.43)$$

La densité de force surfacique vaut

$$F' = \frac{dF}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad \text{N/m}^2 \quad (6.44)$$

La force par unité de surface sur un conducteur est égale à la densité d'énergie du champ.

La force électrostatique nette sur un conducteur d'aire A est

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_A \mathbf{E}^2 d\mathbf{A} \quad (6.45)$$

où le vecteur $d\mathbf{A}$ est dirigé vers l'extérieur. La force électrique locale tend à attirer le conducteur dans le champ. Autrement dit, un champ électrostatique exerce une pression négative sur un conducteur. La force nette sur un conducteur dépend de la manière dont σ et $\mathbf{E}$ varient à sa surface. Dans l'air, ou dans le vide, les forces électriques sont habituellement négligeables. Cependant, elles peuvent être notables dans les diélectriques.

La figure 6.8 montre les lignes du champ $\mathbf{E}$ pour quatre paires de charges *linéiques*. Voir également les Figs. 3.2a et 3.2b.

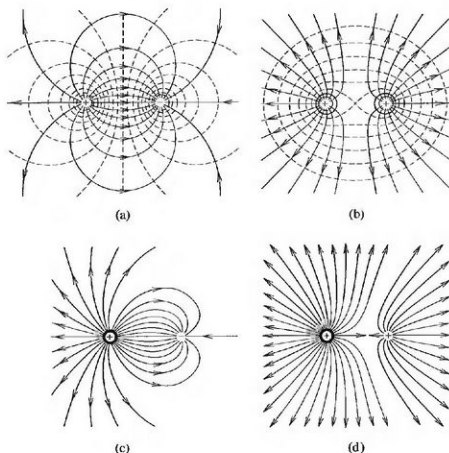


Figure 6.8 Lignes de $\mathbf{E}$ entre paires de distributions *linéiques* de charges.

Il est utile de visualiser les forces électriques attractives comme étant provoquées par une tension dans les lignes de $\mathbf{E}$, comme en (a) et (c). De la même façon, on peut penser les forces électriques répulsives comme étant provoquées par une répulsion latérale entre les lignes de $\mathbf{E}$, comme en (b) et (d). En (c) et (d) la charge est deux fois plus grande à gauche qu'à droite. En (a) et (b) les lignes pointillées représentent les équipotentielles.

Sur la Fig. 6.8(a) et (c), la force est attractive et les lignes de E semblent « sous tension ». En effet, la force de tension par mètre carré vaut $\epsilon_0 E^2/2$, comme nous pouvons le déduire de l'Éq. 6.44.

Sur la figure 6.8(b) et (d), au contraire, on peut voir des lignes de E qui se « repoussent » latéralement. La densité surfacique de force répulsive dans la région où les lignes de E sont parallèles est également $\epsilon_0 E^2/2$.

Nous verrons par la suite que le champ magnétique se comporte de façon similaire.

Cf. exercices : 6.18 ; 6.19 ; 6.20.

6.8 LE CALCUL DES FORCES ÉLECTRIQUES PAR LA MÉTHODE DU TRAVAIL VIRTUEL

On peut aussi calculer les forces électriques par la *méthode du travail virtuel*. Cette méthode consiste à supposer un déplacement infinitésimal puis à appliquer le principe de conservation de l'énergie. On définit d'abord un système, puis on calcule l'énergie qui lui est fournie au cours du déplacement. Cette énergie est égale à l'augmentation de l'énergie interne du système.

La méthode du travail virtuel est une méthode générale et fiable pour calculer les forces, mais seulement à deux conditions : il faut (1) être parfaitement au clair sur le système qu'on considère, et (2) être extrêmement attentif à utiliser les signes corrects.

Exemple : Le condensateur à faces planes et parallèles

Un condensateur à faces planes et parallèles est connecté à une pile qui délivre une tension continue V (voir la Fig. 6.9). Supposons que la distance s entre les plaques augmente de ds et appliquons le principe du travail virtuel. Nous calculons des énergies liées au condensateur. Alors l'énergie nette fournie au condensateur pendant le déplacement ds de la plaque supérieure sera égale à l'augmentation de l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur.

Soient $\mathcal{E}_F$ l'énergie mécanique fournie au condensateur par la force F , $\mathcal{E}_P$ l'énergie électrique apportée au condensateur par la pile et $\mathcal{E}_E$ l'augmentation de l'énergie électrique du condensateur. Alors

$$\mathcal{E}_F + \mathcal{E}_P = \mathcal{E}_E \quad (6.46)$$

avec

$$\mathcal{E}_F = F ds, \quad \mathcal{E}_P = V dQ \quad (6.47)$$

où dQ est la charge supplémentaire injectée dans le condensateur par la pile. Ici

$$\mathcal{E}_P = V(dC) = V^2 d \left(\frac{\epsilon_0 \mathcal{A}}{s} \right) = -V^2 \epsilon_0 \mathcal{A} \frac{ds}{s^2} = -(\epsilon_0 E^2)(\mathcal{A} ds) \quad (6.48)$$

Si ds est positive, dC est négative et l'énergie s'écoule du condensateur vers la pile.

Finalement, puisque $E = V/s$,

$$\mathcal{E}_E = d \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{A} s \right) = d \left(\frac{\epsilon_0 V^2 \mathcal{A} s}{2s^2} \right) = \epsilon_0 \frac{\mathcal{A} V^2}{2} \left(-\frac{ds}{s^2} \right) = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{A} ds \quad (6.49)$$

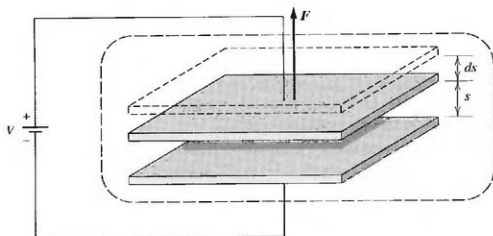


Figure 6.9 Condensateur à faces planes et parallèles connecté à une pile qui délivre une tension continue V .

On calcule la force d'attraction entre les plaques en imaginant une force F de même amplitude mais opposée qui pousse l'une des plaques vers l'extérieur d'une distance infinitésimale ds . La ligne pointillée autour des plaques nous rappelle que l'on applique le principe de conservation de l'énergie au seul condensateur.

Notons le signe négatif ! La densité d'énergie $\epsilon_0 E^2/2$ décroît plus vite que le volume $\mathcal{A}s$ n'augmente.

Donc

$$F ds - \epsilon_0 E^2 \mathcal{A} ds = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{A} ds \quad (6.50)$$

$$F = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{A} \quad (6.51)$$

et la force par unité de surface est égale à l'énergie par unité de volume, comme précédemment.

Essayons maintenant un ds négatif. On trouve que la moitié de l'énergie délivrée par la pile est convertie en énergie mécanique et l'autre moitié en énergie électrique.

Cf. exercices : 6.21 ; 6.22.

6.9 RÉSUMÉ

L'énergie potentielle d'une distribution de charge est donnée par l'une des deux intégrales

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V V_P dV \quad (6.8)$$

ou

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 E^2 dV \quad (6.11)$$

Dans la première intégrale le volume V contient toutes les charges, tandis que dans la seconde il contient tout le champ. L'attribution d'une densité d'énergie électrique $\epsilon_0 E^2/2$

à chaque point de l'espace donne correctement l'énergie potentielle d'une distribution de charge.

Si le potentiel d'un conducteur isolé est V quand sa charge est Q , alors sa *capacité* C vaut Q/V farad. Cette quantité dépend uniquement de la géométrie du conducteur. La capacité entre deux conducteurs est encore Q/V , où Q est maintenant la charge transférée de l'un à l'autre et V est le potentiel entre eux. Dans les deux cas, l'énergie emmagasinée est

$$\mathcal{E} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \quad (6.20)$$

Si un condensateur C se décharge à travers une résistance R , alors la tension aux bornes du condensateur décroît d'un facteur e en une fois la *constante de temps* RC .

De même, si une source V_0 charge un condensateur à travers une résistance R , alors la différence entre V_0 et la tension V aux bornes du condensateur décroît d'un facteur e en la même constante de temps RC .

Si une tension alternative $V_m \cos \omega t$ est appliquée aux bornes d'un condensateur C , alors le courant précède la tension de $\pi/2$ rad :

$$I = \omega CV_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.35)$$

ou, en représentation complexe,

$$I = \frac{V}{Z} = j\omega CV \quad (6.36)$$

où l'impédance Z vaut $1/(j\omega C)$.

La force par unité de surface exercée sur un conducteur placé dans un champ électrique est égale à la densité d'énergie électrique sur la surface :

$$F' = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (6.44)$$

où σ est la densité surfacique de charge.

Il est utile de visualiser les forces électriques comme étant créées par des lignes de $\mathbf{E}$ qui sont « sous tension » ou qui se « repoussent » latéralement.

On peut aussi calculer la force électrique sur un conducteur par le principe du travail virtuel, qui est simplement le principe de conservation de l'énergie appliqué à une perturbation infinitésimale d'un système.

EXERCICES

6.1 Dipôle et quadripôle

Calculer les énergies potentielles d'un dipôle électrique et d'un quadripôle électrique linéaire.

6.2 Énergie potentielle d'une charge sphérique

Ce problème illustre encore l'immensité des forces et des énergies électriques.

- Calculer l'énergie potentielle électrique d'une sphère de rayon R portant une charge totale Q distribuée uniformément dans tout le volume.
- Calculer l'énergie potentielle gravitationnelle d'une sphère de rayon R' et de masse totale M .
- Calculer l'énergie potentielle gravitationnelle de la Lune. Voir le tableau des constantes en annexe.
- Imaginons qu'on puisse assembler une sphère de protons avec une densité égale à celle de l'eau. Quel serait le rayon de cette sphère pour que son énergie potentielle électrique soit suffisante pour faire exploser la Lune ?
- Que vaut la tension à la surface de la sphère de protons ?

6.3 Énergie dans le champ d'un dipôle électrique

Montrer que l'énergie dans le champ d'un dipôle électrique de moment p , à l'extérieur d'une sphère de rayon R , est $p^2/(12\pi\epsilon_0 R^3)$.

6.4 Énergie électrostatique dans un câble coaxial

Les câbles coaxiaux sont constitués de deux conducteurs cylindriques coaxiaux. Ils servent principalement à la transmission de signaux haute-fréquence (Chapitre 24).

Le rayon externe du conducteur interne vaut 3,00 mm et le rayon interne du conducteur externe vaut 5,00 mm. Calculer l'énergie électrique dans le champ, par mètre, quand la différence de potentiel vaut 5,00 V.

6.5 Énergie dans le champ d'une sphère conductrice chargée

Une sphère conductrice de rayon R porte une charge Q .

- Calculer l'énergie emmagasinée.
- Calculer le rayon $R_{0,5}$ pour lequel l'énergie du champ vaut la moitié de l'énergie totale emmagasinée.
- Calculer le rayon $R_{0,9}$.

6.6 Le champ électrique terrestre

- Calculer la capacité de la Terre. Son rayon est $6,4 \times 10^6$ m.
- La Terre porte une charge négative, et le champ vertical, à sa surface, vaut environ 100 V/m. Quelle est sa charge totale ?
- Calculer le potentiel à la surface.

6.7 Un condensateur consistant en deux sphères concentriques est disposé de façon que la sphère externe puisse être séparée et déplacée en ne perturbant les charges sur aucune des sphères. Le rayon de la sphère interne est a , celui de la sphère externe est b , et les charges sont respectivement Q et $-Q$.

- Si la sphère externe est déplacée et remise à sa forme d'origine, trouver l'augmentation de l'énergie quand les deux sphères sont séparées d'une grande distance.
- D'où vient cette énergie supplémentaire ?

6.8 Condensateur à faces planes et parallèles

Montrer que la capacité d'un condensateur à faces planes et parallèles à N plaques est

$$C \approx 8,85(N-1)\mathcal{A}/t \text{ pF}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire d'une face d'une plaque et t est la distance entre les plaques. (1 pF vaut 10^{-12} F .)

6.9 Condensateur à faces planes et parallèles

Suggérer des dimensions raisonnables pour un condensateur à faces planes et parallèles de 1 pF (10^{-12} F), isolé par l'air, qui doit fonctionner à une différence de potentiel de 500 V .

6.10 Énergie électrostatique

(a) Deux condensateurs sont connectés en série comme sur la Fig. 6.4(b). Calculer le rapport des énergies emmagasinées.

(b) Calculer ce rapport pour des condensateurs connectés en parallèle comme sur la Fig. 6.4(a).

6.11 Énergie électrostatique

Deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 portent des charges respectives Q_1 et Q_2 .

(a) Calculer la quantité d'énergie dissipée quand ils sont connectés en parallèle.

(b) Comment cette énergie est-elle dissipée ?

6.12 Chargement d'un condensateur à travers une résistance

Un générateur délivrant une tension V charge un condensateur C à travers une résistance R .

Calculer l'énergie fournie par le générateur, celle dissipée par la résistance, celle emmagasinée dans le condensateur, après un temps infini.

On doit trouver que la moitié de l'énergie est dissipée dans R et l'autre moitié emmagasinée dans C .

6.13 Condensateur cylindrique

(a) Montrer que la capacité par unité de longueur d'un condensateur cylindrique est :

$$C' = 2\pi\epsilon_0 / \ln(R_2/R_1),$$

où R_1 et R_2 sont les rayons interne et externe.

(b) Calculer la capacité par mètre quand $R_2/R_1 = e \approx 2,718$. Voir aussi le problème 6.4.

6.14 Condensateur sphérique

(a) Montrer que la capacité d'un condensateur sphérique de rayons interne et externe R_1 et R_2 est $C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$.

(b) Calculer la capacité quand $R_1 = 100 \text{ mm}$ et $R_2 = 200 \text{ mm}$.

6.15 Connexion de condensateurs chargés en parallèle

Deux condensateurs C_1 et C_2 sont chargés sous des tensions V_1 et V_2 respectivement, puis connectés en parallèle, bornes positives ensemble et bornes négatives ensemble.

(a) Quelle est la tension finale ?

(b) Qu'arrive-t-il à l'énergie emmagasinée ?

6.16 Condensateur et résistance en parallèle

Un condensateur est connecté en parallèle avec une résistance. Montrer que

$$Z = \frac{R - jR^2\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1}$$

Montrer que, avec $C = 1 \times 10^{-9}$ F et $R = 1\,000\ \Omega$ à 10 kHz, $Z \approx (1\,000 - 62,8j)\ \Omega$.

6.17 Filtre passe-bas RC

Le circuit de la Fig. 6.10 est communément utilisé pour réduire la composante AC à la sortie d'un générateur de tension.

En général, le terme « générateur de tension » s'applique à un circuit qui transforme le courant alternatif du secteur à 220 V et 50 Hz en courant continu. Un type simple est le chargeur de batterie.

Un générateur de tension comprend habituellement trois parties : un transformateur, un circuit redresseur et un filtre. La sortie du redresseur est un courant pulsatoire qui peut être considéré comme un courant continu plus un courant alternatif. La fonction du filtre est d'atténuer la partie alternative. Les filtres sont habituellement omis dans les chargeurs de batterie.

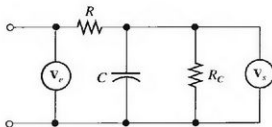


Figure 6.10 Filtre passe-bas simple, en RC, pour atténuer la composante alternative à la sortie d'un générateur de tension, avec $R_C \gg R \gg 1/(\omega C)$.

Le filtre est souvent suivi, ou même remplacé, par un circuit électronique qui maintient soit la tension soit le courant de sortie à une valeur fixée.

Le circuit indiqué est une forme simple de filtre passe-bas. La résistance de charge R_C est supposée être grande devant $1/(\omega C)$.

(a) Montrer que la composante alternative est atténuée d'un facteur

$$V_s/V_e \approx 1/(R\omega C)$$

si $R\omega C \gg 1$. La chute de tension dans la résistance R doit être petite par rapport à celle dans R_C , donc

$$R_C \gg R \gg 1/(\omega C)$$

(b) Tracer la courbe de V_s/V_e en fonction de la fréquence de 0 à 150 Hz pour $R = 10^4\ \Omega$ et $C = 100\ \mu\text{F}$.

(c) Tracer la courbe de l'atténuation correspondante en *décibels* en fonction de la fréquence, où le nombre de décibels est $20 \log (V_s/V_e)$.

6.18 Forces électriques et lignes de E

(a) Utiliser la méthode de la partie 6.7 pour calculer la force d'attraction entre deux charges Q et $-Q$ séparées par une distance $2D$.

(b) Répéter le calcul pour deux charges de même signe.

6.19 Générateur de haute tension

Imaginons le mécanisme suivant pour générer des hautes tensions. L'une des plaques d'un condensateur à faces planes et parallèles est fixe et connectée à la terre. L'autre est mobile. Quand les plaques sont proches, à une distance s , un interrupteur se ferme et la plaque mobile se charge à la tension V . L'interrupteur s'ouvre alors, la plaque mobile s'éloigne à une distance ns , et la tension augmente à nV , en négligeant les effets de bord. À ce moment un autre interrupteur se ferme et la plaque mobile se décharge jusqu'à la terre dans une résistance de charge R .

- Vérifier qu'il y a conservation de l'énergie.
- Suggérer une géométrie plus commode pour un tel générateur de haute tension.

6.20 Force de surface sur un ballon portant une charge électrique

On suggère qu'un ballon fait dans un matériau léger et conducteur peut être maintenu approximativement sphérique en le connectant à un générateur de haute tension. Le ballon a un diamètre de 100 mm, et le champ de claquage maximal dans l'air est de 3 MV/m.

- Quelle est la tension maximale permise ?
- Quelle pression de gaz, en atmosphères, à l'intérieur du ballon aurait le même effet ?
- Quelle serait la valeur maximale de la masse surfacique du ballon ?

6.21 Énergie emmagasinée

Quatre charges $+Q$, $-Q$, $+Q$, $-Q$ occupent les sommets d'un carré de côté a avec les charges positives sur une diagonale et les charges négatives sur l'autre.

- Calculer l'énergie $\mathcal{E}$ emmagasinée et tracer la courbe de $\mathcal{E}$ en fonction de a .
- Un mécanisme oblige les charges à rester aux sommets du carré mais permet à a de varier. Que va-t-il se passer ?
- Calculer les forces sur les charges par la méthode du travail virtuel.
- Comparer les valeurs obtenues par le travail virtuel avec celles déduites de la loi de Coulomb.

6.22 Forces sur les plaques d'un condensateur à faces planes et parallèles

Montrer que la force d'attraction entre les plaques d'un condensateur à faces planes et parallèles qui n'est pas connecté à une pile est $\epsilon_0 E^2 A/2$, comme dans l'Éq. 6.51.

Chapitre 7

Champs électriques : matériaux diélectriques, charges liées et induction électrique D

Les diélectriques diffèrent des conducteurs car ils ne possèdent pas de porteurs de charge libre qui peuvent dériver sous l'effet d'un champ électrique. Dans un vrai diélectrique, les charges sont toutes liées à leurs atomes ou molécules, et elles peuvent être forcées à se déplacer seulement d'une distance minuscule, les charges positives d'un côté et les négatives de l'autre. Un diélectrique dans lequel ce déplacement a eu lieu est dit *polarisé*.

Certaines molécules possèdent un moment dipolaire permanent et sont dites *polaires*. D'autres sont *non-polaires*.

Un matériau donné peut être diélectrique en conditions normales mais devenir conducteur dans des conditions appropriées. Par exemple, les *photoconducteurs* sont normalement non-conducteurs mais deviennent conducteurs quand ils sont exposés à la lumière.

Dans ce premier chapitre consacré aux milieux diélectriques nous nous intéressons aux concepts fondamentaux de polarisation, susceptibilité et permittivité relative, principalement dans des champs statiques.

7.1 LES TROIS PROCESSUS FONDAMENTAUX DE POLARISATION

- 1) Sous l'action d'un champ électrique appliqué, le centre de charge⁽¹⁾ du nuage électronique dans une molécule se déplace légèrement par rapport au centre de charge du noyau. C'est la *polarisation électronique*. Le déplacement est minuscule même à l'échelle atomique, typiquement 10^{-8} fois le diamètre d'un atome.
- 2) Les molécules polaires s'alignent et se polarisent plus encore dans un champ électrique appliqué. C'est la *polarisation d'orientation*. Les collisions dues à l'agitation thermique détruisent partiellement cet alignement.
- 3) Le troisième processus fondamental est la *polarisation atomique*, dans laquelle des ions de signes opposés dans un solide, tel que NaCl, se déplacent dans des directions opposées quand ils sont soumis à un champ électrique. Les diélectriques ferroélectriques du paragraphe 8.1.4 présentent une polarisation atomique.

Un diélectrique polarisé possède son propre champ, qui s'ajoute à celui des autres charges. Les deux champs peuvent être d'amplitudes comparables.

7.2 LA POLARISATION ÉLECTRIQUE P

Si, aux environs d'un point donné, le vecteur moment dipolaire moyen par molécule dans une direction donnée est $\mathbf{p}$ et s'il y a N molécules par mètre cube, alors

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} \quad (7.1)$$

est la *polarisation électrique* en ce point. Donc $\mathbf{P}$ est le *moment dipolaire par unité de volume* en un point donné, et s'exprime en C/m^2 . Rappelons-nous d'après la partie 5.4 que le moment dipolaire d'une distribution de charge est indépendant du choix de l'origine quand la charge nette de la distribution est nulle, ce qui est le cas pour une molécule neutre normale.

Cf. exercices : 7.1 ; 7.2.

7.3 CHARGES LIBRES ET LIÉES

La polarisation fait s'accumuler des charges, soit dans le diélectrique soit à sa surface. Nous désignons ces charges comme charges *liées* ou charges *de polarisation*, notées avec un indice p . D'autres charges sont dites *libres* (indice l). Des exemples de charges libres sont les électrons de conduction dans les bons conducteurs, les porteurs de charge dans les semi-conducteurs, et les électrons injectés dans un diélectrique par un faisceau d'électrons de haute énergie.⁽²⁾

(1) Le centre de charge est l'analogue du centre de masse en mécanique.

(2) Les concepts de charges libres et liées, et même le concept de polarisation, ne sont pas aussi déterminés qu'on le souhaiterait. La distinction entre charges libres et charges liées repose sur l'hypothèse que le diélectrique est constitué de molécules électriquement neutres. S'il n'y a pas de molécules bien définies, comme dans un cristal de NaCl, par exemple, les valeurs des densités surfaciques de charge libre et liée sont arbitraires. Nous limitons l'essentiel de notre discussion ici aux diélectriques composés de molécules.

7.3.1 La densité surfacique de charge liée σ_p

Imaginons un élément de surface dA à l'intérieur d'un diélectrique, comme en Fig. 7.1. Disons que le diélectrique est non-polaire. Quand il est polarisé, le centre de la charge positive $+Q$ d'une molécule se trouve à une distance s du centre de la charge négative $-Q$. Ce s est le même pour toutes les molécules d'une région infinitésimale.

Lors de l'application d'un champ électrique, n_+ charges positives traversent l'élément de surface en se déplaçant dans la direction de s , et n_- charges négatives la traversent en se déplaçant dans la direction opposée. La charge nette qui traverse dA dans la direction de s est donc

$$dQ = n_+Q - n_-(-Q) = (n_+ + n_-)Q \quad (7.2)$$

Or, $n_+ + n_-$ est simplement le nombre de molécules dans le parallélépipède imaginaire de la Fig. 7.1, de volume $s \cdot dA$. Alors

$$dQ = NQs \cdot dA = N\mathbf{p} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} \quad (7.3)$$

où Qs est le moment dipolaire $\mathbf{p}$ d'une seule molécule.

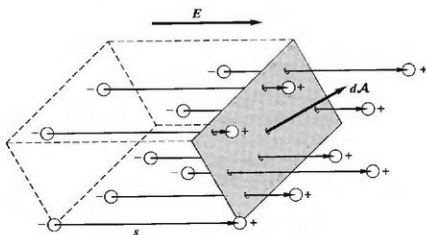


Figure 7.1 Élément de surface dA situé à l'intérieur d'un diélectrique. Le vecteur $d\mathbf{A}$ est normal à l'élément. Ici E est le champ extérieur appliqué plus le champ des dipôles à l'intérieur du diélectrique. Sous l'action de ce E , les molécules s'étirent, ou tournent et s'étirent, et une charge nette $NQs \cdot dA$ traverse l'élément de surface.

Si dA se trouve sur la surface d'un diélectrique, alors dQ s'accumule là et la *densité surfacique de charge liée* est

$$\sigma_p = \frac{dQ}{dA} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (7.4)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal à la surface orienté vers l'extérieur. σ_p est donc égale à la valeur de la composante normale de $\mathbf{P}$ orientée vers l'extérieur.

7.3.2 La densité volumique de charge liée ρ_p

Nous démontrons maintenant qu'à l'intérieur d'un diélectrique la densité volumique de charge liée ρ_p est égale à $-\text{div } \mathbf{P}$. La charge liée nette sortant d'un volume $\mathcal{V}$ à travers un élément $d\mathcal{A}$ de sa surface est $\mathbf{P} \cdot d\mathcal{A}$, comme nous avons trouvé ci-dessus. La charge liée nette sortant de la surface fermée $\mathcal{A}$ qui délimite un volume $\mathcal{V}$ entièrement situé dans le diélectrique (afin d'exclure les charges de surface) est donc

$$Q_{\text{ext}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathcal{A} \quad (7.5)$$

et la charge nette qui reste dans $\mathcal{V}$ doit être $-Q_{\text{ext}}$. Si ρ_p est la densité volumique de charge qui reste dans $\mathcal{V}$, alors

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_p dV = -Q_{\text{ext}} = - \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{P} dV \quad (7.6)$$

Nous avons utilisé le théorème de la divergence pour passer de la deuxième intégrale à la troisième. Comme cette équation est valable pour tout volume choisi comme ci-dessus, les intégrands sont égaux en tout point du diélectrique, et la *densité volumique de charge liée* est

$$\rho_p = -\text{div } \mathbf{P} \quad (7.7)$$

7.3.3 Les densités de courant $\mathbf{J}_p$ et $\mathbf{J}_l$

Le mouvement de charges liées sous l'action d'un champ électrique dépendant du temps engendre un *courant de polarisation*. Considérons une petite surface $d\mathcal{A}$ située à l'intérieur d'un diélectrique comme en Fig. 7.1, mais normale à $\mathbf{P}$. Quand la polarisation augmente de zéro à $\mathbf{P}$, une charge nette $dQ_p = P d\mathcal{A}$ traverse $d\mathcal{A}$ dans la direction de $\mathbf{P}$. Plus généralement, si $\mathbf{P}$ augmente de $d\mathbf{P}$ dans un intervalle de temps dt et si $d\mathcal{A}$ est normale à $d\mathbf{P}$, alors un courant

$$I = \frac{dQ_p}{dt} = \frac{dP d\mathcal{A}}{dt} \quad (7.8)$$

circule à travers $d\mathcal{A}$ dans la direction de $\mathbf{P}$.

Si donc, en un point donné de l'espace, $\mathbf{P}$ est une fonction du temps, le mouvement des charges liées résulte en une *densité de courant de polarisation*

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (7.9)$$

En notant $\mathbf{J}_l$ la densité de courant de charges libres, la loi de conservation de la charge de la partie 4.2 peut se réécrire

$$\text{div } \mathbf{J}_l = -\frac{\partial \rho_l}{\partial t} \quad (7.10)$$

Cf. exercice 7.3.

7.4 LE CHAMP ÉLECTRIQUE D'UN DIÉLECTRIQUE POLARISÉ

Nous avons vu que la polarisation fait s'accumuler des charges, soit sur la surface d'un diélectrique soit à l'intérieur, avec des densités de charge σ_p et ρ_p respectivement. Or, la loi de Coulomb s'applique à toute densité de charge nette, quelle que soit la matière en présence. Le potentiel V attribuable à un diélectrique polarisé occupant un volume V' délimité par une surface d'aire A' est donc le même que si les charges liées étaient situées dans le vide :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_p dV'}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A'} \frac{\sigma_p dA'}{r} \quad (7.11)$$

où r est la distance entre l'élément de charge liée en $P'(x', y', z')$ et le point $P(x, y, z)$ où on calcule V .

S'il y a aussi des charges libres présentes, on ajoute alors des intégrales analogues pour les charges libres. Donc

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A'} \frac{\sigma \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dA' \quad (7.12)$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est orienté de P' vers P et où ρ et σ sont les densités de charge totale, libres plus liées.

Il ne s'ensuit pas qu'on peut calculer $\mathbf{E}$ à partir de ρ et σ , car les densités de charge libre et liée dépendent de $\mathbf{E}$.

Exemple : Le champ d'une feuille infinie d'électret

Un *électret* — ou isolant polarisé — est l'équivalent électrique d'un aimant permanent. Dans la plupart des diélectriques la polarisation disparaît immédiatement après la suppression du champ électrique, mais certains diélectriques conservent leur polarisation pendant de longues durées. Par exemple, certains polymères ont des durées de vie extrapolées à plusieurs milliers d'années à température ambiante.

De manière générale, les électrets ont la forme d'une feuille, la polarisation étant normale à la surface. Une façon de *polariser* un électret consiste à placer le matériau dans un champ électrique d'environ 10^8 V/m à environ 100° . Une charge surfacique liée s'accumule lorsque les molécules s'orientent, et l'échantillon est ensuite refroidi à la température ambiante sans supprimer le champ électrique.

Un matériau communément utilisé est le polyfluorure de vinylidène (PVF_2). C'est un polymère composé d'une chaîne de $\text{CH}_2\text{-CF}_2$. Sa polarisation rémanente vaut typiquement 50 à 70 mC/m². Ce matériau est utilisé dans des types variés de transducteurs, par exemple des microphones, car il a aussi la propriété de passer dans un état polarisé métastable quand il est étiré.

Pour une feuille d'électret, si on néglige les effets de bord la polarisation P est uniforme et égale à σ_p comme sur la Fig. 7.2. ρ_p est donc nul, d'après l'Éq. 7.7. À l'intérieur de la feuille,

$$E = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}, \quad P = \sigma_p \quad (7.13)$$

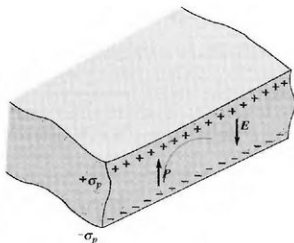


Figure 7.2 Coupe d'une feuille d'électret.
Les vecteurs E et P sont orientés dans des directions opposées.

Cf. exercice 7.4.

7.5 LE THÉORÈME DE GAUSS DANS LES DIÉLECTRIQUES

Supposons qu'un volume $\mathcal{V}$ donné contienne divers diélectriques, certains d'entre eux pouvant être en partie à l'extérieur et en partie à l'intérieur. La charge libre et liée totale dans $\mathcal{V}$ est $Q_l + Q_p = Q$. Il n'y a pas de charges surfaciques sur la surface de $\mathcal{V}$. Alors le *théorème de Gauss* (Partie 3.6) relie le flux de E sortant à travers la surface d'aire $\mathcal{A}$ à la charge nette incluse Q :

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_l + Q_p}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (7.14)$$

C'est le théorème de Gauss sous sa forme la plus générale.

Si le volume $\mathcal{V}$ se trouve entièrement à l'intérieur d'un diélectrique, il n'y a pas de charges surfaciques et

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} (\rho_l + \rho_p) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho dV \quad (7.15)$$

où $\rho = \rho_l + \rho_p$ est la *densité de charge totale*. En appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale de surface de E on obtient l'intégrale de volume de $\text{div } E$. L'égalisation des intégrands donne alors

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.16)$$

qui est encore le théorème de Gauss, exprimé sous forme locale.

C'est l'une des *quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme de Maxwell*.

Cf. exercice 7.5.

7.6 LES ÉQUATIONS DE POISSON ET DE LAPLACE POUR V DANS LES DIÉLECTRIQUES

Puisque $\mathbf{E} = -\text{grad } V$, d'après la partie 3.4 il vient que

$$\Delta V = -\rho/\epsilon_0 \quad (7.17)$$

C'est l'équation de Poisson pour V dans les diélectriques.

L'équation de Laplace s'applique dans les régions où la densité de charge électrique totale est nulle :

$$\Delta V = 0 \quad (7.18)$$

comme dans la partie 4.1.

Cf. exercice 7.6.

7.7 L'INDUCTION ÉLECTRIQUE D. LA DIVERGENCE DE D

D'après l'Éq. 7.16,

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\epsilon_0} \quad (7.19)$$

Mais nous avons trouvé dans la partie 7.3 que $\rho_p = -\text{div } \mathbf{P}$. Donc

$$\text{div } (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_l \quad (7.20)$$

On conclut que le vecteur

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (7.21)$$

est tel que sa divergence est égale à la densité volumique de charge libre. Cette grandeur est appelée *induction électrique*. Alors

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_l \quad (7.22)$$

Il s'ensuit que, pour un volume $\mathcal{V}$ quelconque entièrement inclus dans un diélectrique et contenant une charge libre Q_l sans charge surfacique,

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{D} dV = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{V}} \rho_l dV = Q_l \quad (7.23)$$

Ceci coïncide avec la relation $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$:

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = Q + \int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{P} dV \quad (7.24)$$

$$= Q - \int_{\mathcal{V}} \rho_p dV = Q - Q_p = Q_l \quad (7.25)$$

Le fait que la divergence de $\mathbf{D}$ ne dépende que de la densité de charge libre ne signifie pas que $\mathbf{D}$ lui-même ne dépende que de ρ_l . Pour trouver $\mathbf{D}$, on doit intégrer l'Éq. 7.22 avec les conditions aux limites appropriées.

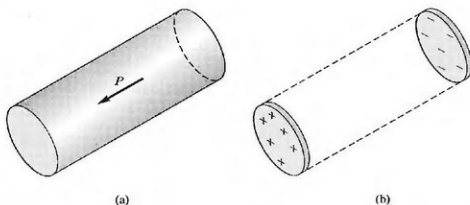


Figure 7.3 (a) Électret idéal en barreau, polarisé uniformément parallèlement à son axe. (b) Le champ $\mathbf{E}$ d'un barreau d'électret est le même que celui créé par une paire de plaques circulaires portant des densités surfaciques de charge uniformes P de polarités opposées.

En utilisant la divergence de $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$, on suppose implicitement l'existence des dérivées spatiales. Pour traiter l'interface entre deux milieux, où ces dérivées n'existent pas, on doit alors utiliser la forme intégrale du théorème de Gauss, qui est donc plus générale.

Exemple : Feuille infinie d'électret

À l'intérieur de l'électret de l'exemple de la partie 7.4, $\mathbf{E} = (\sigma_p/\epsilon_0)\hat{\mathbf{n}}$ est orienté vers le bas. Par ailleurs, $\mathbf{P}$ est orientée vers le haut et son module est σ_p .

Donc $\mathbf{E}$ et $\mathbf{P}/\epsilon_0$ ont même module mais sont orientés dans des directions opposées, comme sur la Fig. 7.2, de telle sorte que

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = 0.$$

Exemple : Barreau d'électret

Supposons qu'à l'intérieur du barreau d'électret de la Fig. 7.3, la polarisation $\mathbf{P}$ soit uniforme. (C'est un exemple intéressant mais irréaliste car en fait $\mathbf{P}$ n'est pas uniforme.) Alors $\text{div } \mathbf{P}$ est nulle et d'après l'Éq. 7.7, ρ_p est nulle. Il n'y a de charges liées qu'aux extrémités. Alors le champ $\mathbf{E}$, à l'intérieur comme à l'extérieur du barreau d'électret, est celui d'une paire de feuilles circulaires chargées de densités de charge uniformes $+P$ et $-P$ respectivement, comme sur la figure. (La densité surfacique de charge sur une plaque conductrice est plus grande près des bords qu'au centre.)

À l'extérieur, les lignes de $\mathbf{D}$ sont identiques à celles de $\mathbf{E}$ car $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$.

À l'intérieur, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, avec $\mathbf{E}$ et $\mathbf{P}$ orientés dans des directions approximativement opposées. La divergence de $\mathbf{D}$ est nulle partout. Voir la Fig. 7.4.

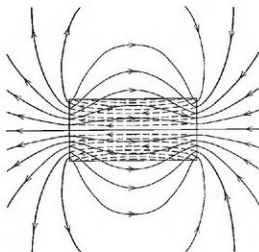


Figure 7.4 Lignes de E (trait plein) pour le barreau idéal d'électret de la Fig. 7.3. Les lignes de D sont représentées en pointillés à l'intérieur de l'électret; à l'extérieur elles suivent les lignes de E . La polarisation est uniforme et orientée vers la gauche.

Cf. exercices : 7.7 ; 7.8.

7.8 LA SUSCEPTIBILITÉ DIÉLECTRIQUE χ_e

Dans la plupart des diélectriques P est proportionnelle à E et elle est orientée dans la même direction. (Ceci n'est *pas* vrai pour l'électret, comme nous venons juste de le dire !) De tels diélectriques sont *linéaires* et *isotropes*. Donc, dans les diélectriques linéaires et isotropes,

$$P = \epsilon_0 \chi_e E \quad (7.26)$$

où χ_e est la *susceptibilité diélectrique* du milieu.

Le diélectrique est *homogène* si sa susceptibilité diélectrique est indépendante des coordonnées.

7.9 LA PERMITTIVITÉ RELATIVE ϵ_r

Dans les diélectriques linéaires et isotropes, l'éq. 7.26 s'applique et

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E \quad (7.27)$$

où

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (7.28)$$

est la *permittivité relative*. Cette grandeur est sans dimension et plus grande que un. La grandeur ϵ est la *permittivité*. Ses dimensions sont celles de ϵ_0 , c'est-à-dire, F/m. Donc, pour des diélectriques linéaires et isotropes,

$$P = \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E \quad (7.29)$$

Le tableau 7.1 indique la valeur de ϵ_r pour des diélectriques communs à trois fréquences très différentes.

La permittivité relative des gaz à température et pression normales n'est que légèrement supérieure à un. Par exemple, $\epsilon_r = 1,000536$ pour l'air à température et pression normales.

Tableau 7.1 Permittivités relatives de plusieurs matériaux vers 25°.

Matériau	Fréquence (Hz)		
	100	10^6	10^{10}
Titanate de baryum	1250	1140	100
Benzène	2,28	2,28	2,28
Bouleau jaune		2,7	1,95
Caoutchouc butyle	2,43	2,40	2,38
Tétrachlorure de carbone	2,17	2,17	2,17
Silice fondue	3,78	3,78	3,78
Verre (borosilicate de sodium)	5,0	4,84	4,82
Glace		4,15	3,20
Lucite	3,20	2,63	2,57
Néoprène	6,70	6,26	4,0
Polyéthylène	2,26	2,26	2,26
Polystyrène	2,56	2,56	2,54
Chlorure de sodium		5,90	5,90
Sol (argile sèche)		2,59	2,55
Stéatite	6,55	6,53	6,51
Styromousse	1,03	1,03	1,03
Teflon	2,1	2,1	2,08
Eau	81	78,2	34
Blé rouge d'hiver		4,3	2,6

Les permittivités relatives des bons conducteurs sont inconnues car leurs courants de conductions sont beaucoup plus grands que leurs courants de polarisation. On peut supposer que leurs permittivités sont de l'ordre de trois à cinq, comme pour des diélectriques ordinaires.

Exemple : Les densités volumiques de charge libre et liée

La présence d'une densité volumique de charge libre ρ_l polarise un diélectrique et engendre une charge liée ρ_p . Si le diélectrique est homogène, isotrope et linéaire, alors

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \mathbf{D}, \quad (7.30)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \operatorname{div} \mathbf{D}, \quad (7.31)$$

$$\rho_p = - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \rho_l \quad (7.32)$$

Si ρ_l est nulle, alors ρ_p est nulle et $\text{div } \mathbf{P}$ également. Si ρ_l n'est pas nulle, ce qui se produit rarement, la densité de charge totale ρ a le même signe que ρ_l mais est plus petite :

$$\rho = \rho_l + \rho_p = \rho_l - \text{div } \mathbf{P} = \frac{\rho_l}{\epsilon_r} \quad (7.33)$$

En conséquence, le *théorème de Gauss* (Éq. 7.19) peut s'écrire aussi

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_l}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad (7.34)$$

Exemple : Les densités surfaciques de charge libre et liée à l'interface entre un diélectrique et un conducteur

À l'interface entre un conducteur et un diélectrique linéaire et isotrope, le conducteur porte une charge σ_l et le diélectrique une charge σ_p . Si le champ est statique, $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{D} = 0$ à l'intérieur du conducteur.

Comme la composante tangentielle de $\mathbf{E}$ est continue au passage de l'interface, comme nous le verrons au paragraphe 8.2.3, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ sont tous deux normaux à l'interface dans le diélectrique, au voisinage du conducteur.

Imaginons maintenant un volume de Gauss G mince, à cheval sur une portion d'aire A de l'interface, comme sur la Fig. 7.5.

Le théorème de Gauss, exprimé comme dans la partie 7.5, stipule que le flux sortant de $\mathbf{D}$ sur la Fig. 7.5 est égal à la charge libre incluse $\sigma_l A$.

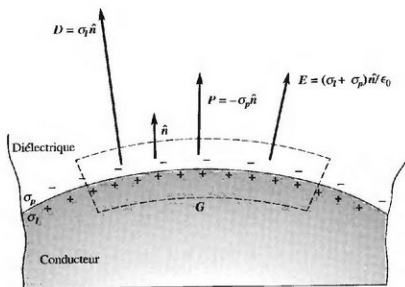


Figure 7.5 Interface entre un diélectrique et un conducteur.

On a à la fois une densité surfacique de charge libre σ_l sur le conducteur et une densité de charge liée σ_p sur le diélectrique. Si σ_l est positive, comme c'est le cas ici, alors σ_p est négative et les vecteurs $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$ pointent dans les directions indiquées. Avec $\hat{n}$ orienté vers le diélectrique comme ci-dessus, $\mathbf{P} = -\sigma_p \hat{n}$. Voir l'Éq. 7.4.

Orientons l'axe vertical vers le haut. Alors, comme $|P| = |\sigma_p|$ dans cet exemple, d'après la partie 7.3

$$\sigma_l = D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E - \sigma_p \quad (7.35)$$

et

$$E = \frac{\sigma_l + \sigma_p}{\varepsilon_0} \quad (7.36)$$

Remarquons que le théorème de Gauss pour $\mathbf{E}$, sous la forme de l'Éq. 7.14, conduit à la même valeur de E .

Puisque $D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$,

$$\sigma_l = D = \varepsilon_r (\sigma_l + \sigma_p), \quad \sigma_p = - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \sigma_l \quad (7.37)$$

$$\sigma = \sigma_l + \sigma_p = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_r} \quad (7.38)$$

On peut comparer ces équations aux Éqs. 7.32 et 7.33.

Exemple : Condensateur à faces planes et parallèles isolé avec un diélectrique

La figure 7.6 représente une coupe d'un condensateur à faces planes et parallèles. Nous avons indiqué des couches d'air des deux côtés de la feuille de diélectrique pour rendre notre discussion plus pédagogique, mais en règle générale les plaques sont en contact avec le diélectrique.

On suppose que les charges et les champs sont statiques. Par ailleurs, presque invariablement, $\rho_l = 0$ dans le diélectrique et donc $\rho_p = 0$ et $\text{div } \mathbf{P} = 0$, d'après le premier exemple ci-dessus. En négligeant les effets de bord, les densités surfaciques de charge σ_l et σ_p sont uniformes. De même, les vecteurs $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ sont uniformes d'une part dans le diélectrique et d'autre part dans les couches d'air.

Le volume de Gauss G est à cheval sur l'interface air-conducteur. Dans le conducteur, $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{D} = 0$. Donc dans la couche d'air

$$E_a = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_0}, \quad D_a = \sigma_l \quad (7.39)$$

De même, pour le volume de Gauss G' ,

$$E_d = \frac{\sigma_l + \sigma_p}{\varepsilon_0}, \quad D_d = \sigma_l = D_a \quad (7.40)$$

Mais

$$E_d = \frac{D_d}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \quad (7.41)$$

Il vient que

$$\sigma_p = - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \sigma_l \quad (7.42)$$

Bien sûr, $|\sigma_p| = P$ d'après la partie 7.3.

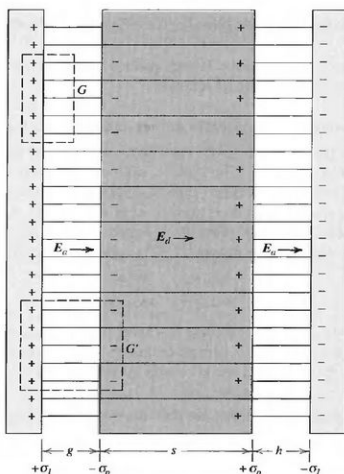


Figure 7.6 Représentation schématique de E à l'intérieur d'un condensateur à faces planes et parallèles contenant une feuille de diélectrique avec $\epsilon_r = 2$.

Bien sûr, les lignes de champ individuelles de E n'existent pas. Ici $|\sigma_p| = |\sigma_l|/2$.

La tension V aux bornes du condensateur est donc

$$V = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0}(g+h) + \frac{\sigma_l}{\epsilon_r \epsilon_0} s = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \left(g + h + \frac{s}{\epsilon_r} \right) \quad (7.43)$$

où $\sigma_l = Q/A$, Q étant la valeur absolue de la charge et A l'aire d'une plaque.

La capacité vaut

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma_l A}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{g + h + s/\epsilon_r} \quad (7.44)$$

Sans couche d'air de chaque côté du diélectrique, $g + h = 0$ et

$$V = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 A} s \quad (7.45)$$

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{s} \quad (7.46)$$

Cette valeur est ϵ_r fois plus grande que la capacité que nous avons trouvée dans la partie 6.4 pour un condensateur à faces planes et parallèles isolé par de l'air.

La mesure d'une capacité, avec et sans diélectrique, constitue une méthode pratique pour mesurer une permittivité relative.

Exemple : Le champ de charges libres noyées dans un diélectrique

Imaginons une petite sphère conductrice de rayon a portant une charge libre Q_l et noyée dans un diélectrique infini, homogène, isotrope, linéaire et stationnaire (HILS). La surface du diélectrique en contact avec la sphère chargée porte une charge liée de signe opposé. En chaque point de la surface de la sphère l'Eq. 7.38 s'applique, et la charge nette à l'intérieur d'une sphère de rayon $r > a$ est Q_l/ϵ_r . Donc, en tout point situé dans le diélectrique à une distance r de la sphère conductrice chargée,

$$E = \frac{Q_l/\epsilon_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_l}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} \quad (7.47)$$

De même, si une distribution donnée de charge libre ρ_l est située à l'intérieur d'un diélectrique comme ci-dessus, la densité de charge totale est ρ_l/ϵ_r et le E en un point quelconque vaut E_0/ϵ_r , où E_0 est le champ qu'on obtiendrait si la distribution de charge libre était située dans le vide.

Si le diélectrique n'est pas infini, on doit alors prendre en considération le champ des charges liées sur la surface.

Cf. exercices : 7.9 ; 7.10 ; 7.11 ; 7.12 ; 7.13 ; 7.14.

7.10 LA DENSITÉ DE COURANT DE DÉPLACEMENT $\partial D/\partial t$

La figure 7.7 représente un condensateur à faces planes et parallèles connecté à un générateur de tension alternative de fréquence $\omega/2\pi$. Les plaques ont une aire A et sont espacées d'une distance s . On suppose que les effets de bord sont négligeables. Alors

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{Es}{1/j\omega C} = j\omega Es \frac{\epsilon_r\epsilon_0 A}{s} \quad (7.48)$$

$$= Aj\omega\epsilon_r\epsilon_0 E = Aj\omega D = A \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{dQ}{dt} \quad (7.49)$$

La densité de courant dans le condensateur est donc $j\omega D$ ou, plus généralement, $\partial D/\partial t$. Cette quantité est appelée la *densité de courant de déplacement* car D était autrefois appelée *déplacement électrique*.

La densité de courant de déplacement est constituée de deux parties :

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (7.50)$$

Le deuxième terme du membre de droite est la densité de courant de polarisation de la partie 7.3, qui provient du mouvement des charges liées. Le premier terme, $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$, n'a pas de nom. Il peut exister même dans le vide.

Nous aurons beaucoup d'occasions de faire référence à la densité de courant de déplacement.

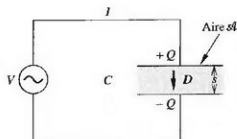


Figure 7.7 Condensateur à faces planes et parallèles connecté à un générateur de tension alternative.

À un instant donné, Q et D ont les polarités indiquées. La densité de courant de déplacement dans le diélectrique est $\partial D / \partial t$.

Cf. exercice 7.15.

7.11 RÉSUMÉ

Dans un *diélectrique polaire*, chaque molécule possède un moment dipolaire permanent. En présence d'un champ électrique appliqué, les molécules s'orientent plus ou moins et leur moment dipolaire augmente. Les molécules d'un *diélectrique non-polaire* acquièrent un moment dipolaire quand elles sont soumises à un champ électrique.

Le moment dipolaire par mètre cube en un point donné est appelé la *polarisation électrique* $\mathbf{P}$.

La polarisation fait s'accumuler des charges liées, avec des *densités surfacique et volumique de charge*

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad \rho_p = -\text{div } \mathbf{P} \quad (7.4, 7.7)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unitaire normal à la surface et orienté vers l'extérieur.

Dans un champ électrique variable, la polarisation variable donne une *densité de courant de polarisation*

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (7.9)$$

La loi de conservation de la charge s'écrit

$$\text{div } \mathbf{J}_t = -\frac{\partial \rho_l}{\partial t} \quad (7.10)$$

On peut calculer $\mathbf{E}$ à l'intérieur comme à l'extérieur d'un diélectrique en traitant les charges libres et liées comme si elles étaient toutes deux situées dans le vide.

Dans les diélectriques, le *théorème de Gauss* stipule que, pour une surface fermée d'aire $\mathcal{A}$,

$$\boxed{\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}} \quad (7.14)$$

où Q est la charge incluse totale, libre plus liée, de densités respectives ρ_l et ρ_p . La forme locale du théorème de Gauss s'écrit

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (7.16)$$

où, à nouveau, $\rho = \rho_l + \rho_p$.

En conséquence, l'équation de Poisson pour V est

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.17)$$

Par définition, l'*induction électrique* est

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (7.21)$$

et donc

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_l \quad (7.22)$$

C'est encore une autre forme du *théorème de Gauss*.

Dans des diélectriques linéaires et isotropes,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (7.26)$$

où χ_e est une constante, indépendante de $\mathbf{E}$, appelée la *susceptibilité diélectrique*. Alors

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (7.27)$$

où ϵ_r est la *permittivité relative* et ϵ la *permittivité* du matériau. En outre,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \quad (7.29)$$

Dans un diélectrique homogène, isotrope et linéaire,

$$\rho_p = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \rho_l \quad (7.32)$$

et le théorème de Gauss s'écrit

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_l}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad (7.34)$$

À l'interface entre un diélectrique et un conducteur, en conditions statiques

$$\sigma_l = D = \epsilon_r \epsilon_0 E, \quad \sigma_p = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_l \quad (7.35, 7.37)$$

avec les conventions de signe de la Fig. 7.5.

La *densité de courant de déplacement* est $\partial \mathbf{D} / \partial t$.

EXERCICES

7.1 Moment dipolaire de l'atome de carbone

Un échantillon de diamant a une masse volumique de $3,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ et une polarisation de 10^{-7} C/m^2 .

- Calculer le moment dipolaire moyen par atome.
- Quelle est la séparation moyenne entre les centres de charge positive et négative ? Le noyau de carbone a une charge de $+6e$ et est entouré par six électrons. Le diamètre d'un atome est de l'ordre de 10^{-10} m .

7.2 Un diélectrique inhomogène

Montrer que, dans un diélectrique inhomogène, si $\rho_l = 0$ alors $\rho_p = -(\epsilon_0/\epsilon_r)\mathbf{E} \cdot \text{grad } \epsilon_r$.

7.3 Densités volumique et surfacique de charge liée ρ_p et σ_p

Considérons un bloc de diélectrique avec des densités de charge liée ρ_p et σ_p . Montrer mathématiquement que

$$\int_V \rho_p dV + \int_A \sigma_p dA = 0$$

où V est le volume du diélectrique et A sa surface. En d'autres termes, la charge liée totale est nulle.

7.4 Champ d'une sphère diélectrique polarisée

La polarisation $\mathbf{P}$ d'une sphère diélectrique donnée est uniforme. On étudie ici une manière élégante de calculer son champ, à l'intérieur et à l'extérieur.

Prenons la somme des champs de deux charges sphériques de densités ρ et $-\rho$, séparées de Δz , Δz étant la distance entre les centres de charge des dipôles individuels. Alors $\mathbf{P} = \rho \Delta z \hat{\mathbf{z}}$ si le vecteur $\mathbf{P}$ est orienté dans la direction positive de l'axe z .

- Montrer que, à l'intérieur, $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$ et qu'il est donc uniforme.
- Montrer que, à l'extérieur, V et $\mathbf{E}$ sont ceux d'un dipôle de moment $\mathbf{P}V$ placé au centre de la sphère de volume V .

7.5 Câble coaxial

Montrer que $\text{div } \mathbf{E} = 0$ dans le diélectrique d'un câble coaxial. Voir les Figs. 20.3 et 24.2.

Suggestion : Appliquer le théorème de la divergence à une portion du diélectrique.

7.6 L'équation de Poisson dans des milieux inhomogènes

Montrer que, dans un milieu inhomogène, $\Delta V + (\text{grad } V \cdot \text{grad } \epsilon)/\epsilon = -\rho_l/\epsilon$.

7.7 Les densités surfaciques de charge sur un diélectrique

La surface d'un diélectrique porte une densité de charge libre σ_l . À l'intérieur du diélectrique, $\rho_l = 0$.

- Trouver E et D au voisinage de la surface, des deux côtés de l'interface.
- Trouver le rapport σ_p/σ_l .

7.8 Bloc de lucite électriquement chargé

Si des électrons de haute énergie bombardent un bloc de matériau isolant comme la lucite, les électrons pénètrent dans le matériau et demeurent piégés à l'intérieur. Si on donne alors au bloc un coup sec avec un objet conducteur, disons un pointeau, les électrons s'échappent, laissant un magnifique dessin arborescent là où le plastique a craqué.

Dans un cas particulier, un faisceau de $0,1 \mu\text{A}$ bombarde une surface de 25 cm^2 de lucite ($\epsilon_r = 3,2$) pendant 1 s, et pratiquement tous les électrons sont piégés à environ 6 mm au-dessous de la surface, dans une région d'environ 2 mm d'épaisseur. Le bloc fait 12 millimètres d'épaisseur.

Dans les calculs suivants, on négligera les effets de bord et on supposera une densité uniforme pour les électrons piégés. On supposera aussi que les deux côtés de la lucite sont en contact avec des plaques conductrices connectées à la terre.

- Quelle est la densité de charge liée dans la région chargée ?
- Quelle est la densité de charge liée à la surface de la lucite ?
- Tracer les graphes de D , E , V en fonction de la position à l'intérieur du diélectrique.
- Montrer que le potentiel au centre de la feuille de charge vaut environ 4 kV.
- Quelle est l'énergie emmagasinée dans le bloc ? Le bloc pourrait-il exploser ?

7.9 Capacité avec et sans diélectrique

Un conducteur A , de forme arbitraire, est connecté à la terre. Un autre conducteur B , de forme et position arbitraires, est maintenu au potentiel V .

Dans l'air, la capacité de l'ensemble est C_0 . Montrer que cette capacité devient $\epsilon_r C_0$ lorsque les conducteurs sont immergés dans une grande masse de diélectrique ϵ_r .

7.10 Condensateur variable avec une carte de circuit imprimé

Une carte de circuit imprimé est une feuille de plastique, d'environ un millimètre d'épaisseur, dont un côté est recouvert d'une fine couche de cuivre.

Une partie du cuivre peut être gravée, laissant des pistes conductrices qui servent à connecter entre eux des résistances, des condensateurs et ainsi de suite.

Les bornes de ces composants sont soudées directement sur le cuivre.

La figure 7.8 représente un condensateur variable dans lequel une plaque conductrice coulissante se trouve en-dessous d'une carte de circuit imprimé qui a été gravée pour fournir une variation donnée de la capacité en fonction de la position z .

À la position z , la capacité vaut

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{1}{t} \int_0^z y \, dz$$

où t est l'épaisseur de la feuille de plastique de permittivité relative ϵ_r .

On prendra $\epsilon_r = 3$, $t = 1 \text{ mm}$.

Trouver $y(z)$ donnant les valeurs suivantes de C , avec C exprimée en farad et z en mètre :

- $10^{-9} z$,
- $10^{-8} z^2$.

Dans les deux cas, tracer une courbe $y(z)$ de $z = 0$ à $z = 100 \text{ mm}$, qui indique la région non gravée sur la carte du circuit.

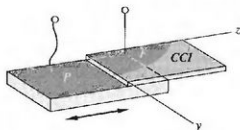


Figure 7.8 Condensateur variable construit avec une carte de circuit imprimé CCI et une plaque conductrice P . La capacité entre les bornes dépend de la position de la plaque P et de la forme de la feuille de cuivre F . Voir le problème 7.10.

7.11 Diélectriques inhomogènes

Montrer qu'un diélectrique inhomogène peut avoir une densité volumique de charge liée en l'absence d'une densité de charge libre.

7.12 Câble coaxial

La figure 24.2 représente une section d'un câble coaxial. Un diélectrique ϵ_r remplit l'espace entre les deux conducteurs. D'après le problème 6.13, la capacité par unité de longueur C' vaut $2\pi\epsilon_r\epsilon_0/\ln(R_2/R_1)$. Le conducteur externe est connecté à la terre et le conducteur interne est au potentiel V_1 .

(a) Calculer la charge par unité de longueur λ sur le conducteur interne.

(b) Montrer que la charge liée par unité de longueur sur la surface interne du diélectrique est $-\lambda(1 - 1/\epsilon_r)$.

Donc la charge nette par unité de longueur au rayon R_1 est λ/ϵ_r . La charge liée par unité de longueur sur la surface externe du diélectrique est, de même, $+\lambda(1 - 1/\epsilon_r)$, et la charge nette par unité de longueur en R_2 est $-\lambda/\epsilon_r$.

(c) Montrer que la densité volumique de charge liée est nulle.

(d) Tracer les graphes de D , E et V en fonction du rayon r de $r = R_1$ à $r = R_2$, pour $V = 100$ V, $R_1 = 1,00$ mm, $R_2 = 10,0$ mm, $\epsilon_r = 3,00$.

7.13 Condensateur à faces planes et parallèles avec un diélectrique non-uniforme

Le diélectrique d'un condensateur à faces planes et parallèles a une permittivité qui varie comme $\epsilon_r + \alpha x$, où x est la distance à l'une des plaques. La surface d'une plaque est A , et leur distance de séparation est s .

(a) Trouver la capacité.

(b) Montrer que, si ϵ_r varie de ϵ_{r0} à $2\epsilon_{r0}$, alors C est 1,44 fois plus grande que si α était nul.

(c) Trouver P à partir de la valeur de D et E dans ce cas.

(d) Déduire la valeur de ρ_p .

(e) Calculer maintenant ρ_p à l'aide de la relation donnée dans le problème 7.2.

(f) Tracer les courbes de E , ρ_p et P en fonction de x pour $\epsilon_{r0} = 3,00$, $\alpha = \epsilon_{r0}/s$, $s = 1,00$ mm quand la tension appliquée est 1,00 V.

7.14 Résistance et capacité entre deux électrodes

Quand l'espace entre les plaques d'un condensateur à faces planes et parallèles est rempli avec un diélectrique ϵ , il a une capacité C . Si le diélectrique est remplacé par un matériau dont la

résistivité $\rho = 1/\sigma$ est beaucoup plus grande que celle des électrodes, la résistance entre les électrodes est R .

(a) Montrer que $RC = \rho\epsilon$, en négligeant les effets de bord.

(b) Montrer que ce résultat est valable aussi pour des condensateurs cylindriques et sphériques.

(c) Montrer que ce résultat est valable pour toute paire d'électrodes immergée dans un milieu dont la résistivité est beaucoup plus grande que celle des électrodes.

On doit pouvoir montrer que le champ n'est pas affecté par la conductivité, dans le cadre de l'approximation ci-dessus.

(d) La capacité par unité de longueur entre deux fils parallèles de diamètre d et distants de D est $C' = \pi\epsilon/\operatorname{arccosh}(D/d)$. Trouver la conductance $G = 1/R$ entre des fils parallèles de 10 mm de diamètre distants de 100 mm et immergés dans de l'eau de mer ($\sigma = 5 \text{ S/m}$).

7.15 Courant entre deux électrodes dans un milieu conducteur

Voir le problème 7.14. Les électrodes de la question (c) sont initialement chargées et se déchargent à travers le milieu. Montrer que $J_t + \partial D/\partial t = 0$.

Chapitre 8

Champs électriques : diélectriques réels, conditions de continuité à une interface. Énergie emmagasinée

Dans ce second et dernier chapitre sur les matériaux diélectriques, nous décrivons d'abord brièvement quelques caractéristiques des diélectriques réels : la conductivité finie, la variation de ϵ_r avec la fréquence et la température, l'anisotropie, la ferroélectricité et l'hystérésis. Nous étudions ensuite les conditions de continuité à l'interface entre deux milieux. Nous aurons besoin de ces conditions à plusieurs occasions. Pour terminer, nous revenons à l'énergie emmagasinée dans un champ électrique, cette fois en présence de diélectriques.

8.1 * LES DIÉLECTRIQUES RÉELS

Certains diélectriques, comme le polyéthylène, sont proches de l'idéal : ils sont homogènes, linéaires et isotropes ; leur conductivité est proche de zéro ; et leur permittivité relative est pratiquement indépendante de la fréquence. Cependant, la plupart des diélectriques ont un comportement plus complexe.

8.1.1 * Les diélectriques avec pertes

On dit des diélectriques qui sont un peu conducteurs qu'ils ont des *pertes*. Par exemple, la plupart des substances naturelles, comme le bois ou le blé, possèdent une faible conductivité associée à la présence d'eau.

Avec des champs électriques alternatifs, il est pratique d'exprimer la conductivité en termes d'une conductivité complexe comme ci-dessous. Considérons un condensateur à faces planes et parallèles contenant un tel matériau, comme sur la Fig. 8.1. Le courant est le même que si on avait un diélectrique idéal non-conducteur dans le condensateur, avec une résistance

$$R = \frac{s}{\sigma A} \quad (8.1)$$

connectée en parallèle, σ étant la conductivité du diélectrique (Partie 4.3).

Alors, d'après la partie 6.6,

$$I = Vj\omega C + \frac{V}{R} = Vj\omega \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{s} + V \frac{\sigma A}{s} \quad (8.2)$$

Il est commode de définir ϵ_r différemment et de réécrire cela ainsi :

$$I = \frac{Vj\omega(\epsilon'_r - j\epsilon''_r)\epsilon_0 A}{s} \quad (8.3)$$

$$= \frac{Vj\omega\epsilon_r\epsilon_0 A}{s} \quad (8.4)$$

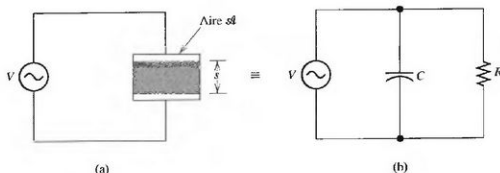


Figure 8.1 Un condensateur à faces planes et parallèles contenant un diélectrique ayant des pertes comme en (a) est équivalent à un condensateur idéal sans pertes, en parallèle avec une résistance R , comme en (b).

Nous avons maintenant étendu la définition de la permittivité relative afin d'y inclure la conduction :

$$\epsilon_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r \quad (8.5)$$

$$\epsilon''_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (8.6)$$

Cette nouvelle ϵ_r est la *permittivité relative complexe*, dont la partie réelle est le ϵ_r de l'Éq. 8.2. Notons le signe négatif devant la partie imaginaire. La partie imaginaire ϵ''_r concerne la dissipation d'énergie en chaleur, et la partie réelle ϵ'_r l'accumulation d'énergie dans le champ électrique.

Sans précision contraire, l'expression *permittivité relative*, comme dans le tableau 7.1, fait référence à la partie réelle de ϵ_r .

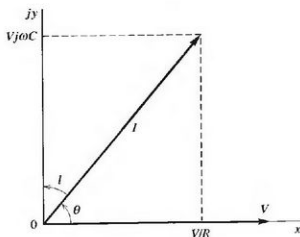


Figure 8.2 Représentation complexe de I et V pour le circuit de la Fig. 8.1(b).

La figure 8.2 montre les grandeurs V et I en représentation complexe, l'angle de pertes I et son angle complémentaire θ , connu comme *angle du facteur de puissance*, pour le circuit de la Fig. 8.1(b).

Cf. exercices : 8.1 ; 8.2 ; 8.3.

8.1.2 * La variation de ϵ_r avec la fréquence et la température

De façon générale, ϵ'_r décroît avec la fréquence, comme dans le tableau 7.1, tandis que ϵ''_r augmente avec la fréquence. Cela n'est qu'une indication de tendance, car les atomes et les molécules possèdent des résonances, spécialement au-dessus de 1 GHz. Les fréquences utilisées pour le *chauffage des diélectriques* vont de quelques megahertz à quelques gigahertz. Les fours à micro-ondes domestiques fonctionnent généralement à 2,45 GHz. Ils agissent sur les molécules d'eau dans les aliments.

Un diélectrique donné peut être polarisé par plus d'un des processus décrits dans la partie 7.1, et l'importance relative d'un processus donné peut varier avec la fréquence. Par exemple, l'eau a une permittivité relative de 81 dans un champ électrostatique et de 1,8 aux fréquences optiques. La valeur statique élevée provient de l'orientation des moments dipolaires permanents, mais l'inertie rotationnelle des molécules empêche toute réponse significative aux fréquences optiques. De même, la permittivité relative du chlorure de sodium est 5,9 dans un champ électrostatique et 2,3 aux fréquences optiques. La valeur statique élevée vient du mouvement ionique, qui est également impossible aux hautes fréquences.

De manière générale, la permittivité d'une substance augmente beaucoup lors de la fusion. Par exemple, ϵ_r pour le nitrobenzène augmente de 3 à 35 au point de fusion, vers 279 K. Dans le solide, les dipôles permanents sont gelés dans le réseau et ne peuvent pas tourner sous l'influence d'un champ appliqué.

Observons que puisque ϵ_r est fonction de la fréquence, elle est strictement définissable seulement pour une onde purement sinusoïdale.

8.1.3 * L'anisotropie

Les solides cristallins possèdent communément des propriétés diélectriques différentes dans des directions cristallines différentes, car les ions peuvent se déplacer plus facilement dans certaines directions que dans d'autres. Par conséquent, leur susceptibilité dépend de la direction et $\mathbf{P}$ n'est pas nécessairement colinéaire à $\mathbf{E}$.

La composante x de $\mathbf{P}$ est donc de la forme

$$P_x = \epsilon_0 (\chi_{exx}E_x + \chi_{exy}E_y + \chi_{exz}E_z) \quad (8.7)$$

et de même pour les deux autres composantes. Les trois composantes de $\mathbf{P}$ dépendent des trois composantes de $\mathbf{E}$. La susceptibilité a donc neuf composantes et est un *tenseur*. En fait, il y a seulement six composantes indépendantes, et si on choisit les axes des coordonnées correctement par rapport au cristal, ces six composantes se réduisent à trois.

Si les différentes composantes de la susceptibilité *ne sont pas* des fonctions de $\mathbf{E}$, alors $\mathbf{P}$ est une fonction linéaire des composantes de $\mathbf{E}$ et le diélectrique est *linéaire*.

Dans des diélectriques anisotropes, il est encore vrai que

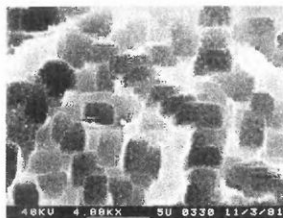
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \text{div } (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_l \quad (8.8)$$

mais les trois vecteurs ne sont généralement pas colinéaires.

8.1.4 * La ferroélectricité

Les diélectriques ferroélectriques ont la propriété particulière de posséder spontanément une polarisation sur des régions cristallines microscopiques appelées *domaines*. La figure 8.3 en montre un cas spécifique. Le mot *ferroélectrique* provient du fait que leur comportement est sous plusieurs aspects similaire à celui de substances ferromagnétiques (Chapitre 16). Quand ils sont placés dans un champ électrique, les domaines qui se trouvent être polarisés correctement croissent au détriment des domaines environnants et, finalement, se rejoignent.

Si la température d'une substance ferroélectrique augmente lentement, la polarisation spontanée varie, généralement de façon complexe, et enfin disparaît au-dessus de la *température de Curie*. Cette température est caractéristique du matériau.



(a)

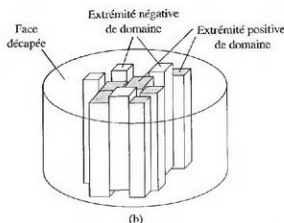


Figure 8.3 (a) Image par microscopie électronique à balayage des domaines ferroélectriques dans le niobate de Potassium-Sodium-Strontium-Baryum.
(b) Diagramme schématique montrant les domaines prismatiques (Xu [57]).

L'avantage principal des diélectriques ferroélectriques dans leur utilisation habituelle dans des *condensateurs céramiques* est qu'ils ont une grande permittivité relative, qui atteint jusqu'à 10 000. De manière générale, ces diélectriques sont des composés du titane.

Certains diélectriques ferroélectriques possèdent des coefficients de température bien définis qui sont utiles dans certaines applications.

Cf. exercices : 8.4 ; 8.5.

8.1.5 * L'hystérésis

Les matériaux ferroélectriques possèdent aussi une propriété appelée *hystérésis*, illustrée en Fig. 8.4. Le rapport D/E dépend alors de l'histoire antérieure du matériau. De tels matériaux sont donc *non-linéaires* car D n'est pas proportionnelle à E .

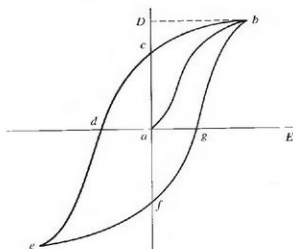


Figure 8.4 Courbe d'hystérésis pour un matériau ferroélectrique typique.
En partant avec un échantillon non-polarisé et $E = 0$ au point a, une augmentation de E fait augmenter D jusqu'au point b. La décroissance ultérieure de E jusqu'à zéro laisse une D résiduelle en c, etc. Donc la valeur de D ne dépend pas seulement de celle de E mais aussi de l'histoire antérieure de l'échantillon.

La permittivité relative $\epsilon_r = D/(\epsilon_0 E)$ d'un échantillon ferroélectrique donné n'a donc pas de valeur définie, et elle peut même être négative. Quand on cite des permittivités relatives pour des matériaux ferroélectriques, comme nous l'avons fait ci-dessus et dans le tableau 7.1, on fait référence à l'ordre de grandeur de $D/(\epsilon_0 E)$ à une certaine distance de l'origine $E = 0, D = 0$, dans les premier et troisième quadrants.

Cf. exercices : 8.6 ; 8.7.

8.2 LES CONDITIONS AUX LIMITES À UNE INTERFACE

8.2.1 Le potentiel V

Le potentiel V est continu à travers la frontière entre deux milieux. Sinon, une discontinuité impliquerait un E infiniment grand, ce qui est physiquement impossible.

8.2.2 La composante normale de D

Considérons un court cylindre imaginaire à cheval sur l'interface et de section A , comme sur la Fig. 8.5. Les faces supérieure et inférieure du cylindre sont proches de l'interface et lui sont parallèles. L'interface porte une densité surfacique de charge libre σ_f .

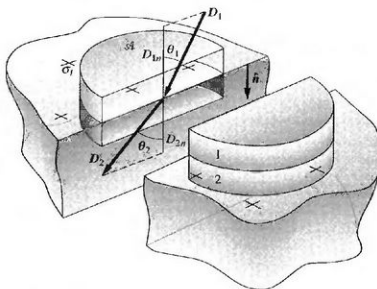


Figure 8.5 Cylindre imaginaire qui traverse l'interface entre les milieux 1 et 2 et qui délimite une surface A .

La différence $D_{2n} - D_{1n}$ entre les composantes normales de D est égale à la densité surfacique de charge libre σ_f .

Suivant le théorème de Gauss (Partie 7.7), le flux net de D sortant du cylindre est égal à la charge libre incluse. Or, le flux de D se réduit à celui à travers les faces supérieure et inférieure, car la hauteur du cylindre est petite. Si maintenant la surface A n'est pas trop grande, D y est approximativement uniforme et alors

$$(D_{2n} - D_{1n})A = \sigma_f A, \quad (D_2 - D_1) \cdot \hat{n} = \sigma_f \quad (8.9)$$

où $\hat{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface et orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

De manière générale, la frontière entre deux diélectriques ne porte pas de charge *libre*, et donc la composante normale de $\mathbf{D}$ est continue à travers l'interface. La composante normale de $\mathbf{E}$ est donc discontinue.

En revanche, si un milieu est conducteur et l'autre diélectrique, et si $\mathbf{D}$ n'est pas fonction du temps, alors $\mathbf{D} = 0$ dans le conducteur et $D_n = \sigma_f$ dans le diélectrique. Si $\mathbf{D}$ est une fonction du temps, l'éq. 8.9 est encore valable, mais $\mathbf{D}$ n'est pas nulle dans le conducteur.

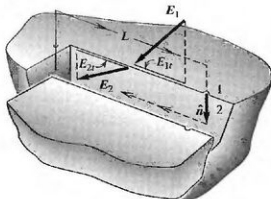


Figure 8.6 Chemin fermé d'intégration qui traverse l'interface entre les milieux 1 et 2. Les composantes tangentielles de $\mathbf{E}$ sont égales : $E_{1t} = E_{2t}$.

8.2.3 La composante tangentielle de $\mathbf{E}$

Considérons maintenant le chemin représenté en Fig. 8.6 avec deux côtés de longueur L parallèles à l'interface et proches d'elle. Les deux autres côtés sont infinitésimaux. Si L est courte, $\mathbf{E}$ ne varie pas significativement sur cette distance et l'intégration sur le chemin donne

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{2t}L - E_{1t}L \quad (8.10)$$

Or, d'après la partie 3.4 cette intégrale curviligne est nulle⁽¹⁾ et donc

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \text{ou} \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (8.11)$$

avec $\hat{\mathbf{n}}$ défini comme ci-dessus. La composante tangentielle de $\mathbf{E}$ est continue à travers toute interface.

8.2.4 La déviation des lignes de $\mathbf{E}$ à une interface

Les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ changent de direction à l'interface entre deux diélectriques linéaires et isotropes différents. Dans la Fig. 8.7, s'il n'y a pas de densité surfacique de charge

(1) L'intégrale curviligne de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ est nulle pour les champs électrostatiques. Plus généralement, elle est égale à moins la dérivée temporelle du flux magnétique à travers la surface que délimite le chemin d'intégration, comme nous le verrons dans la partie 18.2. Pourtant, puisque la surface incluse est nulle ici, le flux est nul et cette équation est générale.

libre, la continuité de la composante normale de $\mathbf{D}$ exige que

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2 \quad (8.12)$$

ou que

$$\epsilon_{r1} \epsilon_0 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 E_2 \cos \theta_2 \quad (8.13)$$

Par ailleurs, la continuité de la composante tangentielle de $\mathbf{E}$ donne

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (8.14)$$

En divisant la troisième équation par la deuxième, il vient

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_{r1}} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_{r2}} \quad (8.15)$$

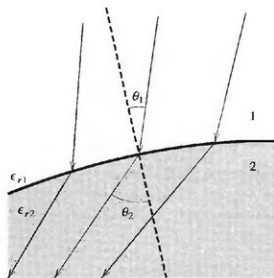


Figure 8.7 Lignes de $\mathbf{E}$ traversant l'interface entre deux milieux 1 et 2. La permittivité du milieu 2 est plus élevée que celle du milieu 1.

L'angle à la normale le plus grand est dans le milieu de permittivité la plus grande. Les lignes de $\mathbf{D}$ « préfèrent » le milieu de permittivité la plus élevée. Cette règle ne s'applique pas aux électrets. Voir le problème 8.10.

Puisque la composante *normale* de $\mathbf{E}$ est discontinue, il existe une densité surfacique de charge liée. D'après le théorème de Gauss,

$$\sigma_p = \epsilon_0 E_2 \cos \theta_2 - \epsilon_0 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_0 E_2 \cos \theta_2 \left(1 - \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \right) \quad (8.16)$$

Par exemple, si le milieu 1 est l'air et le milieu 2 un diélectrique, alors la densité surfacique de charge liée est négative si $\mathbf{E}$ est orienté vers le diélectrique.

Cf. exercices : 8.8 ; 8.10.

8.3 L'ÉNERGIE POTENTIELLE D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGE EN PRÉSENCE DE DIÉLECTRIQUES

Au chapitre 6 nous avons calculé l'énergie emmagasinée dans un champ électrique quand les charges se trouvent soit sur un conducteur soit dans l'espace libre.

L'addition de diélectriques au champ constitue une complication majeure, mais le problème devient traitable avec les hypothèses suivantes.

Les deux premières hypothèses sont réalistes. (1) On suppose que les distributions de charges libre et liée sont de dimensions finies. Ceci rend le potentiel V nul à l'infini. (2) On suppose que les diélectriques sont linéaires ($\mathbf{D}$ est proportionnelle à $\mathbf{E}$), mais pas nécessairement homogènes ou isotropes.

On suppose aussi que les diélectriques sont fixes en position et rigides. En d'autres mots, les diélectriques ne se déforment pas sous l'effet des forces électriques.

8.3.1 L'énergie potentielle exprimée en termes de ρ_l et V , et de $\mathbf{E}$

En un point quelconque,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_l + \rho_p}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma_l + \sigma_p}{r} dA \quad (8.17)$$

comme dans la partie 7.4. Puisque tous les diélectriques dans le champ sont linéaires, par hypothèse, ρ_p est proportionnelle à ρ_l et σ_p à σ_l (Partie 7.9, exemples).

Nous partons d'une densité de charge nulle partout et petit à petit nous apportons des charges de l'infini. Nous omettons les charges de surface pour le moment. Soient V et ρ_l , respectivement, le potentiel et la densité volumique de charge libre finals en un point. À un moment donné, la densité volumique de charge libre est $\alpha\rho_l$, où α augmente petit à petit de zéro à un.

Comme

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} (\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}) = -\epsilon_0 \operatorname{div} (\epsilon_r \operatorname{grad} V) = \rho_l \quad (8.18)$$

V est proportionnel à ρ_l . Le potentiel vaut donc αV quand la densité de charge vaut $\alpha\rho_l$.

Supposons que α augmente jusqu'à $\alpha + d\alpha$. Alors, en un point donné,

$$d\rho_l = \rho_l d\alpha, \quad dV = V d\alpha \quad (8.19)$$

L'énergie nécessaire pour apporter la charge supplémentaire est

$$d\mathcal{E} = \int_V (\rho_l d\alpha) V \left(\alpha + \frac{d\alpha}{2} \right) dV \quad (8.20)$$

où le volume V contient toutes les charges et où $V(\alpha + d\alpha/2)$ est le potentiel moyen pendant l'opération. En négligeant le terme en $(d\alpha)^2$, on trouve que

$$d\mathcal{E} = \int_V (\rho_l V dV) \alpha d\alpha \quad (8.21)$$

$$\mathcal{E} = \int_0^1 \alpha d\alpha \int_V \rho_l V dV = \frac{1}{2} \int_V \rho_l V dV \quad (8.22)$$

L'énergie potentielle emmagasinée dans le champ est donc égale à la moitié de l'intégrale de volume de $\rho_i V$, exactement comme dans le paragraphe 6.1.2. Cependant, V dépend maintenant de la nature, de la forme, des dimensions et de la position des diélectriques situés dans le champ.

En outre, par analogie avec l'Éq. 6.11, on s'attend à ce que

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{\epsilon_r \epsilon_0 E^2}{2} dV \quad (8.23)$$

tant que ϵ_r est à la fois linéaire et isotrope, et la densité d'énergie vaut

$$\mathcal{E}' = \epsilon_r \epsilon_0 E^2 / 2 \quad (8.24)$$

Le lecteur intéressé par une démonstration générale la trouvera au paragraphe 8.3.2 ci-dessous.

Exemple : Condensateur à faces planes et parallèles isolé par un diélectrique

Les condensateurs réels comprennent généralement deux feuilles d'un matériau conducteur séparées par une feuille de diélectrique. Imaginons un condensateur à faces planes et parallèles isolé par un diélectrique. L'une des plaques est connectée à la terre. Quelle est l'énergie nécessaire pour charger l'autre plaque au potentiel V ? C'est $QV/2$, où $Q = VC$. Donc

$$\mathcal{E} = QV/2 = CV^2/2 \quad (8.25)$$

comme dans le premier exemple de la partie 6.4.

Quel est l'effet du diélectrique ? C'est un peu épineux. Pour une charge Q donnée, la présence du diélectrique fait *diminuer* V d'un facteur ϵ_r , d'où une *diminution* du même facteur de l'énergie $\mathcal{E}$ emmagasinée. Mais C est proportionnelle à ϵ_r et, pour un *potentiel* V donné, $\mathcal{E}$ est proportionnelle à ϵ_r .

Disons que le condensateur à faces planes et parallèles a une surface A et une séparation s . Négligeons les effets de bord. Alors

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{s} (sE)^2 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 E^2}{2} sA \quad (8.26)$$

où sA est le volume du diélectrique. Ainsi la densité d'énergie est $\epsilon_r \epsilon_0 E^2 / 2$, comme ci-dessus.

Cf. exercices : 8.9 ; 8.11.

8.3.2 * La densité d'énergie exprimée en termes de E et D : démonstration générale

Notre expérience de pensée ici sera similaire à celle du paragraphe 6.2, doté d'un astérisque.

Supposons qu'il y ait une et une seule région où V est minimale, avec $V_{\min} \leq 0$. De même, il y a une et une seule région où $V = V_{\max} \geq 0$. Les diélectriques sont linéaires.

Imaginons maintenant une surface conductrice d'aire A le long de l'équipotentielle $V = V_{\min}$. Le champ est nul à l'intérieur. Le conducteur se dilate lentement d'une surface équipotentielle à l'autre, balayant le diélectrique et recueillant les charges libres qui se trouvent sur sa route.

Le conducteur porte une densité surfacique de charge libre σ . À la surface, $\mathbf{E}$ est normal et son module est égal à σ/ϵ_0 comme sur la Fig. 8.8. Si le milieu n'est pas isotrope, $\mathbf{D}$ n'est pas parallèle à $\mathbf{E}$. Cependant,

$$\sigma d\mathbf{A} = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} \quad (8.27)$$

en vertu du théorème de Gauss, $\mathbf{D}$ étant nul à l'intérieur du conducteur.

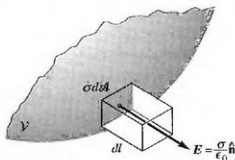


Figure 8.8 Expérience de pensée pour calculer l'énergie emmagasinée dans un champ électrique en présence de diélectriques.

Le volume ombré de surface A est un conducteur qui se dilate lentement d'une surface équipotentielle à l'autre. La densité surfacique de charge est σ . L'élément de surface $d\mathbf{A}$ se déplace d'une distance dl .

Disons que l'élément de surface $d\mathbf{A}$ se déplace d'une distance dl comme sur la figure, dl étant normal à la surface. Le travail effectué alors par le champ sur la charge $\sigma d\mathbf{A}$ est

$$d\mathcal{E} = (\sigma d\mathbf{A}) \left(\frac{E}{2} \right) dl \quad (8.28)$$

le champ qui agit sur $\sigma d\mathbf{A}$ étant $E/2$, d'après la partie 6.7. Donc

$$d\mathcal{E} = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} \frac{E}{2} dl = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} d\mathbf{A} dl = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} dV \quad (8.29)$$

La surface conductrice continue à se dilater jusqu'à ce qu'elle atteigne l'équipotentielle $V = V_{\max}$. À la fin, elle a balayé tout l'espace, les charges libres ont été soit déplacées à l'infini soit neutralisées par l'addition de charges opposées sur la surface conductrice, et $\mathbf{E}$ est nul partout.

Le travail total effectué par le champ est donc

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad (8.30)$$

et la densité d'énergie est

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (8.31)$$

Si les diélectriques sont non seulement linéaires mais aussi isotropes, alors $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ et

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} dV \quad (8.32)$$

La densité d'énergie est alors $\epsilon_r \epsilon_0 E^2 / 2$. Cette intégrale s'étend sur tout le volume occupé par le champ.

Cf. exercices : 8.12 ; 8.13.

8.4 LES FORCES ÉLECTRIQUES EN PRÉSENCE DE DIÉLECTRIQUES

La densité *surfactive* de force électrique sur un conducteur est égale à la densité *volumique* d'énergie dans le champ, comme dans la partie 6.5, même si des diélectriques sont présents. C'est une règle simple à garder en mémoire. Bien sûr, s'il y a un diélectrique la densité d'énergie est $\epsilon_r \epsilon_0 E^2 / 2$ comme dans l'Éq. 8.32, au lieu de $\epsilon_0 E^2 / 2$. La méthode du travail virtuel pour calculer des forces s'applique.

Imaginons un condensateur à faces planes et parallèles qui peut être immergé dans un diélectrique liquide. Pour un E donné sur la surface d'une plaque, la présence du diélectrique *augmente* la densité d'énergie d'un facteur ϵ_r , et donc *augmente* la densité de force électrique sur cette plaque du même facteur.

Pour une densité de charge libre σ_l donnée, sur les plaques, le diélectrique n'a pas d'effet sur D : $D_d = D_a$. Alors $E_d = E_a / \epsilon_r$, la densité d'énergie $\epsilon_r \epsilon_0 E^2 / 2$ *décroît* d'un facteur ϵ_r et la densité de force *décroît* du même facteur.

Le cas des diélectriques solides est le mieux illustré par les problèmes 8.13 à 8.15. On peut aussi se référer au troisième exemple de la partie 7.9.

Cf. exercices : 8.14 ; 8.15 ; 8.16 ; 8.17 ; 8.18.

8.5 RÉSUMÉ

Bien que certains diélectriques soient proches de l'idéal, la plupart ont un comportement plus complexe. Si la conductivité σ d'un diélectrique n'est pas négligeable, sa *permittivité relative complexe* est alors

$$\epsilon_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r, \quad \epsilon''_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (8.5, 8.6)$$

Généralement, ϵ'_r *décroît* avec la fréquence et ϵ''_r *augmente*. Les effets de la température peuvent être grands.

Certains diélectriques sont *anisotropes*. Chaque composante de $\mathbf{P}$ dépend alors des trois composantes de $\mathbf{E}$ et la susceptibilité est un tenseur.

Les *diélectriques ferroélectriques* possèdent de grandes permittivités et de l'*hystérésis* : la valeur de $\mathbf{D}$ dépend des valeurs antérieures de $\mathbf{E}$.

À l'interface entre deux milieux, à la fois V et la composante tangentielle de $\mathbf{E}$ sont continus. La composante normale de $\mathbf{D}$ peut être discontinue, cependant, la discontinuité étant égale à la densité surfacique de charge libre sur l'interface.

Les lignes de $\mathbf{E}$ sont déviées à une interface, l'angle le plus grand à la normale étant dans le diélectrique de permittivité la plus élevée.

L'énergie potentielle emmagasinée dans une distribution de charge, en présence de diélectriques, est donnée soit par

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V \rho_l V dV \quad (8.22)$$

où V est un volume quelconque contenant toutes les charges libres du système, soit par

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad (8.30)$$

où V inclut maintenant toutes les régions où le champ $\mathbf{E}$ de la distribution de charge existe. Pour des diélectriques linéaires et isotropes,

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 dV \quad (8.23, 8.32)$$

On peut donc assigner à un champ électrique une densité d'énergie $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$ ou, pour des diélectriques linéaires et isotropes, $\epsilon_r \epsilon_0 E^2/2$. La densité de force électrique sur un conducteur est égale à la densité d'énergie dans le champ.

EXERCICES

8.1 Condensateur à faces planes et parallèles avec un diélectrique conducteur

Note : Dans ce problème on note la densité surfacique de charge σ_{ch} et la conductivité σ_{co} .

Le diélectrique d'un condensateur à faces planes et parallèles a une permittivité relative ϵ_r et une conductivité σ_{co} . La conductivité du diélectrique est beaucoup plus faible que celle des plaques, ce qui fait que $\mathbf{E}$ est uniforme entre les plaques.

(a) On suppose des densités surfaciques de charge σ_{ch} sur les plaques. Utiliser le théorème de Gauss pour relier $\mathbf{E}$ à σ_{ch} . Le condensateur est équivalent à une résistance plus un condensateur idéal en parallèle.

(b) Montrer que si on déconnecte le condensateur, sa charge décroît d'un facteur e en ϵ/σ_{co} seconde. C'est le temps de relaxation du condensateur.

8.2 Condensateur à faces planes et parallèles avec deux diélectriques conducteurs

Le diélectrique d'un condensateur à faces planes et parallèles est constitué de deux parties, comme en Fig. 8.9.

Calculer la densité surfacique de charge à l'interface.

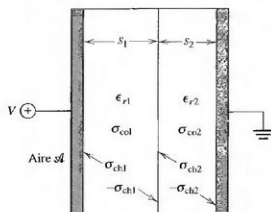


Figure 8.9

8.3 Condensateur à faces planes et parallèles avec un diélectrique non-uniforme

Un condensateur à faces planes et parallèles a des plaques de surface $\mathcal{A}$ séparées par une distance s . Son diélectrique a une conductivité $\sigma = a + bx$, où x est la distance à l'une des plaques, et une permittivité relative uniforme ϵ_r .

- Calculer la résistance R du condensateur.
- Montrer qu'avec une tension continue V appliquée aux électrodes, il y a une densité volumique de charge libre uniforme.
- Esquisser les lignes de $\mathbf{E}$ pour $b > 0$. Le champ n'est pas uniforme.
- Avec une tension alternative aux électrodes,

$$I = \mathcal{A} \left(\sigma E + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = \mathcal{A} I_t$$

Montrer que $\text{div } \mathbf{J}_t = 0$. J_t est alors indépendante de x .

- Trouver ρ_l .

8.4 Condensateur céramique

Soit un condensateur céramique cylindrique, constitué de trois électrodes comme sur la figure 8.10. Chaque disque de céramique a un diamètre de 21 mm et une épaisseur de 0,5 mm. La capacité nominale est 0,05 μF , avec une tolérance de -20% à $+80\%$. Quelle est la valeur approchée de ϵ_r ?

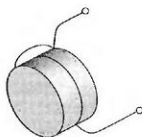


Figure 8.10

8.5 Courbe d'hystérésis d'un matériau ferroélectrique

La figure 8.11 représente le schéma d'un instrument qui a été utilisé pour tracer les courbes d'hystérésis des matériaux ferroélectriques. Un oscillateur applique une tension alternative V à deux condensateurs en série, le condensateur à faces planes et parallèles C_x contenant le matériau et un condensateur normal $C \gg C_x$. La tension aux bornes de C est envoyée à l'entrée Y d'un enregistreur XY , tandis que la tension aux bornes de $R_2 \ll R_1$ est envoyée à l'entrée X . L'échantillon ferroélectrique fait quelques millimètres d'épaisseur, et $V_m \approx 10 \text{ kV}$, $f \approx 10^{-2} \text{ Hz}$.

Expliquer pourquoi la tension aux bornes de C est proportionnelle au D dans l'échantillon contenu dans C_x , tandis qu'aux bornes de R_2 elle est proportionnelle à E . L'enregistreur ne débite quasiment aucun courant à ses bornes X et Y .

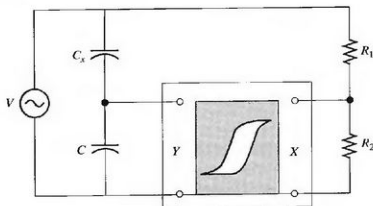


Figure 8.11

8.6 Énergie emmagasinée dans un diélectrique non-linéaire

Un condensateur à faces planes et parallèles dont le diélectrique est non-linéaire est connecté à un générateur de tension. La tension V augmente légèrement de dV , et une charge supplémentaire dQ s'accumule dans le condensateur. Montrer que la densité d'énergie emmagasinée augmente de $E dD$.

8.7 Hystérésis dans les matériaux ferroélectriques

Montrer que la surface de la boucle d'hystérésis pour un matériau ferroélectrique est égale à l'énergie dissipée par mètre cube et par cycle.

8.8 Conditions aux limites à l'interface entre deux conducteurs

Montrer que, à l'interface entre deux conducteurs

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad |(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) \times \hat{\mathbf{n}}| = \frac{d\sigma_{ch}}{dt}$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface orienté du conducteur 1 vers le conducteur 2, et où σ_{ch} est la densité surfacique de charge sur l'interface.

8.9 Stockage capacitif d'énergie pour un petit véhicule

Étudier la possibilité de propulser un petit véhicule avec un moteur électrique alimenté par un condensateur chargé. On ne considère que le problème du stockage de l'énergie.

(a) Montrer que la densité d'énergie maximale dans le diélectrique d'un condensateur à faces planes et parallèles est $\epsilon a^2/2$, où a est la rigidité diélectrique de l'isolant, c'est-à-dire le E maximal avant claquage. Un bon diélectrique à utiliser serait le Mylar, qui sous forme de feuilles fines a une rigidité diélectrique de $1,6 \times 10^8$ V/m et une permittivité relative de 3,2.

(b) Calculer la densité d'énergie ainsi que les dimensions et la masse approchées du condensateur qui serait nécessaire pour faire fonctionner un moteur d'un kilowatt pendant 1 heure.

8.10 Barreau d'électret

La figure 7.4 représente les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ pour un barreau d'électret.

(a) Montrer que les lignes de $\mathbf{E}$ ne sont pas déviées sur la surface cylindrique mais que les lignes de $\mathbf{D}$ le sont.

(b) Montrer que l'inverse est vrai aux extrémités.

8.11 Stockage d'énergie dans les condensateurs

Un condensateur d'un microfarad est chargé sous un potentiel d'un kilovolt.

À quelle hauteur pourrait-on soulever une masse d'un kilogramme avec l'énergie stockée si on atteignait une efficacité de 100 % ?

8.12 Énergie potentielle d'un dipôle placé dans un champ électrique

(a) Un dipôle de moment dipolaire fixe $\mathbf{p}$ s'oriente dans un champ électrique uniforme $\mathbf{E}$. Montrer que son énergie potentielle est $-pE$, en supposant que l'énergie potentielle est nulle quand l'axe du dipôle est perpendiculaire au champ.

(b) Une molécule non-polaire acquiert un moment dipolaire dans un champ électrique uniforme qui augmente graduellement de zéro à E . Montrer que son énergie potentielle est $+pE/2$.

8.13 Accélérateur pour molécules neutres

Il existe des accélérateurs pour molécules neutres qui fonctionnent de la façon suivante. La figure 8.12 représente une paire de sphères qui portent des charges $+Q$ et $-Q$, et une molécule de moment dipolaire $\mathbf{p}$. La molécule accélère vers les sphères jusqu'à atteindre leur point médian.

À ce moment les sphères sont déchargées, et la molécule continue sa route à vitesse constante. De tels accélérateurs servent à étudier les processus qui ont lieu pendant les collisions moléculaires.

(a) Trouver l'énergie cinétique acquise par la molécule si la distance x de la figure est initialement beaucoup plus grande que la distance D entre les électrodes. On considérera les sphères comme des charges ponctuelles, et on appliquera le principe de conservation de l'énergie. On supposera $\mathbf{p}$ constant et on se référera au problème 8.12. Le moment dipolaire augmente en fait pendant que la molécule s'approche, de telle sorte qu'on sous-estime l'énergie.

(b) Dans l'un de ces accélérateurs, la tension des électrodes est ± 40 kV, leur rayon 0,25 mm et $D = 1,00$ mm. Calculer la valeur approchée de l'énergie cinétique d'une molécule en eV pour $p = 2 \times 10^{-29}$ C.m et pour 700 étages. Cet accélérateur a une longueur de 10 mètres.

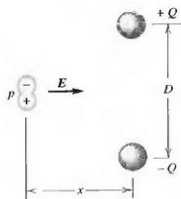


Figure 8.12

8.14 Brides électrostatiques

Les brides électrostatiques sont utilisées pour bloquer les pièces à travailler pendant leur usinage, pour tenir les substrats en silicium pendant la micro-fabrication à faisceau d'électrons, etc. Elles comprennent une plaque conductrice isolée maintenue à un potentiel de plusieurs milliers de volt et couverte d'une fine feuille isolante. La pièce à travailler ou le substrat repose sur la feuille et est connecté à la terre. Il est conseillé d'appliquer un film d'huile sur la feuille pour éviter les étincelles.

Certaines de ces brides fonctionnent à 3 000 V et ont une résistance à l'arrachement de 2 atm (2×10^5 Pa). Si l'isolant est du Mylar ($\epsilon_r = 3,2$), quelle est son épaisseur ?

8.15 Condensateur auto-serrant

Un condensateur consiste en deux plaques circulaires d'aluminium polies, de diamètre 237 mm, séparées par une feuille de plastique de 0,762 mm d'épaisseur et de permittivité relative 3,0. De minces couches d'air demeurent entre les électrodes et le plastique. Cela réduit la capacité en-dessous de la valeur nominale, et il n'y a pas de moyen de serrer les plaques mécaniquement avec suffisamment de force.

- Quelqu'un suggère que la seule force électrique pourrait suffire pour serrer les plaques, à la tension de fonctionnement de 60 kV. Qu'en pensez-vous ?
- Montrer que, si le condensateur complet est immergé dans une huile avec $\epsilon_r \approx 3$, la force est trois fois moindre. Voir le problème suivant.

8.16 Force de serrage avec et sans film d'air

Dans le problème 8.15, on a trouvé que la force électrique de serrage sur un condensateur est plus grande d'un facteur ϵ_r quand il y a des couches d'air entre les électrodes et le diélectrique, pour une tension donnée, ou un E donné. Cela est paradoxal. Pour un E donné, la densité d'énergie est ϵ_r fois *plus grande* dans le diélectrique que dans l'air. Alors la force devrait être ϵ_r fois *plus grande* quand il n'y a pas d'air.

Expliquer ce paradoxe en considérant les trois condensateurs de la figure 8.13. En (2) le film d'air est beaucoup plus fin que le diélectrique. La distance entre les électrodes est s dans les trois condensateurs.

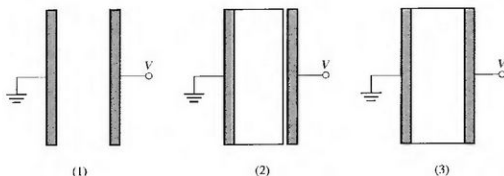


Figure 8.13

8.17 Forces électriques, avec et sans diélectrique

Dans l'exemple du paragraphe 8.3.1, on a vu que les forces électriques sur un conducteur immergé dans un diélectrique liquide sont *plus grandes* que dans l'air du facteur ϵ_r si les *tensions* sont les mêmes. Elles sont *plus petites* que dans l'air du même facteur ϵ_r si les *charges* sont les mêmes.

Montrer que ceci n'est pas en contradiction avec les problèmes 8.15 et 8.16, où on avait un diélectrique solide avec de minces couches d'air ou d'huile sur les électrodes.

⑧ 8.18 Exemple d'une force électrique élevée

Un auteur prétend qu'il peut atteindre des champs de 4×10^7 V/m sur une distance de 2,5 mm dans du nitrobenzène purifié ($\epsilon_r = 35$), et que la force électrique résultante par unité de surface sur les électrodes est alors supérieure à deux atmosphères.

La force est-elle réellement si grande ?

Une atmosphère vaut environ 10^5 Pa.

Chapitre 9

*** Champs électriques** **Les images. L'équation de Laplace** **en coordonnées cartésiennes**

Jusqu'ici nous avons limité notre discussion des champs électriques à des considérations générales et à des distributions de charge simples. Nous calculons maintenant des champs plus complexes, dans ce chapitre ainsi que dans le suivant. Cela complètera notre étude des champs purement électriques.

9.1 * LES IMAGES

Si une distribution de charge électrique se trouve dans un diélectrique en contact avec un corps conducteur, alors la méthode des images fournit souvent la meilleure façon de calculer le champ électrique. Cette méthode s'explique le plus facilement à l'aide d'exemples, comme les deux qui suivent, et est illustrée par la Fig. 9.1.

Appelons Q la distribution de charge et C le conducteur. On remplace C , en pensée, par une autre distribution de charge telle que les conditions aux limites originales sont conservées. Alors le champ à l'extérieur de C n'est pas modifié, selon le théorème d'unicité du paragraphe 4.1.1. La seconde distribution de charge, fictive, est appelée *image* de Q .

Si Q est située dans un diélectrique en contact avec un autre diélectrique, alors on peut calculer les champs dans les deux diélectriques de manière similaire, comme nous le verrons dans le deuxième exemple ci-après.

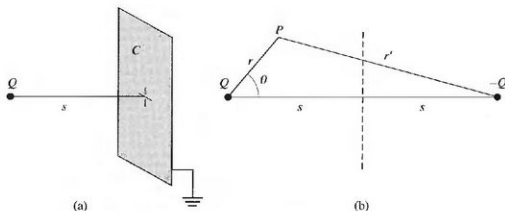


Figure 9.1 (a) Charge ponctuelle Q près d'une grande feuille conductrice C connectée à la terre.
 (b) On a remplacé la feuille conductrice par la charge image $-Q$.
 Le champ à gauche de la ligne pointillée n'est pas affecté.

Exemple : * Charge ponctuelle près d'une plaque conductrice connectée à la terre

La figure 9.1(a) représente une charge ponctuelle Q située à une distance s d'une grande plaque conductrice connectée à la terre⁽¹⁾.

De toute évidence, si on retire la plaque et si on ajoute une charge image $-Q$ à une distance s plus loin, comme sur la Fig. 9.1(b), alors chaque point du plan occupé auparavant par la plaque sera équidistant des deux charges et sera donc au potentiel nul. Le champ dans la région à gauche de la position occupée auparavant par la plaque est donc le même dans les deux figures.

Cela est remarquable. L'image donne une solution triviale d'un problème qui serait autrement assez difficile.

La figure 9.2 représente les lignes de champ de E et les lignes équipotentielles.

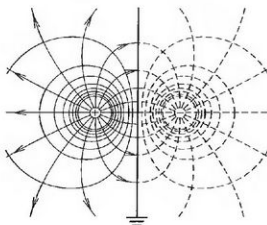


Figure 9.2 Lignes de E (flèches) et lignes équipotentielles pour le champ de la Fig. 9.1.
 Les lignes équipotentielles et les lignes de champ près de la charge sont trop serrées pour être visibles à cette échelle. En faisant tourner la figure autour de l'axe de symétrie horizontal on peut engendrer les surfaces équipotentielles.

(1) La Terre porte une charge négative, et, près de sa surface, le champ électrique vaut environ 100 V/m. Cependant, le champ de Q est indépendant du champ de la terre, en vertu du principe de superposition.

Exemple : * Charge ponctuelle près d'un diélectrique

Notre charge ponctuelle Q se trouve maintenant dans l'air près d'un grand bloc de diélectrique comme dans la Fig. 9.3. Nous voulons connaître $\mathbf{E}$ des deux côtés de l'interface.

On pourrait calculer $\mathbf{E}$ sans utiliser les images de la façon suivante. Le champ de Q polarise le diélectrique, et une densité surfacique de charge liée σ_p apparaît sur l'interface. Alors le $\mathbf{E}$ en chaque point des deux côtés de l'interface est le même que si on avait la charge ponctuelle Q et la feuille de charges liées de densité σ_p placée dans le vide. Comme nous le verrons, il est assez simple de trouver σ_p . Mais calculer ensuite $\mathbf{E}$ serait assez délicat. Le problème est beaucoup plus facile à résoudre avec des images.

On calcule d'abord la valeur de la composante normale de $\mathbf{E}$ près de l'interface et des deux côtés de celle-ci. C'est cette composante normale, E_n , que l'on utilisera comme condition aux limites. Au cours de ce calcul, on trouve aussi σ_p .

La partie de E_n attribuable à Q est $[Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)]$ (s/r). Ce champ est le même des deux côtés de l'interface, comme sur la Fig. 9.3.

D'après le théorème de Gauss, σ_p donne des deux côtés de l'interface des champs normaux de même module $\sigma_p/(2\epsilon_0)$, orientés comme sur la figure. On trouvera que le signe de σ_p est opposé à celui de Q .

Par conséquent, juste à l'intérieur du diélectrique la composante normale de $\mathbf{E}$ orientée vers la droite est

$$E_{n\text{int}} = \frac{Qs}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0} \quad (9.1)$$

Or, selon les Éqs. 7.4 et 7.29,

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P_n = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_{n\text{int}} \quad (9.2)$$

où le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{n}}$ est normal à l'interface et orienté vers la gauche. Donc

$$\sigma_p = -\frac{(\epsilon_r - 1)Qs}{2\pi(\epsilon_r + 1)r^3} \quad (9.3)$$

Comme attendu, Q et σ_p sont de signes opposés.

Si nous prenons la direction positive vers la droite, la composante normale de $\mathbf{E}$ à l'extérieur et à l'intérieur du diélectrique vaut respectivement

$$E_{n\text{ext}} = \left(1 + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\right) \frac{Qs}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (9.4)$$

$$= \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \frac{Qs}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (9.5)$$

$$E_{n\text{int}} = \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\right) \frac{Qs}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (9.6)$$

$$= \frac{2}{\epsilon_r + 1} \frac{Qs}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (9.7)$$

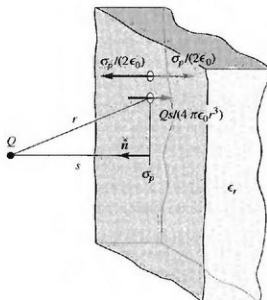


Figure 9.3 Charge ponctuelle Q près d'un grand bloc de diélectrique. Les flèches pour le champ sont orientées selon l'hypothèse que Q et σ_p sont toutes deux positives. Si Q est positive, σ_p est, en fait, négative.

Puisque $\epsilon_r E_{n\text{int}} = E_{n\text{ext}}$, la composante normale de $\mathbf{D}$ est continue à l'interface. Ce résultat était attendu, car la densité surfacique de charge libre est nulle.

Grâce au théorème d'unicité et aux images, notre problème est presque résolu.

Le champ $E_{n\text{ext}}$ à gauche de l'interface

- 1) La condition aux limites est précisée dans les Éqs. 9.4 et 9.5. D'après l'Éq. 9.4, nous pouvons retirer le diélectrique et le remplacer par une charge image Q' , comme en Fig. 9.4(a), sans affecter $E_{n\text{ext}}$. Puis, selon le théorème d'unicité, le champ partout à gauche de l'interface est simplement le champ de Q plus celui de Q' .
- 2) Par ailleurs, selon l'Éq. 9.5, $E_{n\text{ext}}$ n'est pas affecté non plus si on retire le diélectrique et qu'on remplace Q par une charge

$$Q''' = -\frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}Q \quad (9.8)$$

comme sur la Fig. 9.4(b).

Le champ $E_{n\text{int}}$ à droite de l'interface

- 1) D'après l'Éq. 9.6, $E_{n\text{int}}$ est le même que si on avait, à la place de Q et du diélectrique, la charge Q et une charge $-Q'$ à une distance s à droite de l'interface.
- 2) Selon l'Éq. 9.7, le champ à droite de l'interface est le même que s'il n'y avait pas de diélectrique et qu'une charge Q'' remplaçait la charge Q , comme sur la Fig. 9.4(c).

La figure 9.5 représente les lignes de $\mathbf{D}$ et les lignes équipotentielles pour ce champ.

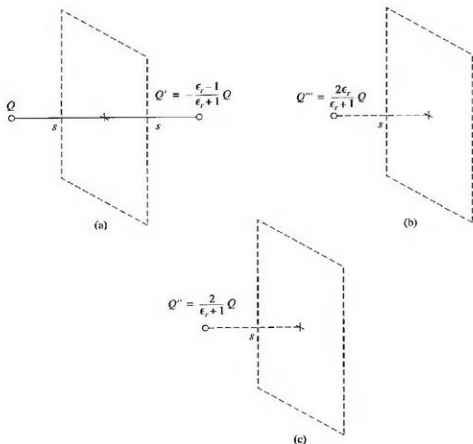


Figure 9.4 (a), (b) Le champ à gauche de l'interface sur la Fig. 9.3 est le même que celui de ces charges. (c) Le champ à droite de l'interface est le même que celui de la Fig. 9.3.

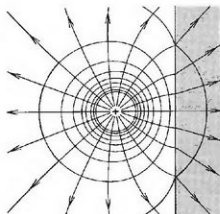


Figure 9.5 Lignes de D (flèches) et lignes équipotentiels pour une charge ponctuelle située près d'un diélectrique.

En faisant tourner la figure autour de l'axe de symétrie horizontal, on peut engendrer les surfaces équipotentiels. La figure ne montre pas les lignes équipotentiels près de la charge ponctuelle.

Cf. exercices : 9.3 ; 9.4 ; 9.5.

9.2 * LA RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE LAPLACE EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Les solutions de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ sont connues sous le nom de *fonctions harmoniques*. Ces fonctions possèdent un certain nombre de propriétés générales, parmi lesquelles nous utiliserons la suivante. Si on peut trouver des solutions $V_1, V_2, V_3, \dots$ de l'équation de Laplace, alors toute combinaison linéaire $A_1 V_1 + A_2 V_2 + A_3 V_3 + \dots$, où les A_i sont des constantes, est aussi une solution. Cela devient évident si on substitue la somme dans l'équation originale.

De manière générale, on peut résoudre l'équation de Laplace par *séparation des variables*. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on peut chercher des solutions de la forme

$$V = X(x) Y(y) Z(z) \quad (9.9)$$

où X est fonction uniquement de x , Y uniquement de y et Z uniquement de z . En substituant dans l'équation de Laplace on obtient

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + ZX \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (9.10)$$

En divisant par XYZ il vient

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (9.11)$$

où le premier terme ne dépend que de x , et de même pour les deux autres termes.

Puisque la somme de ces trois termes est nulle en tout point du champ, chacun est égal à une constante et

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = C_1 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2 Y, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} = C_3 Z \quad (9.12)$$

avec

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 \quad (9.13)$$

Nous avons maintenant séparé les variables. En résolvant séparément ces trois équations on obtient X, Y, Z et donc V .

Observons à quel point cela est astucieux : nous avons transformé une équation aux dérivées partielles selon les trois variables x, y, z en trois équations différentielles ordinaires simples en x , en y , et en z .

Quelquefois, comme dans l'exemple ci-dessous, on doit sommer un nombre infini de ces solutions, chacune multipliée par un coefficient approprié, pour satisfaire des conditions aux limites données.

Exemple : * Champ entre deux plaques conductrices à des potentiels différents

Voici un exemple très simple. La figure 9.6 représente deux électrodes planes et parallèles séparées par une distance a , l'électrode inférieure étant connectée à la terre et la supérieure maintenue à un potentiel V_0 . Le milieu entre les plaques est l'air. On suppose que le champ entre les plaques est indépendant de x et z , et on néglige les

effets de bord. Alors la tension V en un point arbitraire entre les plaques satisfait les équations

$$\partial V / \partial x = 0, \quad \partial V / \partial z = 0 \quad (9.14)$$

et

$$\partial^2 V / \partial x^2 = 0, \quad \partial^2 V / \partial z^2 = 0 \quad (9.15)$$

Ainsi l'équation de Laplace se réduit à

$$\partial^2 V / \partial y^2 = 0 \quad (9.16)$$

et

$$\partial V / \partial y = K \quad (9.17)$$

où K est une constante, de telle sorte que

$$V = Ky \quad (9.18)$$

avec $V = 0$ en $y = 0$. Mais $V = V_0$ en $y = a$. Donc $K = V_0/a$ et, à une distance y au-dessus de la plaque inférieure, avec $y \leq a$,

$$V = (V_0/a)y \quad (9.19)$$

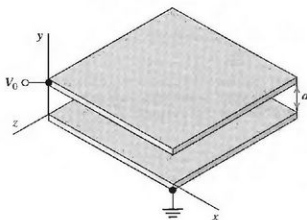


Figure 9.6 Paire d'électrodes planes et parallèles.

Que valent les densités surfaciques de charge sur les électrodes ? L'électrode positive porte une densité surfacique de charge positive donnée par le théorème de Gauss de la partie 3.6 : elle vaut $\epsilon_0 E$, ou $\epsilon_0 V_0/a$. L'électrode négative porte une charge de même densité, mais négative.

Exemple : * *Champ entre deux électrodes parallèles semi-infinies connectées à la terre et fermées par une électrode portée à un potentiel fixe. Série de Fourier.*

La figure 9.7 représente les électrodes. On veut trouver $V(x, y)$ entre les plaques. Par hypothèse, le champ est indépendant de z et $C_3 = 0$. Alors

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y \quad (9.20)$$

Nous avons remplacé C_1 par k^2 et C_2 par $-k^2$ pour éviter des racines carrées dans la solution. Comme nous allons le voir immédiatement, C_2 est forcément négative.

On résoud l'équation en Y en posant

$$Y = A \sin ky + B \cos ky \quad (9.21)$$

où A et B sont des constantes. Cette solution se vérifie facilement par substitution.

V doit maintenant satisfaire les conditions aux limites suivantes : (1) $V = 0$ en $y = 0$ et $y = b$; (2) $V = V_0$ en $x = 0$; (3) $V \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$.

Puisque $V = 0$ en $y = 0$, alors $B = 0$.

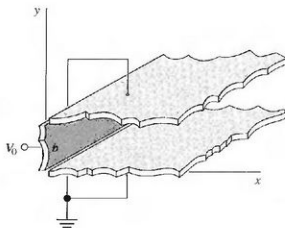


Figure 9.7 Électrodes planes, parallèles, semi-infinies, connectées à la terre et terminées par une électrode plane au potentiel V_0 .

En outre, la condition $V = 0$ en $y = b$ impose que

$$kb = n\pi, \quad k = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9.22)$$

Donc

$$Y = A \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9.23)$$

Nous omettons la valeur $n = 0$ car elle correspond à un champ nul.

L'équation différentielle pour X est maintenant

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X \quad (9.24)$$

et

$$X = G \exp \frac{n\pi x}{b} + H \exp \left(-\frac{n\pi x}{b} \right) \quad (9.25)$$

où G et H sont des constantes d'intégration. On peut encore vérifier cette solution par substitution. Puisque V tend vers zéro quand x tend vers l'infini, $G = 0$. Alors

$$V = XY = C \sin \frac{n\pi y}{b} \exp \left(-\frac{n\pi x}{b} \right) \quad (9.26)$$

où C est une autre constante.

Mais ce n'est pas correct ! Même si V satisfait les conditions (1) et (3), il ne satisfait évidemment pas la condition (2). On peut satisfaire aussi la condition (2) en sommant un nombre infini de telles solutions :

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b} \exp \left(-\frac{n\pi x}{b} \right) \quad (9.27)$$

On utilise ensuite la condition (2) pour évaluer les coefficients C_n , en posant $x = 0$. Ainsi

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9.28)$$

pour tout y entre 0 et b .

Une série infinie de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \sin \frac{n\pi y}{b} + D_n \cos \frac{n\pi y}{b} \right)$$

où C_n et D_n sont des constantes est une *série de Fourier* et forme un *ensemble complet* : pour une fonction $V(y)$ donnée au comportement raisonnable⁽¹⁾ définie dans l'intervalle $y = 0$ à $y = b$, il existe une série de Fourier qui est égale à $V(y)$ dans cet intervalle⁽²⁾.

On peut calculer les valeurs des coefficients C_n par une technique astucieuse inventée par Fourier. D'abord on multiplie les deux membres de l'Éq. 9.28 par $\sin(p\pi y/b)$, où p est un entier, puis on intègre de $y = 0$ à $y = b$:

$$\int_0^b V_0 \sin \frac{p\pi y}{b} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b C_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi y}{b} dy \quad (9.29)$$

Du côté gauche,

$$\int_0^b V_0 \sin \frac{p\pi y}{b} dy = \begin{cases} \frac{2bV_0}{p\pi} & \text{si } p \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases} \quad (9.30)$$

Les termes d'une série de Fourier sont dits *orthogonaux*. À droite,

$$\int_0^b C_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \frac{C_n b}{2} & \text{si } p = n \end{cases} \quad (9.31)$$

(1) Par « fonction au comportement raisonnable » nous désignons une fonction qui est continue ou au moins continue par morceaux, et qui ne devient infinie en aucun point. La plupart des conditions aux limites rencontrées en pratique possèdent ces caractéristiques.

(2) Sauf éventuellement aux extrémités $y = 0$ et $y = b$, mais cette différence entre $V(y)$ et la série de Fourier est habituellement sans importance en pratique.

Il s'ensuit que

$$C_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad (9.32)$$

Finalement,

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp\left(-\frac{n\pi x}{b}\right) \quad (9.33)$$

Les termes successifs de la série deviennent progressivement moins importants, à cause du facteur $1/n$, mais surtout à cause de la fonction exponentielle. La figure 9.8 montre le degré d'approximation atteint avec 1, 3, 10 et 100 termes de la série.

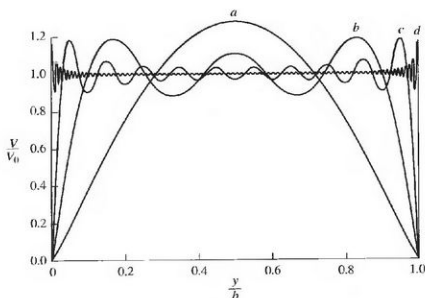


Figure 9.8 La condition $V = V_0$ en $x = 0$, satisfaite par une série de Fourier ne comprenant que (a) le premier terme, (b) les 3 premiers termes, (c) les 10 premiers termes et (d) les 100 premiers termes.

L'accord s'améliore quand le nombre de termes augmente, mais les oscillations en $y = 0$ et $y = b$, où V est discontinu, demeurent. C'est le phénomène de Gibbs.

Notons combien la fonction exponentielle décroît vite avec x . Pour $n = 1$ et $x = b$ elle ne vaut plus que $\exp(-\pi)$, soit 4 %. Grosso modo, le champ de la plaque chargée ne pénètre pas dans la direction x au-delà d'une distance égale à la séparation b entre les plaques.

Notons aussi combien la fonction exponentielle décroît vite avec n . Pour $n = 1$ et $x = b$ elle vaut 0,04 mais pour $n = 2$ et $x = b$ elle ne vaut que 0,002. Cela signifie que $V(y/b)$ devient rapidement un sinus lorsque x augmente. La figure 9.9 représente les lignes équipotentielles.

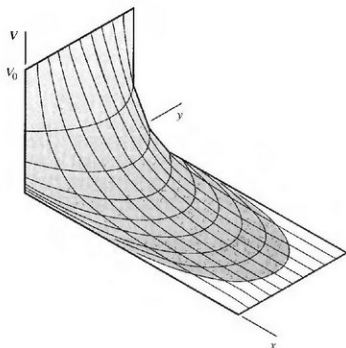


Figure 9.9 Graphe tridimensionnel du potentiel V pour le champ de la Fig. 9.7. Les courbes en U sont les équipotentielles ; les autres matérialisent les intersections de la surface de potentiel avec des plans parallèles au plan xV .

Cf. exercices : 9.2 ; 9.6 ; 9.7 ; 9.7 ; 9.9.

9.3 * RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE LAPLACE AVEC UN TABLEUR⁽¹⁾

L'équation de Laplace n'est soluble analytiquement que dans les situations les plus simples ; la plupart des situations physiques réelles ont des géométries compliquées et nécessitent des méthodes numériques de résolution.

Des fonctions linéaires de la forme

$$V(x, y) = ax + by + c$$

ont des dérivées du deuxième ordre nulles, et évidemment un laplacien nul, mais il existe beaucoup de fonctions non-linéaires de deux ou trois variables qui ont un laplacien nul. Dans un cas spécifique, la fonction correcte dépend des conditions aux limites. On peut écrire la solution exacte sous la forme d'une série infinie qui peut être tronquée pour obtenir la précision voulue, mais si on ne requiert qu'une solution numérique, la solution du tableur est beaucoup plus simple.

Avec la généralisation des ordinateurs, les résolutions numériques sont devenues relativement simples à effectuer. Nous décrivons ici un algorithme de base pour résoudre l'équation de Laplace avec un tableur, et nous fournissons deux exemples simples.

(1) Cette partie est une contribution de Daniel L. Hatten, Département de Physique et d'Optique appliquée, Rose-Hulman Institute of Technology, Terre Haute IN 47803, États-Unis.

L'algorithme est connu depuis longtemps sous le nom de *méthode de la relaxation*, et il est principalement dû à Southwell (1940 et 1946). Il est applicable à une grande variété de problèmes, et pas simplement à la solution de l'équation de Laplace.

Un *tableur* est un tableau avec beaucoup de colonnes et de lignes qu'on peut afficher sur un écran d'ordinateur. On n'est pas tenu d'utiliser toutes les colonnes et toutes les lignes.

Quand on utilise un tableur pour résoudre l'équation de Laplace, une cellule représente un point de l'espace et le contenu d'une cellule est le potentiel en ce point. Le tableur fournit donc une solution numérique de l'équation, point par point, selon une, deux ou trois dimensions. On peut aussi dessiner les courbes et les surfaces correspondantes.

Rappelons que d'après la partie 4.1 l'équation de Laplace s'écrit

$$\Delta V = 0 \quad (9.34)$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (9.35)$$

Cette équation s'applique partout où la densité volumique de charge est nulle.

Essayons un cas unidimensionnel, le potentiel V étant fonction de la coordonnée x . Soit V_i le potentiel au point x_i . On veut trouver V_i en fonction de x_i . Or

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta x} \quad (9.36)$$

La dérivée seconde peut être calculée à partir de la première de la même façon :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x} \Delta \left(\frac{\Delta V}{\Delta x} \right) \quad (9.37)$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta x} \right) - \left(\frac{V_i - V_{i-1}}{\Delta x} \right) \right] \quad (9.38)$$

$$= \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (9.39)$$

L'équation de Laplace sera satisfaite au moins approximativement si

$$V_i = \frac{V_{i+1} + V_{i-1}}{2} \quad (9.40)$$

Ainsi, si x_i désigne la position au centre de la cellule i , le potentiel V_i est alors égal à la moyenne des potentiels au centre des cellules de chaque côté.

Cette relation simple est valable quelles que soient les conditions aux limites, tant que la densité volumique de charge est nulle.

Évidemment, si le potentiel est fonction d'une seule coordonnée, disons x , alors l'équation

$$\partial^2 V / \partial x^2 = 0$$

implique que

$$V(x) = ax + b$$

et V est une fonction linéaire de x . Dans ce cas, pour tout Δx donné, les Éqs. 9.39 et 9.40 sont satisfaites exactement et pas seulement approximativement. Les cas bi- et tridimensionnels, cependant, ne sont pas si simples, comme nous allons le voir.

Le tableur est un outil idéal pour effectuer ce type de calcul. En première approximation, on pose le potentiel donné aux limites du champ et $V_i = 0$ — ou toute(s) autre(s) valeur(s) — partout ailleurs. On applique ensuite la formule ci-dessus à toutes les cellules qui ne sont pas sur les limites et on répète la procédure un grand nombre de fois. La valeur de V dans une cellule converge vers des valeurs qui satisfont l'Éq. 9.40 de plus en plus finement. *Ne cherchez pas à faire cela immédiatement tout seul*, sauf si vous avez déjà effectué des calculs similaires ; nous expliquons exactement, ci-dessous, comment utiliser un tableur.

La méthode peut être aussi appliquée à des champs bidimensionnels. Supposons que V soit fonction à la fois de x et de y . En posant $\Delta x = \Delta y = h$ et en procédant comme nous l'avons fait pour trouver l'Éq. 9.39,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V(x+h, y) - 2V(x, y) + V(x-h, y)}{h^2} + \frac{V(x, y+h) - 2V(x, y) + V(x, y-h)}{h^2} \quad (9.41)$$

$$= \frac{V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h) - 4V(x, y)}{h^2} \quad (9.42)$$

Si le laplacien est nul, alors

$$V(x, y) \approx \frac{V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h)}{4} \quad (9.43)$$

Pour représenter ce champ de potentiel dans un tableur, on utilise un bloc rectangulaire de cellules. En première approximation, on initialise le bloc au potentiel donné pour les limites et à zéro, ou toute autre valeur, pour toutes les autres cellules. Puis, en appliquant l'Éq. 9.43 de manière itérative, on obtient, dans toutes les cellules qui ne sont pas sur les limites, des valeurs de V qui sont approximativement égales à la moyenne des *quatre* valeurs adjacentes de V .

Pour des champs tridimensionnels, on utilise plusieurs ensembles de cellules, soit sur une seule feuille soit sur plusieurs. Dans ce cas, la valeur de V dans une cellule qui ne se trouve pas sur les limites est approximativement égale à la moyenne des *six* valeurs adjacentes de V .

La méthode peut rencontrer un problème quand une (ou plusieurs) condition aux limites est que le potentiel est nul à l'infini. Comme la région de l'espace modélisée est nécessairement finie, les cellules situées sur les limites de la simulation prennent en compte les cellules vides voisines pour participer à la moyenne pendant le processus itératif. La plupart des tableurs considèrent qu'une cellule vide contient une valeur nulle, ce qui revient à fixer implicitement une condition aux limites $V = 0$ partout à la frontière de la simulation. Cela ne se produit pas dans l'exemple ci-dessous, car les cellules externes contiennent des constantes.

Il y a deux façons de résoudre le problème du potentiel nul à l'infini. La première consiste à modifier la formule pour les cellules à la frontière, afin qu'elle ne fasse pas référence aux cellules à l'extérieur de la simulation. La moyenne utilisée alors pour trouver le potentiel dans ces cellules frontières est faite sur moins de cellules. Dans la plupart des cas, cela permet de bien avancer vers la résolution du problème. La deuxième approche nécessite de connaître quelques éléments sur le comportement attendu du potentiel à la frontière de la simulation. Dans ce cas, des constantes appropriées peuvent être insérées pour former la frontière.

Exemple : * Un champ unidimensionnel : le potentiel à l'intérieur d'un condensateur à faces planes et parallèles

Un condensateur à faces planes et parallèles a une plaque au potentiel de 5 V et l'autre connectée à la terre, comme en Fig. 9.6. Ce champ peut être calculé comme une série infinie qu'on tronque pour atteindre une précision donnée, mais la méthode numérique présentée ici rend le problème très facile.

Tableau 9.1

5,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5,00	2,50	0,00	0,00	0,00	0,00
5,00	2,50	1,25	0,00	0,00	0,00
5,00	3,13	1,25	0,63	0,00	0,00
5,00	3,13	1,88	0,63	0,31	0,00
5,00	3,44	1,88	1,09	0,31	0,00
5,00	3,44	2,27	1,09	0,55	0,00
5,00	3,63	2,27	1,41	0,55	0,00
5,00	3,63	2,52	1,41	0,70	0,00
5,00	3,76	2,52	1,61	0,70	0,00
5,00	3,76	2,69	1,61	0,81	0,00
5,00	3,84	2,69	1,75	0,81	0,00
5,00	3,84	2,79	1,75	0,87	0,00
5,00	3,90	2,79	1,83	0,87	0,00
5,00	3,90	2,87	1,83	0,92	0,00
5,00	3,93	2,87	1,89	0,92	0,00
5,00	3,93	2,91	1,89	0,95	0,00
5,00	3,96	2,91	1,93	0,95	0,00

Fixons le nombre de cellules à 6. La colonne A représentera l'électrode à 5 V, et la colonne F l'électrode connectée à la terre. Dans la ligne 1, on met la valeur 5 en A1 et 0 dans les cellules B1 à F1.

L'étape suivante consiste à entrer la formule pour le potentiel dans l'une des cellules de la boîte. Au rang 2, tapons = A1 dans la cellule A2, et la formule = (A1+C1)/2 dans la cellule B2, qui est la moyenne des deux cellules encadrant B1. N'oublions pas le signe « égale » !

On sélectionne alors B2 et on duplique sa formule dans les cellules C2 à E2. Enfin, on tape = F1 dans la cellule F2.

Le tableur remplit les quatre autres cellules automatiquement. Par exemple, il prend $D2 = (C1 + E1)/2$.

On sélectionne maintenant les cellules A2 à F2 et on duplique ces cellules vers le bas sur cinquante lignes ou plus. Le tableau 9.1 représente les nombres obtenus avec 17 itérations. Il y a convergence. Un ordinateur personnel peut effectuer des centaines d'itérations en quelques secondes, donnant $V = 5, 4, 3, 2, 1, 0$, comme attendu. Cette solution est meilleure que celle obtenue en gardant les trois premiers termes de la solution analytique, et elle est beaucoup plus simple à programmer.

Avec 101 cellules, une plaque à 100 V et l'autre à 0 V, les potentiels convergent à 100, 99, 98, 97, ..., 0, toujours comme on l'attendait.

Exemple : * Un champ bidimensionnel : le potentiel à l'intérieur d'une longue boîte conductrice de section carrée

Les champs bidimensionnels sont plus difficiles. Pour réussir cet exemple, l'aide d'un formateur ou d'un manuel sur l'utilisation des tableurs pour le calcul scientifique sera précieuse.

Une longue boîte conductrice de section carrée a un côté à 5 V, et les trois autres connectés à la terre. On commence alors par choisir une surface carrée sur le tableur avec, disons, A1 à Z1 égales à 5, A2 à A26 égales à 0. B26 à Y26 égales à 0 et Z2 à Z26 aussi égales à 0.

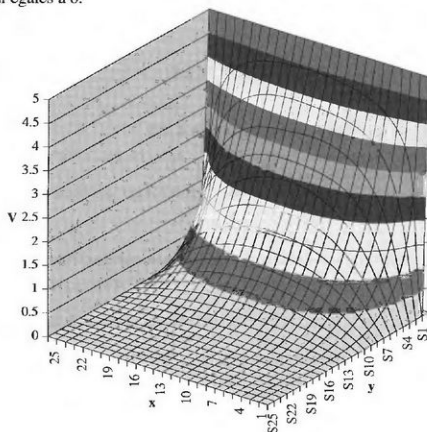


Figure 9.10

La figure 9.10 représente un graphe tridimensionnel de V en fonction de x et y .

Cf. exercices : 9.10 ; 9.11 ; 9.12 ; 9.13.

9.4 * RÉSUMÉ

La *méthode des images* peut souvent simplifier le calcul des champs électriques qui impliquent des interfaces entre des milieux différents. Elle consiste à mettre en place, par la pensée, un champ différent de l'autre côté de l'interface, avec des charges fictives, ou charges images.

Les solutions de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ sont appelées *fonctions harmoniques*. Il est souvent possible de réduire l'équation de Laplace à un ensemble de trois équations différentielles ordinaires indépendantes, une pour chaque coordonnée. Alors V est de la forme

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (9.9)$$

où X n'est fonction que de x , etc. Cette opération est appelée *séparation des variables*.

Pour certains champs on ne peut satisfaire les conditions aux limites qu'en sommant un nombre infini de fonctions harmoniques. On a utilisé une *série de Fourier*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sin \frac{n\pi y}{b} + D_n \cos \frac{n\pi y}{b} \right)$$

où C_n et D_n sont des constantes.

EXERCICES

9.1 Le théorème d'unicité du paragraphe 4.1.1

Selon ce théorème, l'équation de Poisson $\Delta V = -\rho_t/\epsilon_0$ ne peut avoir qu'une solution si le potentiel V est défini aux limites du champ.

Montrer que deux solutions peuvent différer au maximum par une constante si la composante normale de $\text{grad } V$ est définie aux limites.

(R) 9.2 Charge ponctuelle au-dessus d'une plaque conductrice

Une charge ponctuelle Q se trouve à une distance D au-dessus d'une grande plaque conductrice connectée à la terre.

(a) Calculer la densité surfacique de charge sur la plaque en fonction de la distance r au pied de la perpendiculaire abaissée depuis la charge.

(b) Montrer que la charge induite totale est $-Q$.

9.3 Charge linéique près d'une plaque conductrice

Un fil de cuivre, parallèle à une grande plaque conductrice et à une distance a de celle-ci, porte une charge de λ C/m.

(a) Trouver E dans un plan perpendiculaire au fil.

(b) Trouver la force d'attraction par mètre de fil entre le fil et la plaque en intégrant $(1/2)\epsilon_0 E^2$ sur la surface de la plaque.

9.4 Champ d'une charge à l'intérieur d'une sphère conductrice creuse

Une sphère conductrice creuse de rayon a connectée à la terre contient une charge ponctuelle Q au rayon b , comme sur la Fig. 9.11.

(a) Montrer que le champ à l'intérieur de la sphère est le même que s'il n'y avait pas de sphère mais, à la place, une charge $Q' = -(a/b)Q$ en $D = (a/b)a$. On peut prouver cela en montrant que le V de Q plus Q' est uniforme sur la surface de la sphère.

(b) Calculer la force d'attraction.

(c) Calculer la densité surfacique de charge sur la surface intérieure de la sphère conductrice.

9.5 Champ d'une charge ponctuelle près d'un bloc de diélectrique

Montrer que le potentiel à la surface du diélectrique faisant face à Q en Fig. 9.3 est le même, que l'on calcule le champ dans l'air comme en Fig. 9.4(a), ou dans le diélectrique comme en Fig. 9.4(c). On prendra $\epsilon_r = 3$.

9.6 Les solutions de l'équation de Laplace peuvent être de la forme $X(x) + Y(y) + Z(z)$

Montrer qu'il existe des solutions de l'équation de Laplace qui sont de la forme $X(x) + Y(y) + Z(z)$.

9.7 La fonction $1/r$ et ses dérivées sont solutions de l'équation de Laplace

(a) Montrer que $\Delta(1/r) = 0$.

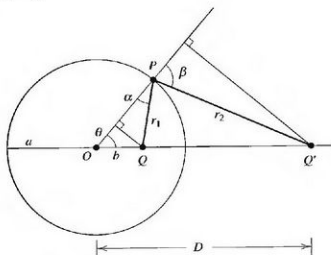


Figure 9.11

(b) Utiliser ce résultat pour montrer que

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r}$$

sont aussi solutions de l'équation de Laplace.

9.8 Le champ de la Fig. 9.7

Tracer $\exp(-n\pi x/b)$ en fonction de x/b , de $x/b = 0$ à 1 et pour $n = 1, 2$ et 3.

9.9 Le champ de la Fig. 9.7

Tracer V/V_0 en fonction de y/b pour le champ de la Fig. 9.9 pour $x = 0$, $x = 0,5b$ et $x = b$, jusqu'à $n = 100$. On tronquera la série quand $\exp(-n\pi x/b)$ est inférieur à 0,01.

Note : L'aide d'un formateur peut s'avérer nécessaire pour utiliser les tableurs. Les diverses marques de logiciels ont des types de tableurs différents.

- 9.10** Résoudre un problème bidimensionnel avec un tableur : boîte de section carrée avec les quatre côtés à des potentiels différents.

La boîte a ses côtés portés respectivement à 1, 2, 3 et 4 V, dans le sens des aiguilles d'une montre. Utiliser un tableur pour tracer les lignes équipotentielles. Esquisser ensuite les lignes de champ électrique.

Indications. (a) Utiliser un bloc de 25×25 cellules. C'est un bon compromis : un nombre de cellules supérieur nécessiterait plus d'itérations, et avec moins de cellules on perdrait en précision. (b) Prendre comme valeur initiale de V_i dans les cellules internes 2,5 V plutôt que 0 V. (Le potentiel moyen est $(1 + 2 + 3 + 4)/4 = 10/4$ V).

(c) Effectuer 400 itérations.

(d) Prendre 0,25 V comme différence de potentiel entre deux lignes équipotentielles voisines.

9.11 Champ entre deux plaques à des potentiels différents

Deux plaques se coupent à angle droit, l'une connectée à la terre et l'autre à 5 V. Utiliser un tableur pour tracer les lignes équipotentielles. Esquisser ensuite les lignes de champ électrique.

Indications. (a) Utiliser un bloc de 25×25 cellules avec $V_i = 0$ sur un côté et $V_i = 5$ V sur un côté voisin.

(b) Prendre 2,5 V, qui est le potentiel moyen, comme valeur initiale de V_i dans les cellules internes.

(c) Pour les cellules qui sont à la périphérie du bloc de cellules mais pas sur une plaque, on utilisera la moyenne des trois cellules voisines du bloc précédent. Pour la seule cellule d'angle qui n'est pas sur les plaques, on utilisera la moyenne des deux cellules voisines du bloc précédent.

(d) Itérer 400 fois.

(e) Dans le dernier bloc de cellules, on n'utilisera que le bloc 10×10 à l'angle où les plaques se rencontrent pour tracer les lignes équipotentielles.

9.12 Le champ près d'un paratonnerre

Utiliser un tableur pour tracer les lignes équipotentielles. Tracer ensuite les lignes de champ électrique.

Indications. (a) Ce problème est tridimensionnel, mais on peut en trouver une solution approchée en le transformant en un problème bidimensionnel, la barre étant remplacée par une plaque, disons à 5 V.

(b) Utiliser un bloc de 25×25 cellules, disons de A1 à Y25, avec un potentiel égal à 5 V dans les cellules K13 à Y13 et à 0 ailleurs.

(c) Se référer à la troisième indication du problème 9.11.

(d) Itérer 400 fois. Dans le dernier bloc de cellules, on n'utilisera qu'un bloc de 9×9 centré sur le bout de la plaque pour tracer les lignes équipotentielles.

(e) Répéter le calcul en prenant pour tension initiale des points extérieur de la plaque 1 V puis 2 V.

(f) Comparer les trois champs.

9.13 Un point à l'intérieur d'une boîte connectée à la terre est maintenu à 5 V

Tracer les équipotentiels, puis esquisser les lignes de champ électrique.

Indications. (a) Ce champ est tridimensionnel mais peut être approché par un champ bidimensionnel si le point est remplacé par un barreau perpendiculaire à la feuille.

(b) Utiliser un bloc de 25×25 cellules, avec la cellule centrale à 5 V.

(c) Mettre les autres cellules à 1 V, ce qui est plus proche de la tension finale que 0 V, et prendre 0 V pour les cellules du tour.

(d) Dans ce cas, 100 itérations donnent une bonne approximation pour le champ mais on a plus de précision avec 400 itérations.

(e) Prendre $\Delta V = 0,25$ ou $0,333$ V entre deux lignes équipotentiels, afin de mieux voir l'allure du champ.

Chapitre 10

*** Champs électriques. L'équation de Laplace en coordonnées sphériques. L'équation de Poisson pour E**

Dans ce dernier chapitre sur les champs électriques, nous allons voir comment résoudre l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. Nous aurons recours pour cela aux polynômes de Legendre, que nous avons vus au paragraphe 5.4.1 marqué d'un astérisque. Nous dériverons et étudierons alors brièvement l'équation de Poisson pour $\mathbf{E}$, qui conduit à une intégrale pour $\mathbf{E}$ qui est singulièrement différente de celle déduite de la loi de Coulomb.

10.1 * RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE LAPLACE EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES. L'ÉQUATION DE LEGENDRE

Certains champs électriques s'expriment le mieux en coordonnées sphériques (Partie 1.10). Les solutions de l'équation de Laplace exprimées dans ces coordonnées sont connues comme les *fonctions harmoniques sphériques*.

Nous nous limitons à des champs qui possèdent une symétrie axiale, donc à des champs qui sont indépendants de l'angle azimutal ϕ . L'équation de Laplace prend alors la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (10.1)$$

Pour séparer les variables comme dans le Chap. 9, on pose

$$V = R(r)\Theta(\theta) \quad (10.2)$$

où R n'est fonction que de r et Θ , que de θ . Puis, par substitution,

$$\Theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (10.3)$$

En divisant par $R\Theta$, on obtient

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad (10.4)$$

Nous avons maintenant écrit des dérivées totales au lieu de partielles car R et Θ sont toutes les deux des fonctions d'une seule variable.

Le deuxième terme est indépendant de r . Donc le premier terme est aussi indépendant de r , et égal à une constante :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = k \quad (10.5)$$

Alors

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -k \quad (10.6)$$

puisque la somme des deux constantes doit être nulle.

Examinons d'abord l'équation pour R . En multipliant les deux membres par R et en dérivant le terme entre parenthèses, on a

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - kR = 0 \quad (10.7)$$

La solution de cette équation est de la forme

$$R = Ar^n + Br^{-(n+1)} \quad (10.8)$$

avec

$$n(n+1) = k \quad (10.9)$$

comme on peut le vérifier par substitution.

En réécrivant l'équation pour Θ il vient :

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1)\Theta \sin \theta = 0 \quad (10.10)$$

On pose maintenant

$$\mu = \cos \theta \quad (10.11)$$

en se rappelant que, pour toute fonction $f(\mu)$,

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{df}{d\mu} \frac{d\mu}{d\theta} = -\sin \theta \frac{df}{d\mu} = -(1 - \mu^2)^{1/2} \frac{df}{d\mu} \quad (10.12)$$

Alors l'équation pour Θ devient l'équation de Legendre :

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] + n(n+1)\Theta = 0 \quad (10.13)$$

Lorsque n est entier, ses solutions sont les polynômes de Legendre du paragraphe 5.4.1 :

$$\Theta = P_n(\cos \theta) \quad (10.14)$$

Le tableau 5.1 donne les six premiers polynômes de Legendre.

Nous utilisons ci-dessous la propriété suivante des polynômes de Legendre. Comme

$$n(n+1) = n'(n'+1) \quad \text{si} \quad n' = -(n+1) \quad (10.15)$$

alors

$$P_{-(n+1)}(\cos \theta) = P_n(\cos \theta) \quad (10.16)$$

Il s'ensuit que, pour chaque solution de l'équation de Laplace de la forme

$$V = Ar^n P_n(\cos \theta) \quad (10.17)$$

il en existe une autre de la forme

$$V = Br^{-(n+1)} P_{-(n+1)}(\cos \theta) = Br^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (10.18)$$

Notons que ce résultat est en accord avec l'Éq. 10.8.

Ainsi, la solution générale de l'équation de Laplace pour des champs possédant une symétrie axiale est

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad (10.19)$$

Cette série est analogue à une série de Fourier (voir le deuxième exemple de la partie 9.2) de la manière suivante. Tout d'abord, l'expression sous le signe somme forme un ensemble complet : la série peut satisfaire n'importe quelles conditions aux limites raisonnables possédant une symétrie axiale. Deuxièmement,

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (10.20)$$

Les polynômes de Legendre sont donc orthogonaux. Troisièmement, on peut utiliser cette orthogonalité pour calculer les valeurs des coefficients A_n et B_n .

Exemple : * Sphère conductrice non chargée dans un champ électrique initialement uniforme

Une sphère conductrice de rayon a , isolée et non chargée, est placée dans un champ électrique $\mathbf{E}_0$ initialement uniforme. Ce champ appliqué est engendré par des distributions de charge lointaines, qui ne sont pas affectées par la présence de la sphère.

En un point quelconque de l'espace, à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_i$, où $\mathbf{E}_i$ est le champ des charges induites sur la sphère. Ces charges induites se disposent de telle façon qu'elles rendent nul le champ total à l'intérieur.

Nous calculons le champ à l'extérieur de la sphère en résolvant l'équation de Laplace de deux manières différentes.

1. Utilisons d'abord les coordonnées polaires, avec l'origine au centre de la sphère et l'axe polaire le long de E_0 . Les conditions aux limites sont alors les suivantes :

$$(a) \quad V_{r=a} = 0, \quad (b) \quad V_{r \rightarrow \infty} = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \quad (10.21)$$

De la condition aux limites (a) et de l'Éq. 10.19 on déduit

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (10.22)$$

On évalue maintenant les coefficients A et B de manière analogue à celle du deuxième exemple de la partie 9.2. On multiplie les deux membres de l'équation par $P_m(\cos \theta)$ et on intègre de $\cos \theta = -1$ à $\cos \theta = +1$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{+1} A_n a^n P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d(\cos \theta) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{+1} B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d(\cos \theta) \end{aligned} \quad (10.23)$$

Selon l'Éq. 10.20, les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels $m = n$. Chaque somme se réduit alors à un seul terme :

$$\begin{aligned} 0 &= A_n a^n \int_{-1}^{+1} P_n^2(\cos \theta) d(\cos \theta) \\ &+ B_n a^{-(n+1)} \int_{-1}^{+1} P_n^2(\cos \theta) d(\cos \theta) \end{aligned} \quad (10.24)$$

$$= \frac{A_n a^n + B_n a^{-(n+1)}}{n + 1/2} \quad (10.25)$$

Ainsi

$$B_n = -A_n a^{2n+1} \quad (10.26)$$

En substituant dans l'Éq. 10.19, il vient

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} A_n [r^n - a^{2n+1} r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad (10.27)$$

Par ailleurs, la condition aux limites (b) concerne la valeur de V à l'infini, où toutes les puissances négatives de r tendent vers zéro. Donc en $r \rightarrow \infty$,

$$V = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (10.28)$$

pour tout θ . Par identification, le seul terme non nul à droite est celui pour lequel $n = 1$. Voir le tableau 10.1. Alors

$$A_1 = -E_0 \quad (10.29)$$

et tous les autres A sont nuls. En outre, d'après l'Éq. 10.26 tous les B sont nuls sauf B_1 :

$$B_1 = -A_1 a^3 = E_0 a^3 \quad (10.30)$$

Finalement, en tout point extérieur à la sphère,

$$V = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} = -\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) E_0 r \cos \theta, \quad (10.31)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) E_0 \cos \theta, \quad (10.32)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) E_0 \sin \theta \quad (10.33)$$

Tableau 10.1 Les solutions de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques pour des champs possédant une symétrie axiale.

n	$r^n P_n(\cos \theta)$	$r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta)$
0	1	r^{-1}
1	$r \cos \theta$	$r^{-2} \cos \theta$
2	$r^2 \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2}$	$r^{-3} \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2}$
3	$r^3 \frac{(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2}$	$r^{-4} \frac{(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2}$
4	$r^4 \frac{(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8}$	$r^{-5} \frac{(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8}$
5	$r^5 \frac{(63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta)}{8}$	$r^{-6} \frac{(63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta)}{8}$

La densité surfacique de charge sur la sphère conductrice vaut

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(r=a) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (10.34)$$

Dans l'expression ci-dessus pour V , remarquons que le premier terme vient de E_0 tandis que le deuxième est le V d'un dipôle ponctuel (Partie 5.1), placé à l'origine et orienté selon l'axe z , de moment $4\pi\epsilon_0 a^3 E_0$.

2. On peut trouver V par la méthode suivante, beaucoup moins formelle.

Nous avons besoin du terme $-E_0 r \cos \theta$ afin de satisfaire la condition à l'infini. Aucune autre fonction avec une puissance positive de r n'est admissible. Ce seul terme, cependant, ne permet pas de satisfaire la condition en $r = a$ où V doit être

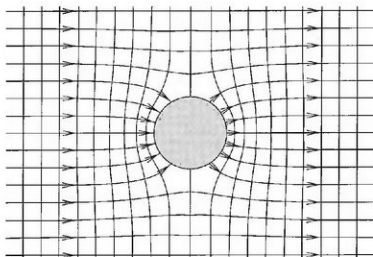


Figure 10.1 Lignes de champ de E (flèches) et lignes équipotentielles pour une sphère conductrice non chargée placée dans un champ électrique initialement uniforme. Les lignes de E sont normales à la surface, et le champ est nul à l'intérieur. Notons qu'à des distances supérieures à un rayon de la surface de la sphère, le champ n'est presque pas perturbé. L'origine des coordonnées sphériques utilisées pour le calcul est le centre de la sphère.

indépendant de θ . On doit donc ajouter une autre fonction contenant aussi le facteur $\cos \theta$, afin que le coefficient de $\cos \theta$ soit nul en $r = a$. Alors, d'après l'Éq. 10.19,

$$V = -E_0 r \cos \theta + \frac{B \cos \theta}{r^2} \quad (10.35)$$

On prend finalement $B = E_0 a^3$ pour avoir $V = 0$ en $r = a$. Cette solution satisfait l'équation de Laplace ainsi que les conditions aux limites ; elle est donc la solution correcte selon le théorème d'unicité du paragraphe 4.1.1. Voir la Fig. 10.1.

Exemple : * Sphère diélectrique dans un champ électrique initialement uniforme

Nous avons maintenant un champ électrique E_0 initialement uniforme, comme dans l'exemple précédent, et les conditions aux limites suivantes, où a est le rayon de la sphère :

- 1) V est continu en $r = a$.
- 2) La composante normale de D est continue en $r = a$.
- 3) $V_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta$.

Au lieu de passer par une solution formelle, comme nous l'avons fait dans la première solution de l'exemple précédent, nous procédons comme dans la seconde méthode et nous fabriquons une combinaison d'harmoniques sphériques qui satisfait les trois conditions.

Il existe maintenant un champ à l'intérieur de la sphère. Il nous faut donc deux solutions, l'une valide à l'intérieur et l'autre à l'extérieur. Le champ à l'extérieur doit satisfaire la condition aux limites 3. Il nous faut donc un terme $-E_0 r \cos \theta$, et aucune autre puissance positive de r . Toutes les puissances négatives de r sont admises.

À l'intérieur de la sphère, il ne doit y avoir aucune puissance négative de r , car V ne peut pas devenir infini en $r = 0$.

Soient V_{ext} et V_{int} les potentiels à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère, respectivement. Alors

$$V_{\text{ext}} = -E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (10.36)$$

$$V_{\text{int}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (10.37)$$

Les conditions aux limites exigent que, en $r = a$

$$V_{\text{ext}} = V_{\text{int}}, \quad -\frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} = -\epsilon_r \frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial r} \quad (10.38)$$

Nous avons alors les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} -E_0 a \cos \theta + \frac{B_0}{a} + \frac{B_1 \cos \theta}{a^2} + \frac{B_2 P_2(\cos \theta)}{a^3} + \dots \\ = C_0 + C_1 a \cos \theta + C_2 a^2 P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (10.39)$$

et

$$\begin{aligned} E_0 \cos \theta + \frac{B_0}{a^2} + \frac{2B_1 \cos \theta}{a^3} + \frac{3B_2 P_2(\cos \theta)}{a^4} + \dots \\ = -\epsilon_r [C_1 \cos \theta + 2C_2 a P_2(\cos \theta) + \dots] \end{aligned} \quad (10.40)$$

Ces deux équations sont valables pour toutes les valeurs de θ . Il s'ensuit que le coefficient d'une fonction donnée de θ à gauche doit être égal au coefficient de la même fonction à droite. D'après la première équation,

$$\frac{B_0}{a} = C_0, \quad -E_0 a + \frac{B_1}{a^2} = C_1 a, \quad \frac{B_2}{a^3} = C_2 a^2, \dots \quad (10.41)$$

D'après la seconde,

$$\frac{B_0}{a^2} = 0, \quad E_0 + \frac{2B_1}{a^3} = -\epsilon_r C_1, \quad \frac{3B_2}{a^4} = -2\epsilon_r C_2 a, \dots \quad (10.42)$$

En combinant ces deux équations, on a

$$B_0 = C_0 = 0, \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 \quad (10.43)$$

$$C_1 = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0, \quad B_n = C_n = 0 \quad (n > 1) \quad (10.44)$$

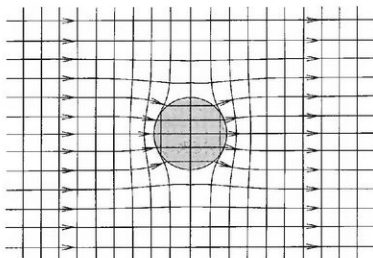


Figure 10.2 Lignes de D (flèches) et lignes équipotentielles pour une sphère diélectrique ($\epsilon_r = 3$) placée dans un champ électrique initialement uniforme. Les lignes de D se resserrent dans la sphère et D est plus grande à l'intérieur qu'à l'extérieur. Les lignes équipotentielles s'écartent à l'intérieur, donc E est plus petit à l'intérieur qu'à l'extérieur. Il existe une densité surfacique de charge liée, et E est discontinu sur la surface. Comme pour la sphère conductrice (Fig. 10.1), le champ n'est presque pas perturbé à des distances de la surface plus grandes qu'un rayon. Le champ à l'intérieur est uniforme.

Finalement,

$$V_{\text{ext}} = - \left[1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{a^3}{r^3} \right] E_0 r \cos \theta \quad (10.45)$$

$$V_{\text{int}} = - \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 r \cos \theta \quad (10.46)$$

Évidemment, $r \cos \theta = z$.

Notons que, si $\epsilon_r \gg 1$, alors V_{ext} est approximativement le même que le V de la sphère conductrice de l'exemple précédent.

En outre, E à l'intérieur de la sphère est uniforme :

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = -\text{grad } V_{\text{int}} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{D}_{\text{int}} = \frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r + 2} E_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (10.47)$$

Voir la Fig. 10.2.

Cf. exercice 10.1.

10.2 * L'ÉQUATION DE POISSON POUR E DANS DES CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

L'équation de Poisson pour V a été discutée dans la partie 4.1. Il existe aussi une équation de Poisson pour E . D'après la partie 1.10,

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = -\Delta \mathbf{E} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) \quad (10.48)$$

Or, dans des champs électrostatiques, le rotationnel de $\mathbf{E}$ est nul, si bien que

$$\Delta \mathbf{E} = \text{grad} (\text{div } \mathbf{E}) = \frac{\text{grad } \rho}{\epsilon_0} \quad (10.49)$$

selon la partie 7.5, où ρ est la densité totale de charge, libre plus liée.

On peut résoudre cette équation en séparant d'abord ses trois composantes, la composante x étant

$$\Delta E_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10.50)$$

Cette équation scalaire est similaire à l'équation de Poisson pour V (Éq. 4.1), dont la solution est le V de l'Éq. 3.34. Donc

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\partial \rho / \partial x'}{r} dV' \quad (10.51)$$

et de même pour les deux autres composantes. Comme d'habitude, les primes font référence à la distribution de charge, et r est la distance entre le point $P(x, y, z)$ où on calcule le champ et le point de la source $P'(x', y', z')$. La solution de l'équation de Poisson pour $\mathbf{E}$ est donc

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\text{grad}' \rho}{r} dV' \quad (10.52)$$

Cette équation relie $\mathbf{E}$ au *gradient* de la densité de charge totale. Notons le *signe négatif* et la puissance *un* de r au dénominateur. Cette équation est valable quelle que soit la nature des milieux en présence dans le champ, tant que le gradient est bien défini.

Une expression plus courante pour le $\mathbf{E}$ d'une distribution volumique de charge est une conséquence de la loi de Coulomb, celle que nous avons trouvée dans la partie 3.3 :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV' \quad (10.53)$$

Bien que les deux intégrales pour $\mathbf{E}$ soient égales, les intégrands sont à l'évidence différents. L'une des intégrales ne s'applique que là où $\text{grad } \rho$ n'est pas nul, tandis que l'autre s'étend sur toute la distribution de charge.

Exemple : * Champ d'une sphère dont la densité de charge dépend du rayon

Imaginons une sphère de densité de charge uniforme, sauf près de la périphérie où la densité tombe graduellement à zéro. Avec l'Éq. 10.52, seule la région près de la surface contribue à l'intégrale, puisque le gradient de la densité de charge est nul partout ailleurs. Néanmoins, cette équation fournit le même résultat que l'Éq. 10.53. Voir le problème 10.6.

Cf. exercices : 10.2 ; 10.3 ; 10.4 ; 10.5 ; 10.6.

10.3 * RÉSUMÉ

En coordonnées sphériques, si V est indépendant de la coordonnée ϕ on pose

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (10.2)$$

L'équation de Laplace devient alors un système d'équations différentielles ordinaires :

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (10.7, 10.9)$$

plus l'équation de Legendre

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] + n(n+1)\Theta = 0 \quad (10.13)$$

où $\mu = \cos \theta$. La première équation donne une solution du type

$$R = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \quad (10.8)$$

tandis que les polynômes de Legendre du paragraphe 5.4.1 sont solutions de l'équation de Legendre.

La solution générale de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques, pour une symétrie axiale, est donc

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad (10.19)$$

L'équation de Poisson pour E est

$$\Delta E = \frac{\text{grad } \rho}{\epsilon_0} \quad (10.49)$$

et sa solution est

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\text{grad}' \rho}{r} dV' \quad (10.52)$$

Pour des champs électrostatiques, on peut calculer E soit comme ci-dessus, soit grâce à la loi de Coulomb :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho \hat{r}}{r^2} dV' \quad (10.53)$$

EXERCICES

10.1 Conducteur cylindrique connecté à la terre dans un champ uniforme E

Un conducteur cylindrique à section circulaire de rayon a , infini et connecté à la terre, est placé dans un champ électrique initialement uniforme, avec son axe perpendiculaire à $\mathbf{E}_0$, comme sur la Fig. 10.3.

- (a) Montrer que $V = E_0(1 - a^2/\rho^2)\rho \cos \phi$ satisfait l'équation de Laplace.
 (b) Trouver $\mathbf{E}$ en $\rho^2 \gg a^2$ et en $\rho = 0$. Ces valeurs ont-elles un sens ?

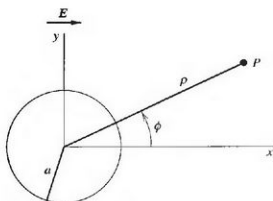


Figure 10.3

10.2 L'intégrale de volume de $\text{rot}'(\mathbf{E}/r)$ est nulle

Montrer que $\int_{V'} \text{rot}'(\mathbf{E}/r) dV' = 0$ pour toute distribution de charge finie. On utilisera l'identité 19 du paragraphe E.1.2 (Annexe E).

10.3 Égalité des deux intégrales pour E

Montrer que les deux intégrales pour E,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dV' \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\text{grad}' \rho}{r} dV'$$

sont égales, au moins si V' est fini. On utilisera les identités 15 et 18 du paragraphe E.1.2 (Annexe E).

10.4 L'intégrale de volume de $\text{grad}'(\rho/r)$ est nulle

On a montré que pour des champs statiques,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\text{grad}' \rho}{r} dV'$$

Montrer que, en conséquence,

$$\int_{V'} \text{grad}' \left(\frac{\rho}{r} \right) dV' = 0$$

10.5 Le positron de Dirac

Dirac a jadis proposé que le positron pourrait être considéré comme un trou dans une mer infinie d'électrons négatifs. Supposons que les positrons et les électrons aient des dimensions finies.

Déduire le champ d'un positron de la loi de Coulomb avec ces hypothèses. On peut trouver ce champ sans avoir à intégrer !

Ⓜ 10.6 Champ électrique d'un noyau atomique

La densité de charge d'une sphère vaut ρ_0 jusqu'au rayon a , puis décroît linéairement vers zéro au rayon b . Cela correspond approximativement à la distribution de charge à l'intérieur d'un noyau atomique.

Soient r' la distance entre le centre O du noyau et un point P' à l'intérieur, r la distance entre O et un point P à l'extérieur, r'' la distance PP' , et θ' l'angle $\widehat{POP'}$.

(a) Utiliser le théorème de Gauss pour trouver E à une distance $r > b$ du centre du noyau.

(b) Montrer que l'expression pour E donnée dans l'Éq. 10.52 amène au même résultat. Les deux calculs restent valables quand l'épaisseur de peau ($b - a$) tend vers zéro.

Chapitre 11

*** Relativité**

La transformation de Lorentz

Nous avons maintenant étudié en détail les champs électriques. À ce point, on peut soit passer au chapitre 14, soit étudier les chapitres 11 à 13 qui portent sur la relativité.

Il y a deux raisons pour cette digression. Tout d'abord, la relativité révèle la relation entre les champs électrique et magnétique. Ensuite, beaucoup de phénomènes, la plupart liés aux vitesses élevées, sont déconcertants si on ne comprend pas la relativité.

Les chapitres 11 et 12 posent les fondements de la relativité, avec peu de références aux phénomènes électromagnétiques. Leur fonction est de préparer le chapitre 13. Dans ce dernier chapitre sur la relativité nous montrons que, si un *phénomène donné* est étudié par deux observateurs qui se déplacent l'un par rapport à l'autre, leurs observations peuvent différer radicalement : si un champ est purement électrique pour un observateur, il est alors à la fois électrique et magnétique pour l'autre.⁽¹⁾

Ce premier chapitre sur la relativité porte sur la transformation de Lorentz et sur quelques-unes des ses conséquences étranges : la *contraction de Lorentz* fait qu'un objet se raccourcit dans la direction de son mouvement, tandis que la *dilatation du temps de Lorentz* fait qu'un intervalle de temps sur un objet en mouvement apparaît plus long pour un observateur immobile. Nous terminons ce chapitre avec la transformation d'une vitesse et l'invariance de la charge électrique.

(1) Pour une introduction plus détaillée à la relativité, voir le livre de Taylor et Wheeler [51]. Voir aussi l'ouvrage de van Bladel [1].

11.1 * RÉFÉRENTIELS ET OBSERVATEURS

Considérons les deux référentiels rigides S et S' de la Fig. 11.1, où S' se déplace à la vitesse V constante par rapport à S .

Les deux référentiels sont inertiels par hypothèse. Un *référentiel inertiel* est par définition un référentiel qui n'accélère pas et ne tourne pas. En d'autres termes, un référentiel inertiel est un référentiel par rapport auquel il n'y a pas de forces inertielles⁽¹⁾.

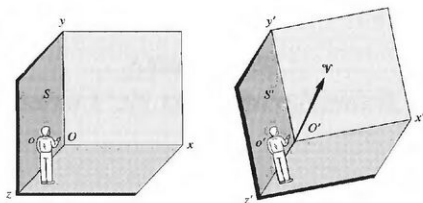


Figure 11.1 Référentiels S et S' , S' se déplaçant à vitesse constante arbitraire V par rapport à S , sans tourner.

Les observateurs o et o' réalisent des expériences variées, chacun ou chacune dans son référentiel propre.

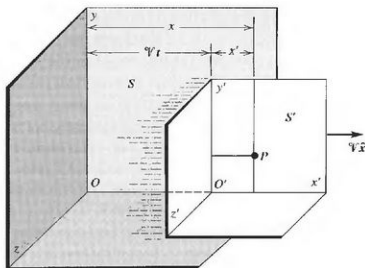


Figure 11.2 Le référentiel S' se déplace à la vitesse $V\hat{x}$ par rapport à S .

(1) Les forces qu'on sent lorsqu'on est immobile à l'intérieur d'un véhicule en accélération sont des *forces inertielles*. La force inertielle sur un individu de masse m est $-ma$, où a est l'accélération du véhicule.

Chaque référentiel porte un *observateur*, qui est soit un être humain équipé d'instruments, soit un appareil qui peut prendre des données ou transmettre des images, automatiquement ou par télécommande. L'observateur o est situé en S et o' en S' .

La *théorie de la relativité restreinte* concerne les mesures faites par ces deux observateurs. De manière générale, nous faisons référence aux deux référentiels de la Fig. 11.2.

Nous ne sommes *pas* concernés par la *théorie de la relativité générale*, qui traite des référentiels accélérés et de la gravitation.

11.2 * LA TRANSFORMATION GALILÉENNE

Selon la physique *classique*, des observateurs dans les référentiels S et S' de la Fig. 11.2 peuvent choisir la même échelle de temps. S'ils posent $t = 0$ au moment où leurs référentiels se recouvrent, alors les coordonnées d'un point donné de l'espace, par rapport aux deux référentiels, satisfont les équations

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (11.1)$$

C'est la *transformation galiléenne*.

En particulier, supposons que l'observateur o' trouve que la vitesse d'une impulsion de lumière par rapport à S' soit c dans la direction positive de l'axe x commun. Alors, d'après la transformation galiléenne et la mécanique élémentaire, l'observateur o dans le référentiel S devrait trouver que la vitesse de cette impulsion de lumière est $c + V$.

La transformation galiléenne s'avère donc erronée pour les vitesses élevées. Les expériences montrent que la vitesse d'une impulsion de lumière est *la même* pour les deux observateurs. Ce fait va contre le sens commun, bien sûr. La transformation galiléenne est également incompatible avec l'électromagnétisme.

11.3 * LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ

Le *principe de relativité* stipule qu'il est physiquement impossible de détecter si un référentiel est au repos ou en mouvement uniforme à partir d'observations faites uniquement dans ce référentiel.

Ce principe fut formulé par Galilée en 1638. Il est assez clair en lui-même, mais il est tellement fondamental qu'on l'exprime d'une autre manière pour accentuer sa signification. Le principe signifie que *toute* expérience donne précisément le même résultat, qu'elle soit effectuée dans S ou dans S' . Le résultat est le même, que l'expérience ait lieu dans un véhicule immobile ou dans un véhicule en mouvement, pourvu que le véhicule se déplace en ligne droite à vitesse constante. Ce principe est valable aussi aux grandes vitesses.

Par exemple, l'observateur o' dans le référentiel S' peut mesurer la période d'un pendule suspendu à un point dans S' , ou la collision de boules de billard sur une table au repos dans S' . Dans tous les cas, le phénomène observé par o' est précisément le même que si o' effectuait l'expérience dans le référentiel S .

Ce principe est fermement établi. En particulier, il est expérimentalement vérifié que la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs qui se déplacent à vitesse constante.

En guise d'illustration, considérons la loi

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \quad (11.2)$$

observée dans le référentiel S . Suivant le principe de relativité, il existe une loi identique

$$F' = \frac{d}{dt'}(m'v') \quad (11.3)$$

qui s'applique dans S' . Les lois physiques sont donc dites *invariantes*.

Il s'ensuit qu'il existe des relations mathématiques qui *transforment* les grandeurs non primées en grandeurs primées, et inversement. Nous découvrirons plusieurs de ces *transformations* dans ces trois chapitres sur la relativité.

11.4 * LA TRANSFORMATION DE LORENTZ

La *transformation de Lorentz* relie les coordonnées spatio-temporelles du référentiel S à celles de S' , et inversement. Pour les référentiels de la Fig. 11.2,

$$x = \frac{x' + \mathcal{V}t'}{(1 - \mathcal{V}^2/c^2)^{1/2}}, \quad x' = \frac{x - \mathcal{V}t}{(1 - \mathcal{V}^2/c^2)^{1/2}}, \quad (11.4)$$

$$y = y', \quad y' = y, \quad (11.5)$$

$$z = z', \quad z' = z, \quad (11.6)$$

$$t = \frac{t' + (\mathcal{V}/c^2)x'}{(1 - \mathcal{V}^2/c^2)^{1/2}}, \quad t' = \frac{t - (\mathcal{V}/c^2)x}{(1 - \mathcal{V}^2/c^2)^{1/2}} \quad (11.7)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Avec la transformation *galiléenne*, $F = F'$, $m = m'$, $t = t'$, $v = v' + \mathcal{V}$, et le principe de relativité est valable. Pourtant, la nature n'est pas si simple ; c'est en fait une approximation. Les transformations relativistes montrent que $F \neq F'$, $m \neq m'$, $t \neq t'$ et $v \neq v' + \mathcal{V}$!

L'ensemble des huit équations ci-dessus constitue la base de la relativité restreinte.⁽¹⁾ Nous passons le reste du chapitre, et les deux prochains, à discuter quelques-unes des conséquences étonnantes. Pour le moment, notons six caractéristiques relativement évidentes.

- 1) La colonne de droite est identique à la colonne de gauche, sauf que les grandeurs avec et sans prime sont échangées, et que $-\mathcal{V}$ remplace $\mathcal{V}$. La raison en est simplement qu'il est équivalent que S' se déplace à la vitesse $\mathcal{V}\hat{x}$ par rapport à S ou que S se déplace à la vitesse $-\mathcal{V}\hat{x}$ par rapport à S' .

(1) La transformation de Lorentz dérive du principe de relativité appliqué à la vitesse de la lumière. Nous omettons la démonstration par manque de place. Voir, par exemple, Taylor et Wheeler [51].

- 2) Il y a seulement quatre équations indépendantes, car la colonne de droite dérive de celle de gauche et inversement. On le vérifie facilement.
- 3) La transformation suppose que les origines O et O' coïncident en $t = t' = 0$, car si $x = y = z = t = 0$ alors $x' = y' = z' = t' = 0$, et inversement.
- 4) La transformation de Lorentz se réduit à la transformation galiléenne (Fig. 11.1) si on prend la vitesse c de la lumière égale à l'infini. Cependant, la transformation galiléenne est parfaitement adéquate dans la vie de tous les jours, où $v^2 \ll c^2$.
- 5) La vitesse relative V des deux référentiels ne peut pas dépasser c , car sinon soit x et t soit x' et t' deviennent imaginaires.
- 6) Le fait que $t \neq t'$ signifie que, si l'observateur o mesure un intervalle de temps T entre deux événements, o' mesurera alors, en général, un intervalle de temps différent T' entre la même paire d'événements. En particulier, si deux événements sont simultanés pour o , ils ne le sont pas nécessairement pour o' .

On pose habituellement

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (11.8)$$

Notons que $\beta \leq 1$ et $\gamma \geq 1$. Alors

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad x' = \gamma(x - Vt), \quad (11.9)$$

$$y = y', \quad y' = y, \quad (11.10)$$

$$z = z', \quad z' = z, \quad (11.11)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \quad (11.12)$$

Tableau 11.1 La transformation de Lorentz.

$\mathbf{r} = \gamma(\mathbf{r}'_{\parallel} + Vt') + \mathbf{r}'_{\perp}$ $t = \gamma\left(t' + \frac{Vr'_{\parallel}}{c^2}\right)$	$\mathbf{r}' = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - Vt) + \mathbf{r}_{\perp}$ $t' = \gamma\left(t - \frac{Vr_{\parallel}}{c^2}\right)$
--	---

Les points 1 et 2 ci-dessus illustrent deux règles générales.

- 1) La relation entre des variables dans un référentiel inertiel et les variables correspondantes dans un autre référentiel inertiel peuvent toujours être exprimées par l'une ou l'autre des deux équations ou systèmes d'équations, qui sont équivalents.
- 2) On obtient la relation inverse en ajoutant des primes aux variables qui n'en ont pas, en effaçant les primes de celles qui en ont et en changeant le signe de V .

Il est souvent plus pratique d'exprimer la transformation sous forme vectorielle, comme dans le tableau 11.1, où les indices $\parallel$ et $\perp$ font référence aux composantes respectivement parallèle et perpendiculaire à V .

Exemple : * Transformation d'un élément de surface $d\mathcal{A}$

Supposons que la surface élémentaire soit un parallélogramme rigide de côtés $d\mathbf{l}_{10}$ et $d\mathbf{l}_{20}$ de dimension et d'orientation arbitraires dans son référentiel propre. Alors

$$d\mathcal{A}_0 = d\mathbf{l}_{10} \times d\mathbf{l}_{20} \quad (11.13)$$

Ce vecteur est normal à l'élément de surface.

Si maintenant S est un référentiel inertiel par rapport auquel l'élément de surface se déplace à la vitesse $\mathbf{V}$, l'élément de surface subit une contraction de Lorentz (Partie 11.5) dans la direction de $\mathbf{V}$:

$$d\mathcal{A} = d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{l}_2 = d\mathcal{A}_{0\parallel} + \frac{d\mathcal{A}_{0\perp}}{\gamma} \quad (11.14)$$

Exemple : * Invariance de $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ dans une transformation de Lorentz

Une grandeur est dite *invariante* si sa valeur numérique est la même dans tous les référentiels inertiels. Par exemple, dans une transformation galiléenne, la distance r_{ab} entre deux points a et b est la même, que l'on effectue la mesure dans S ou dans S' .

Notons que le mot *invariant* n'est pas synonyme du mot *constant*. En effet, si le point a est fixe dans S et b dans S' , alors r_{ab} est une fonction du temps mais est encore invariante dans une transformation galiléenne.

Avec la transformation de Lorentz, r_{ab} n'est pas invariante mais $r^2 - c^2 t^2$ l'est. On vérifie facilement que

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

$$r^2 - c^2 t^2 = r'^2 - c^2 t'^2 \quad (11.15)$$

Cette grandeur est l'*intervalle* entre deux événements, au carré.

Exemple : * Le photon

Imaginons un éclair de lumière émis en O ou O' à l'instant où les deux origines coïncident. Suivant le principe de relativité, la lumière se propage dans toutes les directions à la même célérité c dans les deux référentiels. Par conséquent la position d'un photon satisfait l'équation

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} = c^2 \quad (11.16)$$

en accord avec les équations précédentes.

Exemple : * Causalité et vitesse maximale d'un signal

L'ordre dans lequel deux événements F et G se produisent peut être différent dans des référentiels différents car

$$t'_G - t'_F = \gamma \left[(t_G - t_F) - \left(\frac{V}{c^2} \right) (x_G - x_F) \right] \quad (11.17)$$

et les signes de $t'_G - t'_F$ et de $t_G - t_F$ peuvent être différents. Cela est perturbant car, selon le principe de causalité, une cause précède nécessairement son effet.

Par exemple, imaginons que l'observateur o jette une balle dans la direction positive de l'axe x . Après un vol de quelques secondes, la balle casse une vitre. La transformation de Lorentz ne peut sûrement pas signifier que ces événements pourraient se produire à l'envers pour certains observateurs.

Disons que l'événement F se produise aux origines O et O' à l'instant où elles coïncident. L'événement F est la cause de l'événement G qui se produit en x_G à un instant ultérieur t_G dans S et t'_G dans S' . L'événement G ne peut pas se produire avant l'événement F dans S' . Donc t'_G ne doit pas être négatif. Or, si v est la vitesse à laquelle un « signal » se propage de F à G ,

$$t'_G = \gamma \left[t_G - \left(\frac{v}{c^2} \right) x_G \right] = \gamma \left[t_G - \left(\frac{v}{c^2} \right) vt_G \right] \quad (11.18)$$

$$= \gamma t_G \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (11.19)$$

Pour l'exemple ci-dessus, v est la vitesse horizontale de la balle. Puisque t'_G est positif, $v \leq c$. Ainsi, comme $v \leq c$, un « signal » ne peut pas se propager à une vitesse v supérieure à c .

Exemple : * Simultanéité

Revenons à l'exemple précédent et posons $T_F = T_G$: les événements F et G sont simultanés dans le référentiel sans prime. Sont-ils également simultanés dans le référentiel primé ? En d'autres termes, a-t-on $T'_F = T'_G$? D'après l'Éq. 11.17, la réponse est non, sauf si deux conditions sont satisfaites : les deux événements se produisent au même endroit, soit $x_F = x_G$, et $\gamma \approx 1$. Ainsi, même si les deux événements se produisent en même temps et au même endroit dans un référentiel, ils ne sont en général pas simultanés dans un autre référentiel !

Cf. exercices : 11.1 ; 11.2 ; 11.3 ; 11.4 ; 11.5 ; 11.6 ; 11.7 ; 11.8 ; 11.9.

11.5 * TRANSFORMATION D'UNE LONGUEUR. LA CONTRACTION DE LORENTZ

Imaginons que l'observateur o' dans le référentiel S' fixe une règle de longueur l_0 sur l'axe x' de S' de telle façon que ses extrémités soient en $x' = 0$ et $x' = l_0$. La grandeur l_0 est la longueur de la règle, mesurée dans son référentiel propre, et on l'appelle sa *longueur propre*.

Quelle est la longueur de la même règle pour l'observateur o dans S ? Cet observateur effectue la mesure en notant la position des deux extrémités de la règle au même instant, disons $t = 0$. À l'extrémité de droite, $x = l$ et $t = 0$. Grâce à la transformation de Lorentz,

$$l_0 = x' = \gamma(x - vt) = \gamma l, \quad l = \frac{l_0}{\gamma} \quad (11.20)$$

Donc une règle qui se déplace dans la direction de sa longueur à une vitesse V relative à un observateur apparaît plus courte d'un facteur $1/\gamma$. Rappelons que $\gamma \geq 1$. La *contraction de Lorentz* est indépendante du signe de V . Bien sûr, la contraction de Lorentz s'applique quelle que soit la position de la règle sur l'axe x' .

Si la règle se trouve sur l'axe x dans S , alors o' la trouve plus courte du même facteur $1/\gamma$.

Ainsi, o prétend que les mètres de o' sont trop courts et o' maintient que ceux de o sont trop longs. Ce n'est pas absurde, car les comparaisons sont assez complexes ; elles nécessitent huit mesures séparées.

Si la règle se déplace par rapport à o dans une direction perpendiculaire à sa longueur, on peut montrer qu'il n'y a pas de contraction de Lorentz : sa longueur, mesurée par o , est égale à sa longueur propre l_0 . Une longueur l se transforme donc de la façon suivante :

$$l' = \frac{l_{0\parallel}}{\gamma} + l_{0\perp} \quad (11.21)$$

où $l_{0\parallel}$ est la composante de l_0 parallèle au mouvement et $l_{0\perp}$ est sa composante orthogonale.

Cf. exercice 11.5.

11.6 * TRANSFORMATION D'UN INTERVALLE DE TEMPS. DILATATION DU TEMPS

L'observateur o' mesure la durée d'un phénomène qui se produit en $x' = 0$ dans S' . Le phénomène commence en $t' = 0$ et finit en $t' = T_0$. Le temps T_0 mesuré dans le référentiel du phénomène est le *temps propre*. L'observateur o a une seule horloge située en $x' = 0$.

L'observateur o mesure le même intervalle de temps avec deux horloges identiques et synchronisées, l'une en $x = 0$, où le phénomène commence, et l'autre à la position de O' à la fin de l'intervalle de temps.

Selon la transformation de Lorentz, l'événement pour lequel $x' = 0$ et $t' = T_0$ se produit en $t = \gamma T_0$ pour o dans S . Ainsi

$$T = \gamma T_0 \quad (11.22)$$

Pour o , l'intervalle de temps est plus long que T_0 . C'est le phénomène appelé *dilatation du temps*. En d'autres termes, une horloge qui se déplace semble fonctionner plus lentement d'un facteur γ si on mesure sa cadence comme ci-dessus.

Exemple : * Le temps lu sur une horloge qui se déplace rapidement

Nous avons vu que, si o utilise deux horloges identiques en deux positions x différentes dans S pour mesurer un intervalle de temps donné que o' mesure en un point fixe dans S' avec une seule horloge, alors o trouve un intervalle de temps qui est plus long que celui de o' d'un facteur γ .

Et si o utilise une seule horloge et regarde l'horloge de o' qui se déplace, comme sur la Fig. 11.3 ? On place l'horloge primée en O' et on prend V et t positifs. Alors O' est à droite de O et s'en éloigne.

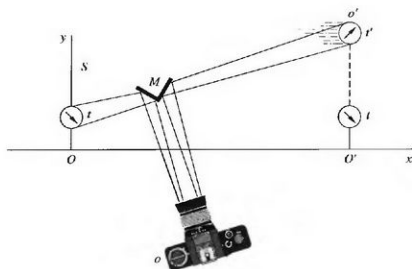


Figure 11.3 Un observateur o utilise un double miroir M pour photographier simultanément son horloge et celle qui se déplace.

La relation $t = \gamma t'$ est valable, mais la lumière de l'horloge qui se déplace ne parvient pas à l'appareil photo avant un instant ultérieur $t'' > t$.

Imaginons que o ait un ensemble d'horloges identiques et synchronisées tout le long de son axe x . Lorsque l'horloge primée passe devant chacune d'elles, la relation $t = \gamma t'$ s'applique. Mais o se trouve à l'origine O de S , et la lumière de l'horloge primée en O' met un certain temps pour arriver en O . Supposons que l'observateur o lise une heure t' sur l'horloge en mouvement. Quelle heure est-il sur sa propre horloge ? Soit t'' ce temps ; t'' est alors le t ci-dessus, plus le temps nécessaire à la lumière pour traverser la distance γt :

$$t'' = t + \frac{\gamma t}{c} = \left(1 + \frac{\gamma}{c}\right) t = (1 + \beta) t = (1 + \beta) \gamma t' \quad (11.23)$$

avec $\beta = \frac{v}{c}$, comme d'habitude. Donc, quand o lit t' sur une horloge qui s'éloigne, son temps propre est

$$t'' = \frac{1 + \beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} t' = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^{1/2} t' \quad (11.24)$$

Avec γ et β tous deux positifs, $t'' > t'$.

Si donc on *regarde* une horloge qui s'éloigne, l'horloge en mouvement semble fonctionner encore plus lentement.

Et si l'horloge se *rapproche* avec γ positive ? Alors l'origine O' est à gauche de O . Avec γ positive, t et t' sont négatifs et

$$t'' = t + \frac{|\gamma t|}{c} = t - \frac{\gamma t}{c} = (1 - \beta) t = (1 - \beta) \gamma t' \quad (11.25)$$

est aussi négatif, car $\beta \leq 1$. Donc, quand o lit un temps t' sur une horloge qui se rapproche, son temps propre est

$$t'' = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} t' \quad (11.26)$$

L'horloge qui se rapproche semble-t-elle fonctionner plus rapidement ou plus lentement que l'horloge stationnaire? Disons que l'observateur o lit un temps $t' = -1$ s sur l'horloge qui se rapproche et la racine carrée ci-dessus est égale à 0,9. Alors $t'' = -0,9$ s. Quand l'horloge en mouvement atteint O , t' et t'' seront tous deux nuls. Ainsi, dans l'intervalle, l'horloge en mouvement aura avancé d'une seconde et l'horloge fixe de 0,9 s. L'horloge qui se rapproche semble fonctionner plus vite.

Exemple : * L'effet Doppler relativiste pour les ondes électromagnétiques

L'effet Doppler est le changement de fréquence observé quand une source d'ondes se déplace par rapport à un détecteur. Ce phénomène est bien connu dans le domaine de l'acoustique.

Imaginons une source d'ondes électromagnétiques de fréquence propre f_0 située en O' , et un détecteur en O . Quelle est la fréquence apparente en O ?

Ce problème est identique au problème des horloges que nous venons de résoudre, car la source égrène des périodes $1/f_0$ au lieu de secondes. Donc, avec une source qui s'éloigne, la période mesurée par un observateur immobile en O est

$$T = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} T_0 \quad (11.27)$$

et

$$f = \frac{1}{T} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \frac{1}{T_0} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} f_0 < f_0 \quad (11.28)$$

Pour une source qui se rapproche,

$$f = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} f_0 > f_0 \quad (11.29)$$

Notons que seule la vitesse relative compte. Voir la Fig. 11.4.

Si, à un instant donné, la vitesse relative forme un angle droit avec la ligne joignant la source et le détecteur, il y a toujours un effet Doppler à cause de la dilatation du temps. Ceci est un effet purement relativiste. La fréquence mesurée au récepteur est soit plus élevée soit plus petite que f_0 , suivant le référentiel dans lequel l'angle vaut 90° :

$$f = \gamma f_0 \quad (\text{source}), \quad \text{ou} \quad f = \frac{f_0}{\gamma} \quad (\text{détecteur}) \quad (11.30)$$

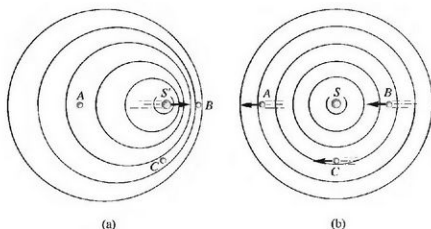


Figure 11.4 L'effet Doppler.

(a) La source S' se déplace vers la droite par rapport aux récepteurs stationnaires A , B , C .

(b) La source est stationnaire et tous les récepteurs se déplacent vers la gauche. Les déplacements de fréquence sont les mêmes dans les deux figures. La fréquence mesurée est plus basse que la fréquence propre en A , et plus élevée en B . En C , la fréquence mesurée est soit plus basse soit plus élevée que la fréquence propre, comme dans l'Éq. 11.30.

Cf. exercices : 11.11 ; 11.12 ; 11.13 ; 11.14.

11.7 * TRANSFORMATION D'UNE VITESSE

L'observateur o' dans le référentiel S' remarque qu'un objet se déplace à une certaine vitesse $\mathbf{v}'$. La vitesse n'est pas nécessairement constante. Quelle est la vitesse de ce même objet pour l'observateur o dans le référentiel S ?

D'après la forme vectorielle de la transformation de Lorentz (Tableau 11.1),

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\gamma(dr'_{\parallel} + \mathbf{V}dt') + d\mathbf{r}'_{\perp}}{\gamma(dt' + \mathbf{V}dr'_{\parallel}/c^2)} \quad (11.31)$$

En divisant numérateur et dénominateur par $\gamma dt'$, il vient

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{V} + \mathbf{v}'_{\perp}/\gamma}{1 + \mathbf{v}'_{\parallel}\mathbf{V}/c^2} \quad (11.32)$$

La relation galiléenne $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ est donc valide seulement si $\gamma \approx 1$ et si $\mathbf{v}'_{\parallel}\mathbf{V} \ll c^2$. On déduit de la partie 11.4 que

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{V} + \mathbf{v}_{\perp}/\gamma}{1 - \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{V}/c^2} \quad (11.33)$$

Exemple : * Transformer la vitesse de la lumière

Un photon se déplace à la vitesse c dans une direction quelconque dans le référentiel S' . Alors

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = c^2 \quad (11.34)$$

ct

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = \left(\frac{v'_{\parallel} + V}{1 + v'_{\parallel} V/c^2} \right)^2 + \left(\frac{v'_{\perp} / \gamma}{1 + v'_{\parallel} V/c^2} \right)^2 \quad (11.35)$$

En développant et en utilisant l'Éq. 11.34 deux fois, on trouve que la vitesse du photon dans S est aussi c , quelle que soit la valeur de V , ce qui est cohérent avec le principe de relativité de la partie 11.3.

C'est aussi en accord avec le deuxième exemple de la partie 11.4, où nous avons discuté l'invariance de $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$.

11.8 * L'INVARIANCE DE LA CHARGE ÉLECTRIQUE

La charge électrique est invariante : un corps porte la même charge électrique pour tous les observateurs. Par exemple, un électron porte la même charge $1,602177 \times 10^{-19} \text{ C}$ quelle que soit sa vitesse : un électron dans un atome de cuivre à température ambiante porte la même charge électrique qu'un électron qui a une énergie de plusieurs giga-électronvolts dans une gerbe de rayons cosmiques.

Une preuve expérimentale de l'invariance de la charge électrique tient à ce qu'un objet métallique n'acquiert pas de charge électrique quand il est chauffé ou refroidi (sauf par émission thermo-ionique). On pourrait argumenter que les vitesses des électrons et des protons sont affectées également par un changement de température, mais cela n'est pas correct : les vitesses des électrons de conduction sont beaucoup *moins* affectées que les vitesses des atomes (Kittel [21]). C'est parce que les énormes charges positives et négatives dans la matière s'annulent parfaitement à toutes les températures que la matière ordinaire reste neutre quand la température change.

Exemple : *

Dix kilogrammes de cuivre contiennent environ 10^{26} atomes et $10^{26} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ d'électrons de conduction ($1,6 \times 10^7 \text{ C !}$). Si la charge positive croissait ou décroissait de seulement 10^{-15} après échauffement, le cuivre acquerrait une charge nette de $1,6 \times 10^{-8} \text{ C}$, et le potentiel d'une sphère de cuivre de dix kilogrammes et de rayon 65 mm augmenterait ou diminuerait d'environ 2 kV. Un tel effet n'a jamais été observé.

Cf. exercice 11.15.

11.9 * RÉSUMÉ

Un référentiel inertiel n'accélère et ne tourne pas.

La théorie de la relativité restreinte concerne les observations et mesures d'un phénomène donné effectuées par des observateurs situés dans deux référentiels inertiels, l'un d'eux se déplaçant à vitesse constante par rapport à l'autre. De manière générale, les deux référentiels cités sont ceux de la Fig. 11.2.

Le principe de relativité stipule qu'il est physiquement impossible de détecter si un référentiel *inertiel* est au repos ou en mouvement uniforme à partir d'observations faites entièrement dans ce référentiel.

Par conséquent, les lois physiques sont invariantes : la loi qui décrit un phénomène donné est mathématiquement identique quelque soit le référentiel inertiel où le phénomène se produit.

La transformation de Lorentz relie x, y, z, t dans S à x', y', z', t' dans S' :

$$x = \gamma(x' + \mathcal{V}t'), \quad x' = \gamma(x - \mathcal{V}t), \quad (11.9)$$

$$y = y', \quad y' = y, \quad (11.10)$$

$$z = z', \quad z' = z, \quad (11.11)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\mathcal{V}x'}{c^2}\right), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\mathcal{V}x}{c^2}\right) \quad (11.12)$$

où $\gamma = (1 - \mathcal{V}^2/c^2)^{-1/2}$.

Le tableau 11.1 donne ces équations sous forme vectorielle. Les indices $\parallel$ et $\perp$ font référence aux composantes qui sont respectivement parallèle et perpendiculaire à la vitesse $\mathcal{V}$ de S' par rapport à S .

Une grandeur est dite *invariante* si sa valeur numérique est la même dans tous les référentiels inertiels.

Un signal ne peut pas se propager à une vitesse plus grande que c .

Un objet a une longueur propre l_0 dans une direction arbitraire. Dans un autre référentiel qui se déplace à une vitesse $\mathcal{V}$ constante par rapport à l'objet,

$$l' = \frac{l_{0\parallel}}{\gamma} + l_{0\perp} \quad (11.21)$$

Les longueurs parallèles au mouvement sont raccourcies d'un facteur γ . C'est la *contraction de Lorentz*. Les longueurs orthogonales au mouvement ne sont pas modifiées.

Un processus dure un temps propre T_0 dans son référentiel propre. Dans un autre référentiel comme ci-dessus, l'intervalle de temps est γ fois plus grand :

$$T = \gamma T_0 \quad (11.22)$$

C'est la *dilatation du temps*.

Si une source d'ondes électromagnétiques de fréquence propre f_0 s'éloigne à une vitesse $\mathcal{V} = \beta c$ d'un observateur, la fréquence apparente est

$$f = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right)^{1/2} f_0 < f_0 \quad (11.28)$$

Pour une source qui se rapproche, le signe devant β change et

$$f = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^{1/2} f_0 > f_0 \quad (11.29)$$

C'est l'*effet Doppler*. Seule importe la vitesse relative entre la source et le détecteur.

Une vitesse se transforme ainsi :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{V} + \mathbf{v}'_{\perp}/\gamma}{1 + \mathbf{v}'_{\parallel}\mathbf{V}/c^2} \quad (11.32)$$

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{V} + \mathbf{v}_{\perp}/\gamma}{1 - \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{V}/c^2} \quad (11.33)$$

La charge électrique est invariante : un corps porte la même charge électrique pour tous les observateurs.

* EXERCICES⁽¹⁾

11.1 La transformation de Lorentz

- (a) Pour quelle valeur de β la valeur de γ est-elle égale à 1,01 ?
 (b) Calculer γ , β et v pour un électron de conduction dont l'énergie est 10 eV. L'énergie au repos de l'électron vaut $5,11 \times 10^5$ eV.
 (c) Montrer que

$$x' + ct' = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} (x + ct)$$

Ⓡ 11.2 Problèmes de signaux avec un train rapide

Trois personnes A, O' et B voyagent dans un train qui se déplace à la vitesse V , A en tête, O' au milieu et B à l'arrière. Une quatrième personne, O, se trouve le long de la voie. Au moment où O' passe devant O, des signaux de lumière émis par A et B parviennent à O et O'. On demande à O et O' qui a émis son signal en premier. Que répondent-ils ?

Ⓡ 11.3 Transformation d'un angle

Une ligne droite passant par l'origine O' de S' forme un angle α' avec l'axe x' .

- (a) Trouver une relation entre α et α' .
 (b) Quelle est la valeur de α quand V tend vers c ?

11.4 Des choses qui vont plus vite qu'un photon ?

La transformation de Lorentz implique que la vitesse relative V de deux référentiels ne peut pas dépasser la vitesse c de la lumière. On a aussi montré qu'un signal ne peut pas excéder la vitesse de la lumière. Discuter les cas suivants.

- (a) Une barre longue et droite forme un petit angle θ avec une autre barre horizontale et immobile. La première barre se déplace vers le bas à une vitesse v .

Quelle est la vitesse du point d'intersection de l'extrémité inférieure de la barre en mouvement avec la barre fixe ? Cette vitesse peut-elle être plus grande que c ? Le point d'intersection peut-il être utilisé pour transmettre un signal ?

(1) Plusieurs des problèmes sur la relativité sont adaptés, après autorisation, de Taylor et Wheeler [51].

(b) La barre supérieure est initialement au repos, avec le point d'intersection à l'origine. On lui donne un coup de marteau vers le bas, en l'origine. Le mouvement du point d'intersection peut-il être utilisé pour transmettre un signal à une vitesse plus grande que la vitesse de la lumière ?

(c) Un laser puissant tourne rapidement autour d'un axe normal à sa longueur.

La vitesse azimutale du faisceau peut-elle excéder la vitesse de la lumière ? Le faisceau peut-il transmettre un signal entre deux points à une vitesse plus grande que c ?

(d) Les constructeurs de certains oscilloscopes annoncent des vitesses d'écriture supérieures à la vitesse de la lumière. Est-ce possible ?

11.5 c est la vitesse ultime

Imaginons une série de référentiels S, S', S'', S''' , etc., S' se déplaçant à la vitesse $V\hat{x}$ par rapport à S , S'' se déplaçant à la même vitesse par rapport à S' , etc. Selon la transformation galiléenne, une particule au repos dans le dernier référentiel se déplace à une vitesse $nV\hat{x}$ par rapport à S , avec nV arbitrairement grande.

Montrer que, d'après la relativité restreinte, la vitesse de cette particule par rapport à S est toujours inférieure à c .

11.6 La vitesse de la lumière dans un milieu en mouvement

La lumière se déplace plus lentement à travers un milieu matériel qu'à travers le vide, sa vitesse de phase v valant c/n où n est l'indice de réfraction du milieu.

Si maintenant le milieu lui-même se déplace à une vitesse $V \ll c$ par rapport au laboratoire, montrer que la vitesse de phase de la lumière par rapport au laboratoire est approximativement $c/n + V(1 - 1/n^2)$.

11.7 L'effet phare

Une source de lumière se déplace à une vitesse $V\hat{x}$. Considérons un rayon qui forme un angle θ' par rapport à l'axe x' . Voir la Fig. 11.5.

(a) Montrer que dans le référentiel S , $\tan \theta = \sin \theta' / [\gamma(\cos \theta' + \beta)]$.

Alors $\tan \theta' = \sin \theta / [\gamma(\cos \theta - \beta)]$, d'après la partie 11.4.

(b) Tracer θ en fonction de θ' pour $\beta = 0; 0,5; 0,9; 0,9999$.

Observer que, pour les grandes valeurs de β , θ est beaucoup plus petit que θ' , sauf pour les valeurs de θ' proches de π . Si la source rayonne de façon isotrope dans son référentiel propre, alors pour un observateur stationnaire la source rayonne principalement vers l'avant. C'est l'effet phare.

(c) Une source de lumière isotrope se déplace à la vitesse $c/3$ par rapport à un observateur. Calculer l'angle solide défini par un cône orienté vers l'avant et contenant 25 % du flux total de lumière.

11.8 Le paradoxe du collimateur

La figure 11.5 représente une source de lumière et un collimateur C fixes dans un référentiel S' qui se déplace à la vitesse $V\hat{x}$ par rapport à un référentiel fixe S . Le détecteur D mesure la lumière qui passe à travers le collimateur.

Selon le problème 11.7, l'angle θ formé par le faisceau de lumière est *plus petit* que θ' à cause de l'effet phare. Et pourtant, la contraction de Lorentz sur le collimateur rend son angle θ *plus grand* que θ' . Mais cela est absurde ! Si la lumière parvient en D dans S' , alors elle fait de même dans S .

On peut résoudre ce paradoxe en utilisant la transformation de Lorentz.

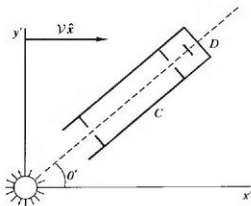


Figure 11.5

11.9 Trois référentiels

On a trois référentiels A , B , C . Les référentiels B et C se déplacent aux vitesses respectives $V\hat{x}/2$ et $V\hat{x}$ par rapport à A . Utiliser des indices pour identifier les vitesses : $v_{BA} = V/2$, $v_{CA} = V$.

Montrer que v_{CB} (vitesse de C par rapport à B) est plus grande que $V/2$. Donc C s'éloigne de B plus vite que A .

11.10 Contraction de Lorentz pour une longueur

Une règle d'un mètre se déplace à la vitesse $c/2$. Dans son référentiel propre elle forme un angle de 45° avec sa vitesse.

Quelle est sa longueur, mesurée par un observateur fixe ?

11.11 Deux événements successifs en un point donné

Deux événements se produisent au même endroit dans le laboratoire à un intervalle de 3 secondes.

Quelle est la distance spatiale entre ces deux événements, dans un référentiel en mouvement par rapport auquel les événements se produisent avec 5 secondes d'écart, et quelle est la vitesse relative du référentiel en mouvement et de celui du laboratoire ?

11.12 Déplacement vers le rouge

La radiogalaxie 3C295 a un déplacement vers le rouge de 46 %. Cela signifie pour les astronomes que la longueur d'onde observée est 1,46 fois la longueur d'onde de la même radiation provenant du laboratoire.

(a) Calculer la vitesse radiale de la galaxie.

(b) Certains quasars ont des déplacements vers le rouge de 200 %. Quelle est leur vitesse radiale ?

11.13 Procès de la physicienne pressée

Une physicienne est arrêtée pour avoir brûlé un feu rouge. Au tribunal, elle prétend qu'elle approchait à une vitesse telle que le feu rouge semblait vert. Le juge, diplômé en physique, modifie le chef d'accusation en excès de vitesse, et condamne l'accusée à une amende de un Euro par km/h au-dessus de la vitesse limite de 50 km/h. Quel est le montant de l'amende ($\lambda_{\text{vert}} \approx 5,3 \times 10^{-7} \text{ m}$, $\lambda_{\text{rouge}} \approx 6,5 \times 10^{-7} \text{ m}$) ?

11.14 Paradoxe des jumeaux

Le jour de son vingt-et-unième anniversaire, Pierre laisse son jumeau Paul sur Terre et part en ligne droite pendant 7 ans de son temps à la vitesse de $0,96c$. Pierre fait ensuite demi-tour et revient à la même vitesse.

Quel est l'âge de Pierre et de Paul lorsqu'ils se retrouvent ? ⁽¹⁾

11.15 Invariance de la charge électrique

Imaginons que la charge électrique ne soit pas invariante et que $Q = Q_0 [1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$. (Il faut se rappeler qu'en fait la charge est invariante, d'après toutes les expériences effectuées jusqu'à maintenant). La charge Q_0 est celle mesurée par un observateur qui se déplace avec la charge, et Q est la charge pour un observateur qui se déplace à une vitesse v par rapport à elle.

Si les électrons dans un échantillon donné ont une énergie cinétique moyenne de 100 eV, de combien augmente leur charge en pourcentage si leur vitesse augmente de 1 % ?

(1) Rosser [46] aborde en détail le paradoxe des jumeaux.

Chapitre 12

* Relativité. Masse, impulsion, force et énergie

Ce deuxième chapitre sur la relativité concerne surtout la mécanique, et son but principal est de trouver la transformation d'une force. La raison pour cela s'éclaircira dans le chapitre prochain : une force électrique devient une force électrique et une force magnétique quand elle est vue dans un référentiel différent. Les forces électriques et magnétiques sont donc étroitement liées.

Comme nous allons le voir dans ce chapitre, tous les concepts de base de la mécanique comme la masse, l'impulsion, la force et l'énergie s'effondrent, de sorte que la mécanique classique sombre au rang de théorie approchée. Il est singulier que l'électromagnétisme classique, en revanche, soit complètement compatible avec la relativité, et soit donc épargné.

12.1 * LA MASSE RELATIVISTE

Dans son référentiel propre, un objet a une masse au repos m_0 . Si l'objet se déplace à la vitesse v par rapport à un observateur, alors, pour cet observateur,

$$m = \frac{m_0}{[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}} = \gamma m_0 > m_0 \quad (12.1)$$

où c est la célérité de la lumière et m la *masse relativiste*. Nous considérons ce résultat assez bien connu comme admis (Taylor et Wheeler [51]). Toutes les mesures de masse sont en accord avec cette relation. Par exemple, la masse d'un électron de haute énergie dans un accélérateur est γ fois celle d'un électron lent.

La masse relativiste tend vers l'infini quand v tend vers c . Et le photon, alors ? Il a une masse relativiste m et une masse au repos (vraisemblablement) nulle. Voir la partie 12.6.

► * Transformation d'une masse

Un objet a une masse m dans le référentiel S . Quelle est sa masse dans le référentiel S' qui se déplace à la vitesse $\mathcal{V}$ par rapport à S ? Si l'objet est au repos dans S , sa masse dans ce référentiel est m_0 et sa masse dans S' est donnée par l'Éq. 12.1, avec $v = \mathcal{V}$.

Et si la masse a une vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$ dans S ? Alors, dans S

$$m = \frac{m_0}{\left\{ 1 - \left[(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/c^2 \right] \right\}^{1/2}} \quad (12.2)$$

et m' est donnée par une expression similaire, avec des primes sur m et sur les v . Comment transforme-t-on maintenant m en m' et vice versa?

En utilisant l'équation pour la transformation d'une vitesse de la partie 11.7,

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = \frac{(v'_{\parallel} + \mathcal{V})^2 + v'^2_{\perp}/\gamma^2}{\left[1 + (v'_{\parallel}\mathcal{V}/c^2) \right]^2} \quad (12.3)$$

Rappelons-nous que $1/\gamma^2 = 1 - (\mathcal{V}^2/c^2)$. Après simplification, on trouve que

$$m = \gamma m' \left(1 + \frac{v'_{\parallel}\mathcal{V}}{c^2} \right) \quad (12.4)$$

et, suivant la deuxième règle de la partie 11.4,

$$m' = \gamma m \left(1 - \frac{v_{\parallel}\mathcal{V}}{c^2} \right) \quad (12.5)$$

Cf. exercice 12.1.

12.2 * L'IMPULSION RELATIVISTE

L'impulsion relativiste $\mathbf{p}$ d'une masse m qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ est définie comme en mécanique classique :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\left[1 - (v^2/c^2) \right]^{1/2}} = \gamma m_0\mathbf{v} \quad (12.6)$$

C'est cette quantité qui est conservée dans les collisions, et pas l'impulsion $m_0\mathbf{v}$ de la mécanique classique.

► * Transformation d'une impulsion

Transformons d'abord $p_{\parallel}$:

$$p_{\parallel} = mv_{\parallel} = \gamma m' \left(1 + \frac{v'_{\parallel}\mathcal{V}}{c^2} \right) \left[\frac{v'_{\parallel} + \mathcal{V}}{1 + (v'_{\parallel}\mathcal{V}/c^2)} \right] \quad (12.7)$$

$$= \gamma m' (v'_{\parallel} + \mathcal{V}) = \gamma (p'_{\parallel} + m'\mathcal{V}) \quad (12.8)$$

Transformons maintenant $p_{\perp}$:

$$p_{\perp} = mv_{\perp} = \gamma m' \left(1 + \frac{v'_{\parallel} \mathcal{V}}{c^2} \right) \left\{ \frac{v'_{\perp}}{\gamma [1 + (v'_{\parallel} \mathcal{V}/c^2)]} \right\} = m' v'_{\perp} = p'_{\perp} \quad (12.9)$$

Les composantes perpendiculaires de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ sont égales.

Ainsi

$$\mathbf{p} = \gamma (\mathbf{p}'_{\parallel} + m' \mathcal{V}) + \mathbf{p}'_{\perp} \quad (12.10)$$

$$\mathbf{p}' = \gamma (\mathbf{p}_{\parallel} - m \mathcal{V}) + \mathbf{p}_{\perp} \quad (12.11)$$

Notons la similitude entre ces équations et celles pour $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ écrites dans le tableau 11.1.

12.3 * LA FORCE RELATIVISTE

La *force relativiste* est aussi définie comme en mécanique classique :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (12.12)$$

mais $\mathbf{p}$ est maintenant l'impulsion relativiste.

Exemple : * Une particule de haute énergie

Rappelons-nous que, d'après la partie 11.8, la charge électrique est invariante. Une particule de haute énergie et de masse au repos m_0 , de vitesse $\mathbf{v}$ et de charge Q traverse une région où le champ électrique vaut $\mathbf{E}$. La force électrique est

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_0 \mathbf{v}}{[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}} \right\} = Q\mathbf{E} \quad (12.13)$$

Nous reportons l'étude de la transformation d'une force à la partie 12.5.

Cf. exercice 12.2.

12.4 * L'ÉNERGIE RELATIVISTE $\mathcal{E} = mc^2$

Si une masse m en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$ est soumise à une force $\mathbf{F}$, alors l'énergie mécanique dépensée par $\mathbf{F}$ sur m par seconde est $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. La masse acquiert un supplément d'énergie relativiste $d\mathcal{E}$ et

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} \quad (12.14)$$

$$= \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \cdot \mathbf{v} = \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} \right) \cdot \mathbf{v} \quad (12.15)$$

Pour démontrer que $\mathcal{E} = mc^2$ on doit maintenant montrer que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt}(mc^2) = c^2 \frac{dm}{dt} \quad (12.16)$$

ou que

$$\left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt}\right) \cdot \mathbf{v} = c^2 \frac{dm}{dt} \quad (12.17)$$

En regroupant les termes en dm/dt ,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = (c^2 - v^2) \frac{dm}{dt} \quad (12.18)$$

$$\frac{m}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_0}{[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}} \right\} \quad (12.19)$$

On montre facilement que cela est une identité en utilisant, pour trouver la dérivée temporelle de v^2 , que $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$; ainsi

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (12.20)$$

Cela démontre l'Éq. 12.16.

Plus généralement, dans *tout* processus physique, une augmentation d'énergie $d\mathcal{E}$ entraîne une augmentation de masse dm telle que

$$d\mathcal{E} = c^2 dm \quad (12.21)$$

et

$$\mathcal{E} = mc^2 \quad (12.22)$$

est l'*énergie relativiste*, ou *masse-énergie*, d'un objet de masse m . Une particule au repos dans un référentiel donné a une *énergie au repos* $m_0 c^2$ dans ce référentiel.

Exemples : *

(a) Imaginons qu'un mélange d'hydrogène et d'oxygène explose. Qu'arrive-t-il à la masse ? Avant la réaction, les molécules peuvent être supposées au repos. Soit m_{0i} leur masse totale. Juste après la réaction, la masse relativiste est toujours la même car aucune énergie *extérieure* n'a été apportée au gaz. Alors

$$m_f = m_{0i} = m_{0f} + EC \quad (12.23)$$

où EC est l'énergie cinétique de la vapeur à haute température. La nouvelle masse *au repos* m_{0f} est plus petite que la masse *au repos* m_{0i} initiale.

Après un certain temps, la vapeur se refroidit et devient de l'eau à température ambiante, EC tend vers zéro et m_f décroît vers m_{0f} . Pendant le processus, l'énergie cinétique s'est communiquée aux corps voisins, augmentant ainsi leur masse. La masse *au repos* de l'eau est moindre que celle du mélange initial, mais la masse relativiste de l'Univers n'a pas changé.

Les réactions de fission et de fusion sont qualitativement similaires à des réactions chimiques exothermiques : il y a perte de masse *au repos* et libération d'énergie thermique.

(b) Que se passe-t-il quand on lâche une brique ? La masse *au repos* de la brique dépend de sa position, à cause de l'énergie potentielle : plus son altitude est grande, plus sa masse au repos est grande. Quand la brique tombe, sa masse au repos décroît et son énergie cinétique augmente. Lorsqu'elle atteint le sol, son énergie cinétique devient de l'énergie thermique. Elle a perdu de la masse au repos mais là encore, la masse relativiste de l'Univers n'a pas changé.

Rigoureusement, on devrait considérer l'énergie potentielle du système brique-terre et prendre en compte le mouvement de la Terre vers le haut lorsque la brique tombe.

(c) Quand un positron rencontre un électron, les deux particules disparaissent pour former une paire de photons, comme en Fig. 12.1. La charge, la masse-énergie et l'impulsion sont toutes conservées.

Inversement, un photon peut créer une paire électron-positron. Il y a conservation de la charge, mais la conservation de la masse-énergie et de l'impulsion nécessite la présence d'une autre particule.

12.4.1 * L'énergie cinétique

Par définition, l'énergie cinétique d'une masse ponctuelle m qui se déplace à une vitesse v par rapport à un référentiel donné est égale à l'énergie nécessaire pour faire passer sa vitesse de zéro à v dans ce référentiel. Elle vaut

$$mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left[\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - 1 \right] \quad (12.24)$$

$$= m_0c^2 \left(\frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \dots \right) \quad (12.25)$$

$$= \frac{m_0v^2}{2} + \frac{3m_0v^4}{8c^2} + \dots \quad (12.26)$$

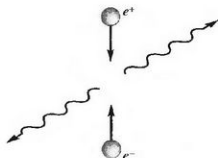


Figure 12.1 Un positron et un électron s'annihilent pour former deux photons.

Le premier terme à droite est l'énergie cinétique de la mécanique classique. Il est égal à l'énergie cinétique relativiste si $v^2 \ll c^2$.

12.4.2 * Transformation d'une énergie

Au vu des relations ci-dessus, une énergie relativiste se transforme comme une masse relativiste :

$$\mathcal{E} = \gamma \mathcal{E}' \left(1 + \frac{v_{\parallel}' \mathcal{V}}{c^2} \right) \quad (12.27)$$

$$\mathcal{E}' = \gamma \mathcal{E} \left(1 - \frac{v_{\parallel} \mathcal{V}}{c^2} \right) \quad (12.28)$$

Cf. exercices : 12.3 ; 12.4 ; 12.5 ; 12.6 ; 12.7 ; 12.8 ; 12.9.

12.5 * TRANSFORMATION D'UNE FORCE

Les équations de transformation pour une force serviront quand nous discuterons les champs magnétiques dans la partie 13.2.

Tout d'abord, posons $m = \mathcal{E}/c^2$ et $m' = \mathcal{E}'/c^2$ dans les Éqs. 12.10 et 12.11. Alors, d'après les Éqs. 12.10 à 12.12,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\gamma(d\mathbf{p}'_{\parallel} + \mathcal{V} d\mathcal{E}'/c^2) + d\mathbf{p}'_{\perp}}{\gamma(dt' + \mathcal{V} dr'_{\parallel}/c^2)} \quad (12.29)$$

En divisant haut et bas par $\gamma dt'$,

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}'_{\parallel} + (\mathcal{V}/c^2)d\mathcal{E}'/dt' + \mathbf{F}'_{\perp}/\gamma}{1 + v'_{\parallel} \mathcal{V}/c^2} \quad (12.30)$$

où $\mathbf{v}'$ est la vitesse du point d'application de $\mathbf{F}'$ dans le référentiel S' .

Or $d\mathcal{E}'/dt'$ est le taux auquel l'énergie relativiste s'accumule dans S' à cause de $\mathbf{F}'$. Alors

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt'} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}' = F'_{\parallel} v'_{\parallel} + \mathbf{F}'_{\perp} \cdot \mathbf{v}'_{\perp} \quad (12.31)$$

Par substitution dans l'Éq. 12.30 et simplification, on parvient à l'équation de la transformation

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'_{\parallel} + \frac{\gamma(\mathcal{V}/c^2) \mathbf{F}'_{\perp} \cdot \mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{F}'_{\perp}}{\gamma(1 + v'_{\parallel} \mathcal{V}/c^2)} \quad (12.32)$$

La transformation inverse est

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_{\parallel} + \frac{-\gamma(\mathcal{V}/c^2) \mathbf{F}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{F}_{\perp}}{\gamma(1 - v_{\parallel} \mathcal{V}/c^2)} \quad (12.33)$$

Notons que les équations de la transformation n'impliquent *pas* le point d'application de la force.

Exemples : *

Si $\mathbf{F}$ est parallèle à $\mathbf{V}$, alors $\mathbf{F}_\perp = 0$ et $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$.

Deux forces égales dans un référentiel ne le sont pas nécessairement dans un autre. Elles ne sont égales que si leurs points d'application ont des vitesses égales.

Cf. exercice 12.10.

12.6 * LE PHOTON

Le photon a vraisemblablement une masse au repos nulle. Sa vitesse est c ⁽¹⁾ et son énergie est

$$\mathcal{E} = h\nu \quad (12.34)$$

Où h est la constante de Planck, $6,626 \times 10^{-34}$ J·s, et ν la fréquence de l'onde associée. Sa masse relativiste est

$$m = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \quad (12.35)$$

et son impulsion vaut

$$p = mc = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (12.36)$$

où λ est la longueur d'onde de l'onde associée. La relation entre p et $\mathcal{E}$ pour un photon a été vérifiée en mesurant à la fois la pression de radiation et le flux d'énergie dans un faisceau de lumière.

L'énergie cinétique d'un photon est $(m - m_0)c^2 = mc^2$ et pas $mc^2/2$ comme on l'attendrait en mécanique classique.

Bien qu'un photon donné ait une vitesse c pour tous les observateurs, son énergie $\mathcal{E}$ et son impulsion p ne sont pas invariantes à cause de l'effet Doppler (Partie 11.6). Par exemple, si le référentiel S' se déplace dans la même direction que le photon, alors $\nu' < \nu$ et donc

$$h\nu' < h\nu, \quad \mathcal{E}' < \mathcal{E}, \quad p' < p \quad (12.37)$$

12.7 * RÉSUMÉ

La masse relativiste d'un objet dépend de sa vitesse par rapport à l'observateur :

$$m = \frac{m_0}{[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}} = \gamma m_0 > m_0 \quad (12.1)$$

Les équations de transformation sont les suivantes :

$$m = \gamma m' \left(1 + \frac{v'_{\parallel} v}{c^2} \right) \quad (12.4)$$

(1) Les photons se déplacent toujours à la vitesse c , même dans la matière. Voir la partie 22.5. Pour l'instant, nous pouvons penser à des photons qui se déplacent dans le vide.

$$m' = \gamma m \left(1 - \frac{v_{\parallel} \mathcal{V}}{c^2} \right) \quad (12.5)$$

L'impulsion relativiste d'une masse ponctuelle est

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v} \quad (12.6)$$

et

$$\mathbf{p} = \gamma \left(\mathbf{p}'_{\parallel} + m' \mathcal{V} \right) + \mathbf{p}'_{\perp} \quad (12.10)$$

$$\mathbf{p}' = \gamma \left(\mathbf{p}_{\parallel} - m \mathcal{V} \right) + \mathbf{p}_{\perp} \quad (12.11)$$

La force relativiste vaut

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (12.12)$$

et

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'_{\parallel} + \frac{\gamma(\mathcal{V}/c^2) \mathbf{F}'_{\perp} \cdot \mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{F}'_{\perp}}{\gamma(1 + v'_{\parallel} \mathcal{V}/c^2)} \quad (12.32)$$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_{\parallel} + \frac{-\gamma(\mathcal{V}/c^2) \mathbf{F}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{F}_{\perp}}{\gamma(1 - v_{\parallel} \mathcal{V}/c^2)} \quad (12.33)$$

L'énergie relativiste $\mathcal{E}$ est égale à mc^2 . Dans tout processus physique, une augmentation d'énergie $d\mathcal{E}$ entraîne une augmentation de masse dm et

$$\mathcal{E} = \gamma \mathcal{E}' \left(1 + \frac{v'_{\parallel} \mathcal{V}}{c^2} \right) \quad (12.27)$$

$$\mathcal{E}' = \gamma \mathcal{E} \left(1 - \frac{v_{\parallel} \mathcal{V}}{c^2} \right) \quad (12.28)$$

L'énergie au repos est $m_0 c^2$.

Dans toute interaction il y a conservation de la masse-énergie et de l'impulsion.

L'énergie cinétique est $mc^2 - m_0 c^2$. L'énergie cinétique de la mécanique classique, $(1/2)mv^2$, est correcte à condition que $v^2 \ll c^2$.

Le photon a vraisemblablement une masse au repos nulle et

$$\mathcal{E} = h\nu \quad (12.34)$$

où h est la constante de Planck et ν la fréquence. Par ailleurs,

$$m = \mathcal{E}/c^2 \quad (12.35)$$

À cause de l'effet Doppler, la fréquence, et donc aussi la masse-énergie et l'impulsion d'un photon, ne sont pas identiques pour tous les observateurs.

EXERCICES

12.1 Transformation d'une densité de masse

Dans ce problème, on utilise le symbole τ pour des volumes.

Un petit élément dans un objet a une masse propre dm_0 , un volume propre $d\tau_0$ et une densité de masse propre $\rho_0 = dm_0/d\tau_0$. Par rapport à S et S' , les densités de masse sont respectivement $\rho = dm/d\tau$ et $\rho' = dm'/d\tau'$, et les vitesses parallèles de l'élément sont $v_{\parallel}$ et $v'_{\parallel}$.

Montrer que, si $\mathcal{V}$ est la vitesse de S' par rapport à S , alors

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad dm &= \gamma \left(1 + \frac{v'_{\parallel} \mathcal{V}}{c^2} \right) dm', & \text{(b)} \quad d\tau &= \frac{d\tau'}{\gamma \left(1 + v'_{\parallel} \mathcal{V}/c^2 \right)}, \\ \text{(c)} \quad \rho &= \gamma^2 \left(1 + \frac{v'_{\parallel} \mathcal{V}}{c^2} \right)^2 \rho' \end{aligned}$$

12.2 Force relativiste

En mécanique classique, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ si la masse est constante.

Montrer qu'avec la relativité,

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \mathbf{a}_{\parallel} + \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \mathbf{a}_{\perp} = \gamma^2 m \mathbf{a}_{\parallel} + m \mathbf{a}_{\perp}$$

où $\mathbf{a}_{\parallel}$ et $\mathbf{a}_{\perp}$ sont les composantes de l'accélération respectivement parallèle et perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}$ du point d'application de la force.

Une force perpendiculaire à $\mathbf{v}$ change la direction de $\mathbf{v}$, mais pas la masse, et donc pas non plus la vitesse, comme nous pouvions nous y attendre du fait que la force ne travaille pas. Donc, si $\mathbf{F}$ est perpendiculaire à $\mathbf{v}$, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ s'applique !

Cependant, une force parallèle à $\mathbf{v}$ change le module de $\mathbf{v}$ et donc aussi la masse. La résistance à l'accélération est plus grande à cause du terme γ^2 .

La grandeur m est parfois appelée la *masse inertielle transverse* et $\gamma^2 m$ la *masse inertielle longitudinale*.

12.3 Brûler de l'hydrogène

Allumons un mélange d'hydrogène et d'oxygène à l'intérieur d'un récipient fermé, puis laissons refroidir la vapeur d'eau.

Tracer les graphes de mc^2 et $m_0 c^2$ en fonction du temps.

12.4 Masse d'un proton de haute énergie

Un proton a une énergie cinétique de 500 MeV. Trouver sa masse et sa vitesse.

12.5 Lois de conservation pour des particules en collision

Au cours d'une collision entre deux particules, il y a conservation de la masse-énergie et conservation de l'impulsion.

(a) Montrer que, si ces lois de conservation sont valables dans un référentiel inertiel, alors elles sont valables dans tout autre référentiel inertiel.

(b) Étant donné que, dans une réaction donnée, la masse-énergie est conservée dans tout référentiel inertiel, montrer que p est conservée aussi, et inversement.

Ⓡ 12.6 Effets relativistes avec des électrons de 40 GeV

Un accélérateur linéaire accélère des électrons jusqu'à des énergies de 40 GeV (40×10^9 eV).

(a) Calculer la masse d'un électron qui a l'énergie maximale. Comment cette masse se compare-t-elle avec la masse d'un proton au repos ? Voir la partie E.2 (annexe E).

(b) Quelle est la longueur de l'accélérateur dans le référentiel d'un électron qui a l'énergie maximale ? La longueur de l'accélérateur mesurée à Terre est 3 000 m.

(c) Combien de temps faudrait-il à un tel électron pour aller d'un bout à l'autre de l'accélérateur (i) dans le référentiel du laboratoire et (ii) dans le référentiel de l'électron ?

Ⓡ 12.7 Déplacement gravitationnel vers le rouge

Un photon d'énergie $h\nu_0$ quitte la surface d'une étoile de rayon R et de masse M .

(a) Montrer que, lorsque le photon s'est éloigné à l'infini, $\Delta\nu/\nu_0$ est égal à $GM/(Rc^2)$, où G est la constante gravitationnelle. Ce changement est tellement petit qu'on peut prendre $\nu = \nu_0$ pour calculer la variation d'énergie potentielle. Quel est le signe de $\Delta\nu$? Ce changement de fréquence est le *déplacement gravitationnel vers le rouge*.

(b) Calculer $\Delta\nu/\nu$ pour le Soleil et pour la Terre. Voir la partie E.2 (annexe E).

(c) Calculer $\Delta\nu/\nu$ pour un photon qui voyage de la surface du Soleil à la surface de la Terre, en prenant en compte les deux champs gravitationnels.

(d) Sirius et une étoile plus petite tournent l'une autour de l'autre. La masse de la petite étoile est équivalente à celle du Soleil, mais sa lumière a un $\Delta\nu/\nu$ de 7×10^{-4} . Quelle est sa densité moyenne ?

(e) La période de rotation du Soleil est 24,7 jours. Quel est le décalage Doppler pour de la lumière de longueur d'onde 500 nm, émise du bord du disque du Soleil, à son équateur ? Comparer ce décalage Doppler avec le déplacement gravitationnel vers le rouge.

(f) Le Soleil éjecte de l'hydrogène ionisé. Comment varie la masse d'un proton pendant qu'il s'échappe du Soleil ?

12.8 Le summum du vaisseau spatial

La poussée d'un moteur de vaisseau spatial est égale au produit $m'v$, où m' est la masse de propergol éjectée par seconde et v la vitesse du gaz d'échappement par rapport au vaisseau. Le summum du vaisseau spatial transformerait tout son propergol en radiation et éjecterait vers l'arrière des photons à la vitesse de la lumière. La masse de propergol serait alors minimale.

(a) Montrer que le rapport puissance-poussée P/F pour un moteur à photons est c .

Puisque P/F et dM/dt , où M est la masse du vaisseau spatial, sont indépendants de la fréquence, la source de radiation n'est pas nécessairement monochromatique.

(b) Un vaisseau à photons brûlant 1 g de matière par seconde aurait alors une poussée de 3×10^5 N. La difficulté consiste à transformer une fraction appréciable de la masse du propergol en radiation, comme le montre l'exemple suivant.

Une lampe-torche ordinaire a une capacité d'environ 2 A.h à environ 2 V. Montrer que sa vitesse finale est de l'ordre de 10^{-4} m/s.

12.9 Le voyage interstellaire est-il possible ?

(a) Tout d'abord, le temps devrait être dilaté d'un facteur, disons, 10. Alors $\gamma = 10$. Calculer v/c .

(b) Imaginons un vaisseau spatial équipé d'un moteur à photons. Voir le problème 12.8. On peut trouver la fraction f de la masse initiale qui reste, une fois le vaisseau arrivé au bon β , en utilisant la conservation de l'énergie et de l'impulsion. On prendra en compte l'énergie et l'impulsion de la radiation. On doit trouver que $f = 0,05$.

Le vaisseau spatial doit alors freiner et s'arrêter. Cela nécessite 95 % de la masse restante. À la fin du voyage de retour il reste $(0,05)^4$ de la masse initiale. Si la masse du vaisseau avec sa charge utile vaut une tonne, alors le propergol a une masse d'environ 200 000 tonnes.

(c) En principe, le vaisseau pourrait collecter et annihiler de la matière interstellaire. Il y a environ un atome d'hydrogène par centimètre cube.

Calculer la masse d'hydrogène collectée pendant un an si le vaisseau balaye un volume d'une section de $1\,000\text{ m}^2$ à la vitesse de la lumière.

(d) Or cet hydrogène doit d'abord être accéléré. Cela ralentit le vaisseau. Montrer que le gain net est positif jusqu'à $\beta = 0,707$, et négatif au-delà.

12.10 Transformation d'une force

Montrer que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'_{\parallel} + \gamma \left[\frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{F}' \times \mathbf{v})}{v^2} - \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{F}' \times \mathbf{v})}{c^2} \right]$$

Chapitre 13

* Relativité.

Les champs E et B d'une charge électrique en mouvement

Le champ le plus simple de tous est celui d'une charge ponctuelle stationnaire. Ensuite vient le champ d'une charge Q qui se déplace à vitesse constante. Ce champ est l'objet de ce troisième et dernier chapitre sur la relativité.

On considère deux charges ponctuelles comme sur la Fig. 13.1. La charge Q est fixe à l'origine du référentiel S' , de telle sorte qu'elle se déplace à vitesse constante $V\hat{x}$ par rapport au référentiel S . La charge q se déplace à une vitesse $\mathbf{v}$ quelconque par rapport à S , et à la vitesse $\mathbf{v}'$ par rapport à S' . La vitesse de q n'est pas nécessairement constante.

Il n'y a ni autre charge électrique ni courant dans les environs.

La force exercée par Q sur q est $\mathbf{F}_{Qq}$. Cette force nous donnera le champ de Q à la position de q . On calcule cette force, d'abord dans S' puis dans S .

13.1 * LA FORCE SUR q

13.1.1 * La force $\mathbf{F}'_{Qq}$

Dans S' , la charge Q est stationnaire. Or il est expérimentalement bien établi que la force exercée par une charge stationnaire sur une charge en mouvement est indépendante de la vitesse de cette dernière (Partie 3.1). On peut donc calculer $\mathbf{F}'_{Qq}$ grâce à la loi de Coulomb :

$$\mathbf{F}'_{Qq} = \frac{Qq\hat{\mathbf{r}}'}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{Qq\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad (13.1)$$

où $\mathbf{r}'$ et $\hat{\mathbf{r}}'$ sont définies comme sur la Fig. 13.1.

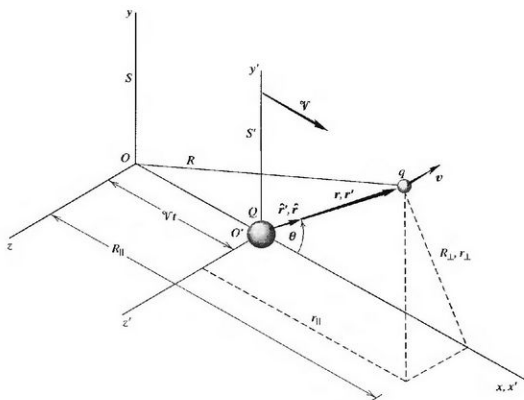


Figure 13.1 La vitesse de la charge Q à l'origine O' de S' est $\hat{x}$ par rapport à S . La vitesse v de la charge q par rapport à S est arbitraire. Toutes les variables représentées sans prime sont mesurées par rapport à S .

13.1.2 * La force F_{Qq}

En se référant maintenant à l'Éq. 12.32, on peut déduire F_{Qq} de F'_{Qq} :

$$\mathbf{F}_{Qq} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \left[\mathbf{r}'_{\parallel} + \frac{\gamma(\mathbf{V}/c^2) \mathbf{r}'_{\perp} \cdot \mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\perp}}{\gamma(1 + \mathbf{v}'_{\parallel} \mathbf{V}/c^2)} \right] \quad (13.2)$$

Il reste à transformer les variables primées à droite. D'après le tableau 11.1 et la Fig. 13.1,

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{R}_{\parallel} - \mathbf{V}t) = \gamma \mathbf{r}_{\parallel}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{R}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \quad (13.3)$$

$$r'^2 = \gamma^2(\mathbf{R}_{\parallel} - \mathbf{V}t)^2 + R_{\perp}^2 = \gamma^2[(\mathbf{R}_{\parallel} - \mathbf{V}t)^2 + R_{\perp}^2(1 - \beta^2)] \quad (13.4)$$

Or

$$r'^2 = (\mathbf{R}_{\parallel} - \mathbf{V}t)^2 + R_{\perp}^2 \quad (13.5)$$

Donc

$$r'^2 = \gamma^2(r^2 - \beta^2 R_{\perp}^2) = \gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta) \quad (13.6)$$

où θ est mesuré dans le référentiel S . En outre, selon la partie 11.7

$$v'_{\parallel} = \frac{v_{\parallel} - V}{1 - v_{\parallel}V/c^2}, \quad v'_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{\gamma(1 - v_{\parallel}V/c^2)} \quad (13.7)$$

En substituant et en simplifiant, on trouve que

$$\mathbf{F}_{Qq} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} + (V/c^2)\mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} - (V/c^2)v_{\parallel}\mathbf{r}_{\perp}}{\gamma^2 r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (13.8)$$

où, d'après l'identité 2 du paragraphe E.1.2 (annexe E)

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}) - Vv_{\parallel}\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{V}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_{\perp}) - \mathbf{r}_{\perp}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) \quad (13.9)$$

$$= \mathbf{v} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{r}_{\perp}) = \mathbf{v} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{r}) \quad (13.10)$$

Finalement,

$$\mathbf{F}_{Qq} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} + \mathbf{v} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{r})/c^2}{\gamma^2 r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (13.11)$$

13.1.3 * La force de Lorentz

La force $\mathbf{F}_{Qq}$ comprend deux termes. Le premier terme est indépendant de $\mathbf{v}$ et correspond à la *force électrique*. Le deuxième terme dépend de $\mathbf{v}$, c'est la *force magnétique*. On a ainsi la *force de Lorentz*

$$\mathbf{F}_{Qq} = q(\mathbf{E}_Q + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_Q) \quad (13.12)$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse de Q dans S , et où

$$\mathbf{E}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{\mathbf{r}} \quad (13.13)$$

est la valeur du *champ électrique* dû à Q à la position de q , $\beta = V/c$ et

$$\mathbf{B}_Q = \frac{Q(\mathbf{V} \times \hat{\mathbf{r}})/c^2}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (13.14)$$

est la valeur de l'*induction magnétique* due à Q à la position de q . L'unité d'induction magnétique est le *tesla* (weber/mètre²).

Dans ces trois équations, toutes les variables concernent le *même* référentiel S .

Plus généralement, si une charge q se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, la force de Lorentz vaut

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (13.15)$$

La vitesse $\mathbf{v}$ n'est *pas* nécessairement constante.

Notons que, pour un observateur dans S , la charge Q exerce sur q à la fois une force électrique $q\mathbf{E}$ et une force magnétique $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Cependant, pour un observateur dans le référentiel S' de Q , la charge Q est stationnaire et la force exercée par Q sur q est purement électrique, comme sur la Fig. 13.1.

Le fait que la force magnétique exercée sur une charge électrique soit proportionnelle au produit vectoriel de sa vitesse $\mathbf{v}$ par l'induction magnétique locale $\mathbf{B}$ a quatre conséquences évidentes. Dans un référentiel donné, la force magnétique sur une charge ponctuelle (1) existe seulement si la charge se déplace par rapport à ce référentiel, (2) est indépendante de la composante de $\mathbf{v}$ parallèle à $\mathbf{B}$, (3) est perpendiculaire à $\mathbf{v}$ et à $\mathbf{B}$, (4) n'affecte pas l'énergie cinétique de q .

Alors, si $\mathcal{E}$ est l'énergie relativiste mc^2 d'une particule de masse m et de charge Q se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (13.16)$$

Seul le champ électrique peut affecter l'énergie cinétique d'une particule chargée ; un champ magnétique peut défléchir une telle particule, mais pas changer sa vitesse.

13.2 * CHAMPS ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

Il est pratique de définir

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ wb/(A.m)} \quad (13.17)$$

C'est la *perméabilité du vide*.

Nous réécrivons maintenant les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en un point P comme sur la Fig. 13.2 à proximité d'une charge Q qui se déplace à vitesse constante $\mathcal{V}$:

$$\mathbf{E} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 r^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (13.18)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q \mathcal{V} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}}{4\pi\gamma^2 r^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{\mu_0 Q \mathcal{V} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\gamma^2 r^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (13.19)$$

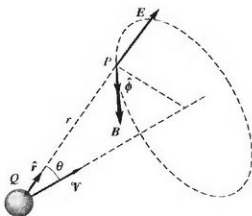


Figure 13.2 Les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en un point P dans le champ d'une charge Q . Cette charge se déplace à la vitesse constante $\mathcal{V}$ par rapport à un référentiel fixe S . La distance r et l'angle θ sont tous deux mesurés dans S .

Voir les Figs. 13.3 à 13.6, et le problème 13.1. Voir aussi la partie 21.1.

Observons que E est *radial*, comme si l'information concernant la position de la charge voyageait à une vitesse infinie ! En réalité, ce n'est que lorsque la vitesse de la charge est constante que le champ électrique est radial. Si la charge accélère, les lignes de champ ne sont pas radiales.

Les lignes de B sont des cercles centrés sur la trajectoire de Q .

À une distance r donnée, E et B sont tous deux maximaux en $\theta = \pi/2$ et minimaux en $\theta = 0, \theta = \pi$.

Écrivons E et B pour les vitesses faibles où $\beta \approx 0, \gamma \approx 1$.

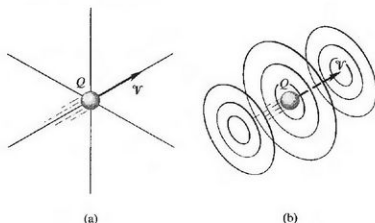


Figure 13.3 (a) Lignes de E et (b) lignes de B vues par un observateur stationnaire pour une charge ponctuelle Q qui se déplace à la vitesse constante v .

Exemple : * Champ d'un électron de 10 GeV

Quelles sont les valeurs maximales de E et B à 10 mm de la trajectoire d'un électron isolé de 10 GeV ? Un GeV vaut 10^9 eV.

E et B sont maximaux en $\theta = 90^\circ$, soit quand la droite joignant la particule au point d'observation est perpendiculaire à la trajectoire dans le référentiel S du laboratoire. Alors $\sin \theta = 1$ et

$$E = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1/\gamma)} \quad (13.20)$$

c'est-à-dire γ fois plus grand que si l'électron était stationnaire,

$$E_{\max} = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (13.21)$$

dans la direction radiale, et

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 \gamma Q v}{4\pi r^2} \quad (13.22)$$

dans la direction azimutale.

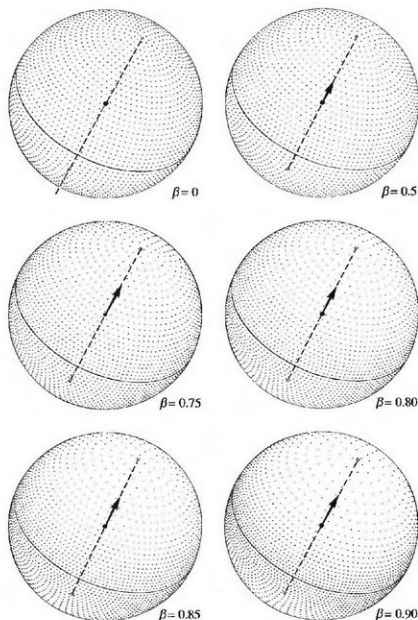


Figure 13.4 Lignes de E pour une charge Q qui se déplace selon le diamètre d'une sphère imaginaire stationnaire.

Les points montrent l'endroit où les lignes émergent de la sphère à l'instant où la charge passe en son centre. La densité des points est une mesure du module de E. Le nombre total de points est le même dans les six figures, pour satisfaire le théorème de Gauss (Partie 3.6). On voit comment le champ s'éloigne de $\theta = 0$ quand la vitesse augmente. Pour $\beta = 1$, le champ est totalement concentré en $\theta = 90^\circ$.

Comme l'énergie cinétique relativiste est 10 GeV,

$$(m - m_0)c^2 = m_0(\gamma - 1)c^2 = 10^{10} \text{ eV} \quad (13.23)$$

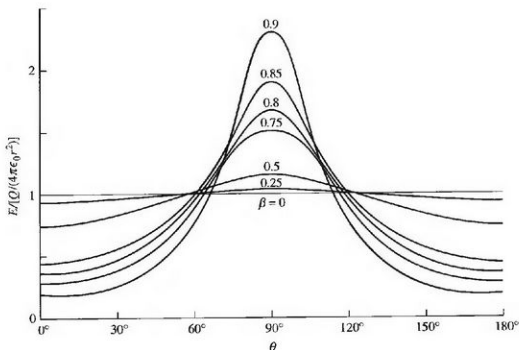


Figure 13.5 Champ E d'une charge ponctuelle en mouvement en fonction de l'angle polaire θ de la Fig. 13.2, pour sept valeurs de $\beta = v/c$.

L'observateur est immobile et voit la charge se déplacer à la vitesse uniforme v . Pour $\beta = 0$ le champ est isotrope. Il est à peine perturbé à $\beta = 0,25$. Quand la vitesse augmente, le champ augmente au voisinage de $\theta = 90^\circ$ et décroît devant la charge (vers $\theta = 0^\circ$) et derrière elle (vers $\theta = 180^\circ$). À des vitesses extrêmement élevées, l'essentiel du champ est concentré près de $\theta = 90^\circ$. Ces courbes expliquent qualitativement la validité du théorème de Gauss pour des charges en mouvement : quand la vitesse augmente, le flux de E se déplace de la région où $\theta \approx 0^\circ$ et $\theta \approx 180^\circ$ vers $\theta \approx 90^\circ$, et le flux total de E reste constant. (Pourquoi alors les aires sous les courbes ne sont-elles pas égales ?) Notons que le champ électrique est symétrique autour de 90° . On ne peut donc pas dire d'après la forme du champ si la charge se déplace vers la droite ou vers la gauche. L'ordonnée maximale sur chaque courbe est γ .

avec $m_0 c^2 = 5,11 \times 10^5$ eV. Donc

$$\gamma = \frac{10^{10}}{5,11 \times 10^5} + 1 \approx 2,0 \times 10^4 \quad (13.24)$$

et $v \approx c$. Alors

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \frac{(9 \times 10^9)(2 \times 10^4)(1,6 \times 10^{-19})}{10^{-4}} \\ &\approx 0,29 \text{ V/m} \end{aligned} \quad (13.25)$$

$$\begin{aligned} B_{\max} &= \frac{(10^{-7})(2 \times 10^4)(1,6 \times 10^{-19})(3 \times 10^8)}{10^{-4}} \\ &\approx 9,6 \times 10^{-10} \text{ T} \end{aligned} \quad (13.26)$$

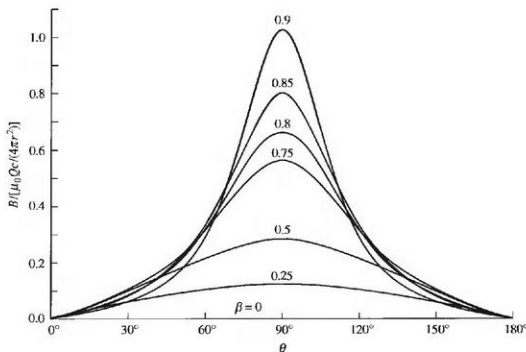


Figure 13.6 Champ B d'une charge ponctuelle en mouvement en fonction de l'angle polaire θ , pour sept valeurs de β .

Pour $\beta = 0$ il n'y a pas de champ magnétique. Quand β augmente, B augmente d'abord pour tous les angles. Ensuite B continue d'augmenter près de $\theta = 90^\circ$, tandis qu'il décroît devant la charge et derrière elle. Aux vitesses extrêmement élevées, l'essentiel du champ magnétique se concentre près du plan $\theta = 90^\circ$. Le champ magnétique, comme le champ électrique, est symétrique autour de $\theta = 90^\circ$.

Exemple : * Champ magnétique près d'un fil rectiligne parcouru par un courant stationnaire

La figure 13.7 montre une charge positive Q qui se déplace à la vitesse v parallèlement à un fil immobile parcouru par un courant I à la distance y . Calculons la force exercée par le fil sur Q .

Dans le référentiel S du fil, la densité linéique de charge nette dans le fil est nulle :

$$\lambda_p + \lambda_n = 0 \quad (13.27)$$

où p fait référence au réseau de charges positives et n aux électrons de conduction. Il y a des charges surfaciques, mais on peut les négliger car elles superposent un autre champ électrique à celui qui nous intéresse ici. Ce champ supplémentaire dépend de la résistivité et de la géométrie du fil, ainsi que du courant qui le parcourt.

Le fil est sur l'axe x et le courant s'écoule dans la direction négative, comme sur la Fig. 13.7. Alors les électrons de conduction se déplacent à la vitesse $v_n \hat{x}$ dans la direction positive de l'axe x .

La densité linéique de charge des électrons de conduction, dans leur référentiel propre S' , est λ'_n . Que vaut leur densité linéique de charge λ_n dans S ? Rappelons-nous, d'après la partie 11.8, que la charge électrique est invariante. Alors, à cause de la contraction de Lorentz (Partie 11.5), leur densité linéique de charge dans S est plus

grande d'un facteur γ_n :

$$\lambda_n = \gamma_n \lambda'_n, \quad \gamma_n = \left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (13.28)$$

Dans S , les charges positives sont stationnaires et exercent sur une charge positive Q une force répulsive dans la direction y

$$F_p = QE = Q \left(\frac{\lambda_p}{2\pi\epsilon_0 y} \right) \quad (13.29)$$

De même, les électrons de conduction exercent dans leur référentiel propre une force attractive

$$F'_n = \frac{Q\lambda'_n}{2\pi\epsilon_0 y} = \frac{Q\lambda_n}{\gamma_n 2\pi\epsilon_0 y} \quad (13.30)$$

où λ'_n est négative et $y' = y$. Cette force est aussi orientée dans la direction y . D'après l'Éq. 12.32,

$$F_n = F'_n \gamma_n \left(1 - \frac{v_n v}{c^2}\right) = \frac{Q\lambda_n}{2\pi\epsilon_0 y} \left(1 - \frac{v_n v}{c^2}\right) \quad (13.31)$$

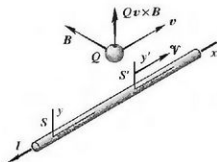


Figure 13.7 Une charge positive Q se déplace à la vitesse v parallèlement à un fil droit parcouru par un courant I .

La force magnétique $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est dans la direction indiquée car pour la charge Q le fil est chargé positivement. Avec Q positive, la force est répulsive.

Cette force n'annule pas tout-à-fait F_p .

La force nette exercée par le fil sur la charge Q , dans le référentiel S du fil, est

$$F = F_p + F_n = \frac{Q\lambda_p}{2\pi\epsilon_0 y} + \frac{Q\lambda_n}{2\pi\epsilon_0 y} - \frac{Q(\lambda_n v_n)v}{2\pi\epsilon_0 y c^2} \quad (13.32)$$

Or, $\lambda_n v_n$ correspond au courant s'écoulant vers la droite, et $-\lambda_n v_n = I$, comme sur la figure. Ainsi, en substituant μ_0 à la place de $1/\epsilon_0 c^2$ et en utilisant l'Éq. 13.27,

$$F = Qv \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \quad (13.33)$$

En exprimant ceci comme une force magnétique $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, on trouve que

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{\phi} \quad (13.34)$$

dans la direction indiquée sur la figure. Nous redécouvrons cette relation dans la partie 17.1.

Cette force magnétique est infinitésimale comparée à la force entre Q et les électrons de conduction dans le fil ou entre Q et le réseau des ions positifs.

Disons que l'on a un fil de cuivre de section 1 mm^2 parcouru par un courant de 1 A . Supposons alors que Q est un électron voyageant à la vitesse de dérive des électrons de conduction dans le fil. On peut calculer ces forces de la façon suivante.

Nous avons trouvé au paragraphe 4.5.1 que la vitesse de dérive vaut environ 10^{-4} m/s , soit environ 40 cm/h . Alors γ est égal à 1, à 10^{-25} près.

Le cuivre contient 10^{29} atomes par mètre cube et un électron de conduction par atome. Donc un mètre de fil contient $1,6 \times 10^{24}$ C d'électrons de conduction. Si y vaut 1 cm , alors la force d'attraction entre l'électron et le réseau positif vaut

$$F = \frac{\lambda_p}{2\pi\epsilon_0 y} Q = \frac{1,6 \times 10^{24}}{2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^{-2}} 1,6 \times 10^{-19} \quad (13.35)$$

$$\approx 4,6 \times 10^{-3} \text{ N} \quad (13.36)$$

Cette force, si elle agissait seule, communiquerait à l'électron une accélération de $5 \times 10^{27} \text{ m/s}^2$! La force de répulsion entre Q et les électrons dans le fil est légèrement plus grande.

La force *nette* sur un électron dont la vitesse est 10^{-4} m/s est la force magnétique de l'Éq. 13.33 :

$$F = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1/(2\pi \times 10^{-2})} = 3,2 \times 10^{-28} \text{ N} \quad (13.37)$$

Ainsi la force magnétique, dans ce cas particulier, est plus petite que la force électrostatique de 25 ordres de grandeur ! La force magnétique est un effet purement relativiste qui a lieu pour $v/c = 10^{-4}/(3 \times 10^8) \approx 3 \times 10^{-13}$.

Bien sûr, la force exercée sur un deuxième fil parcouru par du courant est appréciable, pour la simple raison qu'il contient aussi un nombre énorme d'électrons de conduction.

Cf. exercices : 13.1 ; 13.2 ; 13.3 ; 13.4 ; 13.5 ; 13.6 ; 13.7.

13.3 * LA FORCE SUR Q

Pour calculer la force exercée par q sur Q sur la Fig. 13.1, on échange les rôles de q et Q dans l'Éq. 13.11. Cela signifie : (1) remplacer $\hat{\mathbf{r}}$ par $-\hat{\mathbf{r}}$, comme en Fig. 13.8 ; (2) échanger $\mathbf{V}$ et $\mathbf{v}$; (3) remplacer θ par θ' ; et (4) remplacer $\beta = V/c$ par $\beta' = v/c$ et γ par γ' .

Donc

$$\mathbf{F}_{qQ} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} + \mathbf{V} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})/c^2}{\gamma'^2 r^3 (1 - \beta'^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \quad (13.38)$$

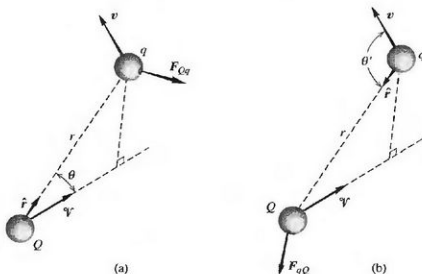


Figure 13.8 (a) La force F_{Qq} exercée par Q sur q . (b) La force F_{qQ} exercée par q sur Q . Ces deux forces ne sont pas égales et opposées, comme on pourrait s'y attendre en mécanique classique.

De toute évidence, $F_{qQ} \neq -F_{Qq}$. Les forces électriques sont dans des directions opposées, mais leurs modules ne sont pas les mêmes à cause des termes γ' , β' , θ' . Les forces magnétiques sont totalement différentes. Les forces F_{Qq} et F_{qQ} sont égales si $v^2 \ll c^2$ et si $Vv \ll c^2$.

Il y a une différence remarquable entre F_{qQ} et F_{Qq} . L'expression pour F_{Qq} est valide si la vitesse V de Q est constante, tandis que celle de F_{qQ} est valable si v est constante.

Le fait que $F_{qQ} \neq -F_{Qq}$ n'est pas propre aux phénomènes électriques. C'est un effet relativiste qui se produit avec n'importe quel type de force.

13.4 * TRANSFORMATION DE Q , E , B , A ET V

Nous venons de voir qu'un champ purement électrique dans un référentiel devient un champ électrique plus un champ magnétique quand on l'observe dans un autre référentiel. Nous énonçons maintenant les règles générales de transformation pour les champs électrique et magnétique (Lorrain, Corson et Lorrain [32]).

Comme d'habitude, on a deux référentiels, l'un fixe, S , et l'autre, S' , qui se déplace à la vitesse V par rapport à S . Les deux référentiels sont inertiels, ou non-accélérés. Des observateurs dans S et S' comparent leurs mesures du même phénomène.

Dans le cas général où la vitesse V de S' par rapport à S peut prendre n'importe quelle valeur jusqu'à la vitesse c de la lumière, les équations de transformation sont celles du tableau 13.1 où, comme d'habitude, $\gamma = [1 - (v^2/c^2)]^{-1/2}$ et $\gamma \geq 1$.

Si $v^2 \ll c^2$, soit pour $v \ll c$, $1c = 3 \times 10^7$ m/s, alors $\gamma \approx 1$.

Notons que, dans les équations pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, les parenthèses concernent les composantes *perpendiculaires* à la vitesse $\mathbf{V}$. Mais dans les équations pour $\mathbf{A}$ et V , les parenthèses concernent les composantes *parallèles*.

Comparons maintenant la transformation de $\mathbf{A}$ et de V/c avec la transformation de Lorentz du tableau 11.1 : le vecteur $\mathbf{A}$ (Partie 14.4) joue le même rôle que $\mathbf{r}$ et le scalaire V/c le même rôle que t . Des grandeurs comme $(\mathbf{A}, V/c)$ ou $(A_x, A_y, A_z, V/c)$, qui se transforment comme $(\mathbf{r}, t)$ ou (x, y, z, t) , sont appelées *quadrivecteurs*.

Exemple : * Le condensateur à faces planes et parallèles

Dans son référentiel propre, un condensateur chargé a un champ électrique et pas de champ magnétique. Si le condensateur se déplace à la vitesse $\mathbf{V}$ parallèlement aux plaques, quel champ un observateur immobile mesure-t-il ? Supposons que les plaques sont grandes et négligeons les effets de bord. Négligeons aussi le champ électrique à l'extérieur du condensateur. L'observateur immobile mesure la tension entre les plaques grâce à une paire de contacts glissants. Les deux observateurs sont équipés de magnétomètres.

Tableau 13.1 La transformation des variables électriques et magnétiques.

$Q = Q'$,	$Q' = Q$
$\mathbf{E} = \mathbf{E}'_{\parallel} + \gamma (\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{V} \times \mathbf{B}')$,	$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{\parallel} + \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$
$\mathbf{B} = \mathbf{B}'_{\parallel} + \gamma \left(\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}'}{c^2} \right)$,	$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_{\parallel} + \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}}{c^2} \right)$
$\mathbf{A} = \gamma \left(\mathbf{A}'_{\parallel} + \frac{\mathbf{V}}{c^2} V' \right) + \mathbf{A}'_{\perp}$	$\mathbf{A}' = \gamma \left(\mathbf{A}_{\parallel} - \frac{\mathbf{V}}{c^2} V \right) + \mathbf{A}_{\perp}$
$\frac{V}{c} = \gamma \left(\frac{V'}{c} + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}'_{\parallel}}{c} \right)$,	$\frac{V'}{c} = \gamma \left(\frac{V}{c} - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_{\parallel}}{c} \right)$

Choisissons les axes comme en Fig. 13.9.

(a) Champs $\mathbf{E}$. Dans S' , $\mathbf{E}$ n'a qu'une composante selon y :

$$E'_x = 0, \quad E'_y = E', \quad E'_z = 0 \quad (13.39)$$

Alors selon le tableau 13.1,

$$E_x = 0, \quad E_y = \gamma E', \quad E_z = 0 \quad (13.40)$$

Pourquoi cela ? Dans le référentiel S' du condensateur, les densités de charge électrique valent $\pm \sigma' = \pm \epsilon_0 E'$, d'après le théorème de Gauss (Partie 3.6). Dans le référentiel S fixe, les charges sont les mêmes car la charge électrique est invariante, mais les plaques sont plus courtes dans la direction du mouvement d'un facteur $1/\gamma$

(Partie 11.5), et donc

$$\sigma = \gamma\sigma' \quad (13.41)$$

Ainsi un observateur fixe, dans S , mesure un champ électrique plus grand d'un facteur γ que celui mesuré par un observateur qui se déplace avec le condensateur dans S' :

$$E = \gamma E' \quad (13.42)$$

(b) Potentiels V . Dans S' la différence de potentiel entre les plaques est

$$V'_0 = E' s \quad (13.43)$$

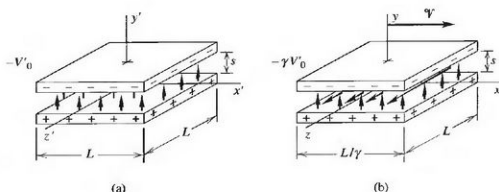


Figure 13.9 (a) Condensateur à faces planes et parallèles, vu dans son référentiel propre.

Le champ électrique est E' , et $B' = 0$. (b) Le même condensateur se déplace vers la droite à la vitesse V . Ici $E = \gamma E'$, et $B = \gamma(V/c^2)E'$ dans la direction positive de l'axe z . Les origines de S et S' sont sur la plaque inférieure. On a négligé les effets de bord.

Or l'espacement s entre les plaques est le même dans les deux référentiels, car cette longueur est perpendiculaire à V . Mais nous venons de voir que $\sigma = \gamma\sigma'$. Alors la différence de potentiel V_0 entre les plaques, dans le référentiel S fixe, est donnée par

$$V_0 = Es = \gamma E' s = \gamma V'_0 \quad (13.44)$$

Les différences de potentiels ne sont pas les mêmes : $V_0 > V'_0$! De même,

$$V = \gamma V' \quad (13.45)$$

(c) Capacités. La capacité est la charge d'une plaque divisée par la tension entre les plaques. Ainsi,

$$C = \frac{Q}{V_0}, \quad C' = \frac{Q}{V'_0} = \frac{Q}{V_0/\gamma} = \gamma C \quad (13.46)$$

La capacité dans le référentiel du condensateur est plus grande que dans le référentiel fixe d'un facteur γ . Cela est en accord avec le fait que, même si les charges sont les mêmes, V_0 est plus grand que V'_0 d'un facteur γ . Dans les deux cas, la capacité est proportionnelle à la surface et inversement proportionnelle à l'espacement, comme dans la partie 6.4, et la surface est γ fois plus grande dans S' que dans S .

(d) Champs $\mathbf{B}$. Dans le référentiel S' du condensateur, il n'y a pas de champ magnétique :

$$B'_x = B'_y = B'_z = 0 \quad (13.47)$$

Alors, d'après l'équation pour $\mathbf{B}$ du tableau 13.1,

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = \gamma \frac{V}{c^2} E' \quad (13.48)$$

L'observateur fixe, dans le référentiel S , mesure un champ magnétique car il voit un courant s'écouler vers la droite dans la plaque inférieure et un courant égal s'écoulant vers la gauche dans la plaque supérieure. Le champ B_z est orienté dans la direction $+\mathbf{V} \times \mathbf{E}$, donc dans la direction $+z$.

(e) Potentiels-vecteurs $\mathbf{A}$ (Partie 14.4). Dans S' , $\mathbf{B}' = 0$ et $\mathbf{A}' = 0$. Or, dans l'équation pour $\mathbf{A}$ du tableau 13.1, γ fois la parenthèse donne la composante parallèle de $\mathbf{A}$ et

$$A_{\parallel} = \gamma \frac{V}{c^2} V' \quad (13.49)$$

De même, l'équation pour $\mathbf{A}'$ donne deux résultats :

$$A_{\parallel} = \frac{V}{c^2} V = \gamma \frac{V}{c^2} V' \quad (13.50)$$

comme ci-dessus, et

$$A_{\perp} = 0 \quad (13.51)$$

en accord avec le fait que les courants sont parallèles à $\mathbf{V}$.

D'après l'équation pour V , puisque $\mathbf{A}' = 0$, $V = \gamma V'$ comme ci-dessus. Enfin, selon l'équation pour V' ,

$$V' = \gamma(V - V A_{\parallel}) = \gamma \left(V - V \frac{V}{c^2} V \right) = \gamma V \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{V}{\gamma} \quad (13.52)$$

à nouveau comme ci-dessus.

13.5 * RÉSUMÉ

Une charge Q se déplace à vitesse constante $\mathbf{V}$, comme sur les Figs. 13.1 à 13.6. La force de Lorentz exercée par Q sur une charge q se déplaçant à une vitesse $\mathbf{v}$ quelconque est

$$\mathbf{F}_{Qq} = q(\mathbf{E}_Q + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_Q) \quad (13.12)$$

où $\mathbf{E}_Q$ et $\mathbf{B}_Q$ sont, respectivement, les champs électrique et magnétique de Q à la position de q , avec

$$\mathbf{E} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (13.18)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q \mathbf{V} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (13.19)$$

et $\beta = V/c$.

La force exercée par Q sur q n'est *pas* égale à la force exercée par q sur Q , sauf si $v^2 \ll c^2$.

Le champ magnétique d'un fil parcouru par un courant est un effet relativiste qui se produit, typiquement, pour $v/c \approx 10^{-13}$, où v est la vitesse de dérive des électrons de conduction. Alors $\gamma \approx 1$ à 10^{-25} près.

Les charge électriques sont invariantes :

$$Q = Q'$$

Les équations de transformation pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont les suivantes (voir tableau 13.1) :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'_{\parallel} + \gamma(\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{V} \times \mathbf{B}')$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{\parallel} + \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}'_{\parallel} + \gamma\left(\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}'}{c^2}\right)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_{\parallel} + \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}}{c^2}\right)$$

EXERCICES

13.1 Expressions alternatives pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$

Montrer que

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma Q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \gamma Q \mathbf{V} \times \mathbf{r}}{4\pi(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

13.2 Champ d'un proton de 10 MeV

Tracer E et B en fonction du temps en un point P situé à un centimètre de la trajectoire d'un proton de 10 MeV. On prend P en $(0; 0, 0; 0)$ avec la charge en $(Vt; 0; 0)$.

13.3 Force entre des électrons qui se déplacent côte à côte

Calculer la force, observée dans le laboratoire, entre deux électrons qui se déplacent côte à côte selon deux trajectoires parallèles séparées d'un millimètre, si chacun a une énergie cinétique de (a) 1 eV et (b) 1 MeV.

13.4 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ est invariant

Montrer que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ est invariant par transformation de Lorentz.

13.5 $B^2 - E^2/c^2$ est invariant

Montrer que $B^2 - E^2/c^2$ est invariant par transformation de Lorentz.

13.6 L'angle entre E et B n'est pas invariant

Montrer que l'angle entre E et B n'est pas invariant.

13.7 Champ magnétique indépendant du temps

Supposons que, dans S , il y ait un champ magnétique constant et pas de champ électrique.

Montrer que $E' = \mathbf{V} \times \mathbf{B}'$ dans S' . Noter le prime dans le membre de droite. Ainsi E' est perpendiculaire à la fois à $\mathbf{V}$ et à $\mathbf{B}'$.

Chapitre 14

Champs magnétiques : l'induction magnétique $\mathbf{B}$ et le potentiel vecteur $\mathbf{A}$

Imaginons un ensemble de charges qui se déplacent dans l'espace⁽¹⁾. En tout point $\mathbf{r}$ de l'espace et à tout instant t il existe un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et une induction magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, définis de la façon suivante. Si une charge Q se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ en $(\mathbf{r}, t)$ dans ce champ, alors elle est soumise à une force de Lorentz

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (14.1)$$

La force électrique $Q\mathbf{E}$ est proportionnelle à Q mais indépendante de $\mathbf{v}$, tandis que la force magnétique $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est orthogonale à $\mathbf{v}$ et $\mathbf{B}$.

Dans les chapitres 3 à 10, nous avons étudié les champs $\mathbf{E}$ de charges fixes ou se déplaçant lentement. Les charges fixes n'ont pas de champ magnétique ; un champ magnétique n'existe que si les charges se déplacent par rapport à l'observateur.

Dans ce chapitre nous étudions les champs magnétiques de courants électriques constants. On suppose que la densité de charge électrique ρ est constante aussi. Donc $\partial\rho/\partial t = 0$ et en conséquence, d'après la partie 4.2, $\text{div } \mathbf{J} = 0$. On suppose aussi qu'il n'y a ni matériau magnétique ni matériau en mouvement dans le champ.

14.1 * LES MONOPÔLES MAGNÉTIQUES

On suppose ici que les champs magnétiques sont produits exclusivement par le mouvement de charges électriques.

(1) Le lecteur qui n'a pas étudié les chapitres 11 à 13 portant sur la relativité peut simplement ignorer les références qui leur sont faites.

Cependant, en 1931 Dirac postula que les champs magnétiques peuvent aussi être produits par des « charges » magnétiques appelées *monopôles magnétiques*. De telles particules n'ont jamais été observées à ce jour (2000). La valeur théorique de la charge magnétique élémentaire⁽¹⁾ vaut

$$\frac{h}{e} = 4,1356692 \times 10^{-15} \quad \text{wb} \quad (14.2)$$

où h est la constante de Planck et e la charge de l'électron. Voir le tableau en annexe E.

À une distance r d'un monopôle magnétique stationnaire de « charge » Q^* , on aurait

$$\mathbf{B} = \frac{Q^*}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (14.3)$$

Ainsi, la force d'attraction ou de répulsion entre deux monopôles Q_a^* et Q_b^* serait

$$\mathbf{F} = \frac{Q_a^* Q_b^*}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (14.4)$$

Un champ magnétique exercerait une force $Q^* \mathbf{B} / \mu_0$ sur un monopôle dans le vide.

Cf. exercices : 14.1 ; 14.2.

14.2 L'INDUCTION MAGNÉTIQUE **B**. LA LOI DE BIOT ET SAVART

À proximité d'un circuit électrique C parcouru par un courant stationnaire I il existe un champ magnétique et, en un point P de l'espace, comme sur la Fig. 14.1,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (14.5)$$

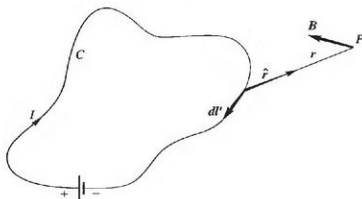


Figure 14.1 Circuit C parcouru par un courant I et point P dans son champ. En P l'induction magnétique est $\mathbf{B}$.

Comme d'habitude, le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{r}}$ est orienté *de* la source *vers* le point d'observation P . C'est la *loi de Biot et Savart*. L'intégration ne peut être effectuée analytiquement que pour les géométries les plus simples.

(1) Il s'agit ici de la charge de Dirac ; la charge de Schwinger est deux fois plus grande. Le weber est défini dans l'Éq. 14.7.

Par définition,

$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{wb/(A.m)} \quad (14.6)$$

C'est la *perméabilité du vide*.

L'équation 14.5 est valable aussi pour les champs de courants alternatifs tant que le temps r/c , où c est la vitesse de la lumière, est une petite fraction d'une période.

L'unité de l'induction magnétique est le *tesla* (symbole T). On peut trouver les dimensions du tesla de la façon suivante. Comme on l'a vu dans l'introduction de ce chapitre, vB a les dimensions de E . Alors

$$1T = 1 \frac{V \cdot s}{m \cdot m} = \frac{wb}{m^2} \quad (14.7)$$

Un volt-seconde est défini comme un *weber*.

On a considéré un courant I s'écoulant à travers un fil mince. Si le courant s'écoule dans un volume fini, on remplace I par $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}'$, $\mathbf{J}$ étant la densité de courant en ampères par mètre carré en un point et $d\mathbf{A}'$ un élément de surface orienté comme sur la Fig. 14.2. Alors $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}' \cdot d\mathbf{l}'$ vaut $J dV'$ et, au point P ,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV' \quad (14.8)$$

où V' est un volume quelconque contenant tous les courants et r est la distance entre l'élément de volume dV' et le point P .

La densité de courant $\mathbf{J}$ englobe les charges libres en mouvement, les courants de polarisation dans les diélectriques (Partie 7.3), et les courants équivalents dans les matériaux magnétiques (Partie 16.3).

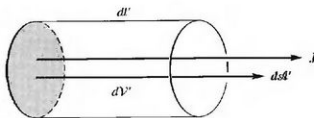


Figure 14.2 En un point donné d'une distribution volumique de courant, la densité de courant est $\mathbf{J}$.

Le vecteur $d\mathbf{A}'$ définit l'aire et l'orientation de la surface grisée. En déplaçant cet élément de surface vers la droite d'une distance dl' le long de $\mathbf{J}$, on balaye un volume $d\mathbf{A}' dl' = dV'$.

Cette intégrale peut-elle servir pour calculer $\mathbf{B}$ en un point à l'intérieur d'une distribution de courant? L'intégrale semble diverger car r devient nul quand dV' est en P . L'intégrale, en fait, ne diverge pas : elle est valable même si le point P se trouve à l'intérieur du corps conducteur. Nous avons rencontré le même problème quand nous avons calculé la valeur de $\mathbf{E}$ à l'intérieur d'une distribution de charge dans la partie 3.5.

Les *lignes de champ* de $\mathbf{B}$ sont orientées partout dans la direction de $\mathbf{B}$. Elles sont des « outils de pensée » utiles, comme les lignes de champ de $\mathbf{E}$, mais pas plus. Beaucoup

d'auteurs les appellent « lignes de force », ce qui est impropre, car la force magnétique (Partie 19.1) est perpendiculaire, et non parallèle, à **B**.

C'est aussi une erreur fréquente que de discuter la géométrie de certaines lignes de champ magnétique imaginaires sans même considérer les courants nécessaires. Il n'y a bien entendu aucun intérêt à postuler une configuration de champ magnétique sans d'abord s'assurer que les courants électriques nécessaires sont physiquement pertinents.

À nouveau comme pour le champ électrique, il est très pratique d'utiliser le concept de flux. Le flux magnétique à travers une surface d'aire $\mathcal{A}$ est

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{wb} \quad (14.9)$$

La surface est habituellement ouverte ; si elle est fermée, alors $\Phi = 0$, comme on le verra ci-dessous.

Les intégrales ci-dessus pour **B** impliquent que le **B** net est la somme des **B** des éléments de courant $I d\mathbf{l}'$, ou $\mathbf{J} dV'$. Le principe de superposition est valable pour les champs magnétiques comme pour les champs électriques (Partie 3.3) : s'il existe plusieurs distributions de courant, le **B** net est alors la somme vectorielle des **B** individuels.

Exemple : Long fil rectiligne

Un élément $d\mathbf{l}'$ d'un fil long et rectiligne parcouru par un courant I , comme en Fig. 14.3. donne, en un point $P(r, \theta, \phi)$, une induction magnétique

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}' \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}' \cos \alpha}{4\pi r^2} \hat{\phi} \quad (14.10)$$

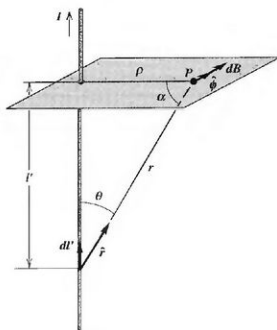


Figure 14.3 Fil long et rectiligne parcouru par un courant I .

Au point P l'élément de courant $I d\mathbf{l}'$ engendre un $d\mathbf{B}$ dans la direction indiquée. Une ligne de champ de **B** est un cercle centré sur le fil.

L'orientation relative de $I d\mathbf{l}'$ et $\mathbf{B}$ satisfait la règle du tire-bouchon. Ici

$$l' = \rho \tan \alpha, \quad dl' = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha} = \frac{r^2 d\alpha}{\rho} \quad (14.11)$$

Donc

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (14.12)$$

Les lignes de champ de $\mathbf{B}$ sont des cercles situés dans un plan perpendiculaire au fil et centrés sur lui. La valeur de $\mathbf{B}$ décroît comme $1/\rho$.

Exemple : Spire circulaire

Pour calculer la valeur de $\mathbf{B}$ sur l'axe d'une spire circulaire de rayon a , référons-nous à la Fig. 14.4. La figure représente le $d\mathbf{B}$ d'un élément de courant $I d\mathbf{l}'$. Par symétrie, le $\mathbf{B}$ total est orienté selon l'axe et

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl'}{4\pi r^2} \cos \theta \quad (14.13)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 2\pi a I}{4\pi r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.14)$$

Le long de l'axe, $B = \mu_0 I / (2a)$ en $z = 0$ et décroît comme $1/z^3$ pour $z^2 \gg a^2$.

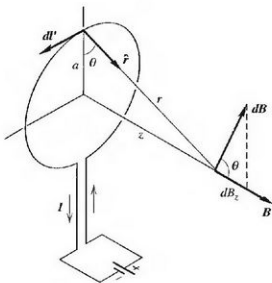


Figure 14.4 Spire circulaire.

Spire de fil de rayon a parcourue par un courant I , champ $d\mathbf{B}$ sur l'axe z engendré par l'élément de courant $I d\mathbf{l}'$, et champ total $\mathbf{B}$.

Exemple : Solénoïde

Le résultat ci-dessus peut servir pour calculer **B** sur l'axe du solénoïde de la Fig. 14.5 en sommant les **dB** des spires individuelles. Le solénoïde est bobiné serré, de longueur *L* avec *N'* spires par mètre et son rayon est *R*. Au centre,

$$B = \frac{\mu_0}{2} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{R^2 N' I dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.15)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} N' I \frac{L}{(R^2 + L^2/4)^{1/2}} = \mu_0 N' I \sin \theta_m \quad (14.16)$$

Voir la Fig. 14.5 pour la définition de θ_m et θ_e . À une extrémité, toujours sur l'axe,

$$B = \frac{\mu_0 N' I \sin \theta_e}{2} \quad (14.17)$$

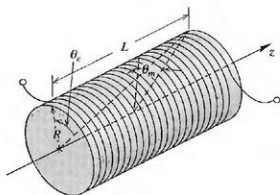


Figure 14.5 Solénoïde mince.

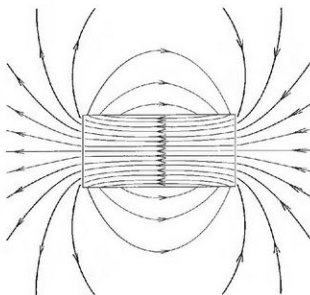


Figure 14.6 Solénoïde.

Lignes de champ de **B** pour un solénoïde de longueur égale à deux fois son diamètre.

L'induction magnétique est plus grande au centre qu'aux extrémités car les lignes de $\mathbf{B}$ s'évasent aux extrémités, comme en Fig. 14.6. À l'intérieur d'un long solénoïde, en des points éloignés des extrémités, $B = \mu_0 N' I$, même hors de l'axe (Partie 15.4).

Calculer $\mathbf{B}$ hors de l'axe d'un solénoïde court serait beaucoup plus difficile.

Exemple : Les boucles de la couronne solaire. Champ magnétique lointain sur l'axe d'un solénoïde

Trouvons une expression approchée pour B_z en un point P sur l'axe du solénoïde mince de la Fig. 14.5, à une distance D beaucoup plus grande que sa longueur L ou son rayon a .

Cet exemple concerne les *boucles de la couronne solaire*, qui sont des arcs lumineux s'étendant jusqu'à 250 000 km au-dessus de la surface du Soleil. (Le diamètre de la Terre vaut environ 13 000 km). Voir la Fig. 14.7. Voir aussi Zirin [58] et Golub et Pasachoff [13]. Les boucles sont nettement non-balistiques, d'abord parce qu'elles sont souvent en forme de fer à cheval, et ensuite parce que certaines boucles sont presque horizontales. Les boucles de la couronne suivent plus ou moins les lignes de champ magnétique, parce qu'elles connectent des régions de polarité magnétique opposée sur la surface du Soleil, par exemple des taches solaires. (Les taches solaires engendrent des champs magnétiques analogues à ceux de solénoïdes placés plus ou moins verticalement sur la surface. Voir l'exemple de la partie 17.5.)

Il y a d'innombrables boucles de la couronne sur la surface du Soleil. Le même type de phénomène se produit sans aucun doute sur d'autres étoiles.

Il n'existe pas de modèle satisfaisant pour les boucles de la couronne. Expliquer ce phénomène spectaculaire est particulièrement difficile. Les boucles sont peut-être des faisceaux de particules chargées qui suivent les lignes de champ magnétique, mais alors, comment peuvent-elles avoir une largeur uniforme sur toute leur longueur tandis que les lignes de champ magnétique divergent rapidement au-dessus des taches solaires, comme à l'extrémité d'un solénoïde ? Rappelons-nous la Fig. 14.6.

Par ailleurs, les boucles voisines ne semblent pas interagir ! Si les boucles sont des faisceaux de particules chargées, alors chacune crée son propre champ magnétique et elles devraient soit s'attirer soit se repousser. Un autre fait inexplicable est que le champ magnétique de guidage décroît de beaucoup d'ordres de grandeur quand l'altitude augmente, comme nous allons le voir ici.

Nous avons en réalité besoin de calculer le champ *horizontal* à mi-chemin entre deux solénoïdes de polarité opposée, loin au-dessus d'eux, mais il nous suffira ici de calculer le champ *axial* à grande distance au-dessus d'un seul solénoïde.

Voir la Fig. 14.8. Prenons l'origine au centre O d'un solénoïde mince de rayon R , soient D la distance au point P et z la position de l'élément de bobinage $N' dz$, où N' est le nombre de spires par mètre.

Alors, d'après l'Éq. 14.14, en P , avec $u = R$,

$$B_{z,D} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 I R^2}{2 [R^2 + (D - z)^2]^{3/2}} N' dz \quad (14.18)$$

$$= \frac{\mu_0 I N'}{2} \left[\frac{-(2D - L)}{(4R^2 + 4D^2 + L^2 - 4DL)^{1/2}} \right] + \frac{\mu_0 I N'}{2} \left[\frac{2D + L}{(4R^2 + 4D^2 + L^2 + 4DL)^{1/2}} \right] \quad (14.19)$$

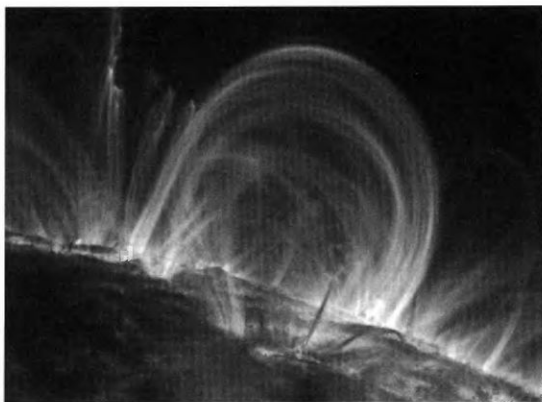


Figure 14.7 Boucles de la couronne solaire, que l'on peut voir en couleurs sur le web, à l'adresse <http://vestige.lmsal.com/TRACE/Science/ScientificResults/TRACEclimage1.jpg>.

Ces boucles coronales ont été obtenues par le satellite TRACE (*Transition Region And Coronal Explorer*). Cette image a été acquise selon un rayonnement UV d'une longueur d'onde de 17,1 nm. Ces radiations sont émises par le fer ionisé à une température de 1 million de degré. Les boucles émergent d'une région active où il y a des champs magnétiques intenses. Le Soleil a un rayon de 7×10^8 m. Jusqu'à quelle altitude s'élèvent ces boucles ?

En première approximation, si $D \gg L$ et $D \gg R$, alors $B_z \approx 0$. C'est juste mais inutile.

Trouvons une expression approchée pour la première parenthèse dans l'équation ci-dessus ; la deuxième parenthèse peut être traitée de manière similaire. Notons que le dénominateur de la première parenthèse est égal à

$$[4R^2 + (2D - L)^2]^{1/2}$$

On peut donc réécrire la première parenthèse de l'Éq. 14.19 comme

$$- \left[\frac{1}{\{1 + [4R^2/(2D - L)^2]\}^{1/2}} \right]$$

Comme le deuxième terme dans le dénominateur de la fraction est beaucoup plus petit que un, nous développons en série et la parenthèse devient approximativement égale à

$$- \left[1 - \frac{1}{2} \frac{4R^2}{(2D - L)^2} \right] = - \left[1 - \frac{1}{2} \frac{4R^2}{4D^2} \left(\frac{1}{1 - L/(2D)} \right)^2 \right] \quad (14.20)$$

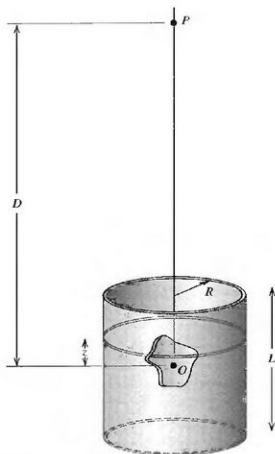


Figure 14.8 Solénoïde mince de rayon R et de longueur L avec N' spires par mètre. Le point P est à la distance D au-dessus du centre O du solénoïde.

Mais puisque $L/(2D) \ll 1$, on peut encore développer en série. La première parenthèse de l'Éq. 14.19 devient alors approximativement égale à

$$- \left[1 - \frac{R^2}{2D^2} \left(1 + 2\frac{L}{2D} \right) \right]$$

De même, la deuxième parenthèse de l'Éq. 14.19 est approximativement égale à

$$+ \left[1 - \frac{R^2}{2D^2} \left(1 - 2\frac{L}{2D} \right) \right]$$

Finalement,

$$B_{z,D} = \frac{\mu_0 I N' R^2 L}{2 D^3} \quad (14.21)$$

Or, à l'extrémité du solénoïde, d'après l'Éq. 14.17

$$B_{z,L/2} = \frac{\mu_0 N' I}{2} \frac{L}{(R^2 + L^2)^{1/2}} \quad (14.22)$$

si bien que

$$\frac{B_{z,D}}{B_{z,L/2}} = \frac{R^2(L^2 + R^2)^{1/2}}{D^3} \quad (14.23)$$

Posons $L = KR$ avec K de l'ordre de quelques unités. Ce rapport est alors égal à

$$(K^2 + 1)^{1/2} (R/D)^3 \approx (R/D)^3 \ll 1$$

Près du sommet d'une boucle typique, $(R/D)^3 \approx (1/30)^3 \approx 4 \times 10^{-5}$, et le champ magnétique de guidage est plus faible qu'à la surface du Soleil de ce facteur !

Cf. exercices : 14.3 ; 14.4 ; 14.5 ; 14.6 ; 14.7 ; 14.8 ; 14.9 ; 14.10 ; 14.11.

14.3 LA DIVERGENCE DE **B**

En supposant que les monopôles magnétiques n'existent pas (Partie 14.1), ou au moins que la densité de charge magnétique nette est nulle partout, tous les champs magnétiques sont produits par des courants électriques, et les lignes de champ de **B** pour chaque élément de courant sont des cercles, comme sur la Fig. 14.3. Alors le flux net sortant de **B** à travers une surface fermée quelconque est nul :

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (14.24)$$

On obtient le *théorème de Gauss pour B* en appliquant le théorème de la divergence :

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \quad (14.25)$$

Ces deux équations sont des formes alternatives de l'une des équations de Maxwell. Observons que l'Éq. 14.25 établit une relation entre les dérivées spatiales de **B** en un point donné. L'équation 14.24, au contraire, concerne le flux magnétique à travers une surface fermée.

14.4 LE POTENTIEL VECTEUR **A**

Contrairement à ce qui est souvent affirmé ou suggéré dans les livres, le potentiel vecteur **A** n'est *pas* seulement un artifice mathématique ; il est aussi important que l'induction magnétique **B** et le potentiel électrique *V*. Comme nous le verrons au chapitre 20, la seule manière correcte d'exprimer la loi de l'induction de Faraday dans les systèmes stationnaires est d'écrire que $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$ pour un champ électrique d'origine magnétique.

Nous venons de voir que $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Alors

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (14.26)$$

où **A** est le *potentiel vecteur*, par opposition à *V* qui est le *potentiel scalaire*. La divergence de **B** est alors automatiquement nulle, car la divergence d'un rotationnel est nulle.

On voit immédiatement que, pour un **B** donné, il existe un nombre infini de **A** possibles. En effet, on peut ajouter à **A** n'importe quelle quantité dont le rotationnel est nul, par exemple $25\hat{x}$, sans affecter **B**. L'induction magnétique est une grandeur mesurable, mais **A** n'est connu qu'à un terme additif près.⁽¹⁾

Notons l'analogie avec la relation $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ de l'électrostatique.

Remarquons aussi que **B** est fonction des dérivées spatiales de **A**, exactement comme **E** est fonction des dérivées spatiales de *V*. Donc, pour déduire la valeur de **B** de **A** en un point *P* donné, on doit connaître la valeur de **A** *au voisinage* de *P*.

Nous déduisons maintenant l'intégrale pour **A**, en partant de la loi de Biot et Savart de la partie 14.2 :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\text{grad } \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{J} dV' \quad (14.27)$$

grâce à l'identité 16 de l'annexe E. En appliquant maintenant l'identité 11, on trouve que

$$\left(\text{grad } \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{J} = \text{rot } \frac{\mathbf{J}}{r} - \frac{\text{rot } \mathbf{J}}{r} \quad (14.28)$$

où le deuxième terme à droite est nul car **J** est fonction de *x'*, *y'*, *z'*, tandis que **rot** concerne les dérivées par rapport à *x*, *y*, *z*. Donc

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\text{rot } \frac{\mathbf{J}}{r} \right) dV' = \text{rot } \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{r} dV' \right) \quad (14.29)$$

et

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{r} dV' \quad (14.30)$$

Cette expression pour **A** a une valeur précise pour une distribution de courant donné.

Cette intégrale, comme celle pour **B**, semble diverger à l'intérieur d'un conducteur parcouru par un courant, à cause du *r* au dénominateur. En fait elle se comporte bien, comme l'intégrale pour *V* à l'intérieur d'une distribution de charge.

(1) Voir Feynman, Leighton et Sands [8] pour une discussion des aspects quantiques de **A**.

Si un courant I s'écoule dans un circuit C qui n'est pas nécessairement fermé, alors en un point $P(x, y, z)$ de l'espace,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l}'}{r} \quad (14.31)$$

où l'élément $d\mathbf{l}'$ du circuit C est en $P'(x', y', z')$ et r est la distance entre P et P' .

Ces deux intégrales sont valables aussi pour le champ de courants alternatifs si le retard temporel r/c est une petite fraction de période.

Exemple : **A** et **B** près d'un fil long et rectiligne

Nous calculons d'abord **A**, puis en déduisons **B**, dans le champ du fil long et rectiligne parcouru par un courant de la Fig. 14.9. On devrait trouver la même valeur de **B** que dans le premier exemple de la partie 14.2. À une distance ρ ,

$$dA = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl'}{r} \quad (14.32)$$

Le vecteur **A** est *parallèle au fil* et orienté dans la direction du courant.

Pour un conducteur infiniment long, dA est proportionnel à dl'/l' pour les grandes valeurs de r où $r \approx l'$. Alors **A** tend vers l'infini de façon logarithmique. Cependant, le fait qu'une fonction est infinie ne signifie pas que ses dérivées le soient ; c'est-à-dire que **B** peut être fini même si **A** est infini.

On peut contourner cette valeur infinie de **A** en calculant d'abord **A** et **B** pour un fil de longueur finie L puis en prenant $L \gg \rho$ à la fin du calcul. En se référant à la Fig. 14.9,

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dl'}{(p^2 + l'^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{l' + (p^2 + l'^2)^{1/2}}{p} \right)_0^{L/2} \quad (14.33)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{(L/2) [1 + (1 + 4p^2/L^2)^{1/2}]}{p} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{L}{p} \quad (4p^2 \ll L^2) \quad (14.34)$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\mathcal{R}}{p} \quad (4p^2 \ll L^2) \quad (14.35)$$

Dans cette dernière expression nous avons négligé un terme en $\ln(L/\mathcal{R})$ et nous avons pris arbitrairement $A = 0$ en $p = \mathcal{R}$.

Pour calculer **B** = **rot A**, on utilise les coordonnées cylindriques, en gardant à l'esprit que **A** est parallèle à l'axe z et indépendant de ϕ et de z . Grâce à l'expression pour **rot A** de l'annexe E,

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi p} \hat{\phi} \quad (4p^2 \ll L^2) \quad (14.36)$$

comme dans le premier exemple de la partie 14.2.

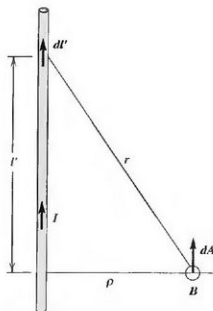


Figure 14.9 Élément de potentiel vecteur $d\mathbf{A}$ dû à l'élément de courant $I d\mathbf{l}'$.
Le vecteur **B** est azimutal, comme en Fig. 14.3.

Exemple : Paire de courants longs et parallèles

La figure 14.10 représente deux fils longs et parallèles séparés par une distance D et parcourus par des courants égaux I de directions opposées. Pour calculer **A**, on utilise le résultat ci-dessus pour le **A** d'un seul fil et on ajoute les deux potentiels vecteurs :

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{L}{\rho_a} - \ln \frac{L}{\rho_b} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_b}{\rho_a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{x^2 + (D-y)^2}{x^2 + y^2} \quad (14.37)$$

Le vecteur **A** est orienté dans la direction du courant le plus proche de P ; il est nul dans le plan $\rho_a = \rho_b$. Alors

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{D-y}{\rho_b^2} + \frac{y}{\rho_a^2} \right) \quad (14.38)$$

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho_a^2} - \frac{1}{\rho_b^2} \right) x \quad (14.39)$$

$$B_z = 0 \quad (14.40)$$

Sur la ligne à mi-chemin entre les deux fils,

$$B_x = -\frac{2\mu_0 I}{\pi D}, \quad B_y = 0, \quad B_z = 0 \quad (14.41)$$

La figure 24.1 représente les lignes de champ magnétique pour un câble à fils parallèles.

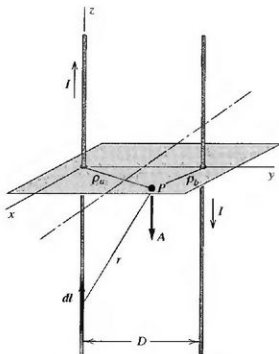


Figure 14.10 Paire de fils longs et parallèles parcourus par des courants de même valeur absolue et de directions opposées.

Le vecteur **A** est nul dans le plan vertical qui passe à travers la ligne pointillée, il est orienté vers le haut à gauche et vers le bas à droite.

Exemple : **A** et **B** dans le champ d'un dipôle magnétique

Un dipôle magnétique est une spire de fil portant un courant I , comme en Fig. 14.11. Cela nous amènera à une relation intéressante entre le champ **B** d'un dipôle magnétique et le champ **E** d'un dipôle électrique.

Nous avons calculé le champ sur l'axe d'une spire circulaire dans le deuxième exemple de la partie 14.2. Nous calculons maintenant **A** et **B** en tout point éloigné, à des distances r beaucoup plus grandes que le rayon a de la spire. La figure 14.12(h) représente le champ à proximité et à l'intérieur de la spire. Le champ dans cette région, loin de l'axe, est difficile à calculer.

Au point P de la Fig. 14.11,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{r} \quad (14.42)$$

Par symétrie, **A** est azimutal : pour toute valeur de r' on a deux $d\mathbf{l}'$ symétriques dont les composantes y s'ajoutent et les composantes x s'annulent. Alors on n'a besoin de calculer que la composante y du **A** de la figure, et

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi \cos \phi}{r'} \quad (14.43)$$

On peut exprimer r' en fonction de r et ϕ de la manière suivante. Référons-nous à la figure. D'abord,

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \psi \quad (14.44)$$

Or

$$x \cos \phi = r \cos \psi \quad (14.45)$$

et

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ax \cos \phi \quad (14.46)$$

$$r' = r \left\{ 1 + \left[\frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{a}{r} \left(\frac{x}{r} \cos \phi \right) \right] \right\}^{1/2} = r \{ 1 + [] \}^{1/2} \quad (14.47)$$

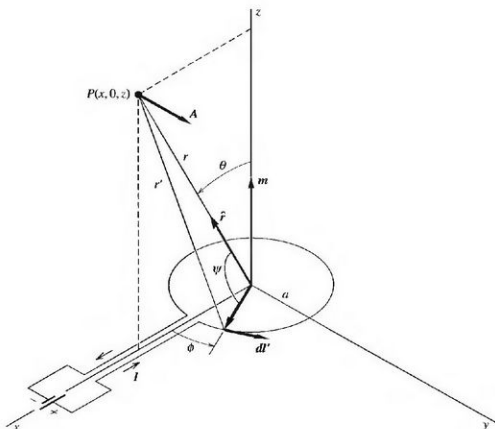


Figure 14.11 Dipôle magnétique. Le vecteur $\mathbf{A}$ est azimutal.

Observons que $(x/r) \cos \phi \leq 1$.

Puisque nous ne nous intéressons au champ qu'aux points où $r \gg a$, nous développons $1/r'$ en série et nous négligeons les termes contenant des puissances élevées de a/r . Donc

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [] + \frac{3}{8} []^2 - \dots \right\} \quad (14.48)$$

En posant

$$\left(\frac{x}{r} \cos \phi\right) = () , \quad (14.49)$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{a}{r} () \right] + \frac{3}{8} \left[\frac{a^4}{r^4} - 4 \frac{a^3}{r^3} () + 4 \frac{a^2}{r^2} ()^2 \right] - \dots \right\} \quad (14.50)$$

En omettant maintenant tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 en a/r ,

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{a}{r} () - \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} ()^2 \right] \frac{a^2}{r^2} \right\} \quad (14.51)$$

Finalement, en substituant dans l'Éq. 14.43 il vient

$$A = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{a}{r} \left(\frac{x}{r} \cos \phi \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3x^2}{2r^2} \cos^2 \phi \right) \frac{a^2}{r^2} \right] \cos \phi d\phi \quad (14.52)$$

Seul le deuxième terme entre crochets contribue à l'intégrale, et

$$A = \frac{\mu_0 I a^2 x}{4r^3} = \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4r^2} \quad (r^3 \gg a^3) \quad (14.53)$$

Par définition,

$$\mathbf{m} = \pi a^2 I \hat{\mathbf{z}} \quad (14.54)$$

est le *moment dipolaire magnétique* de la spire. S'il y a N spires, alors $\mathbf{m}$ est N fois plus grand.

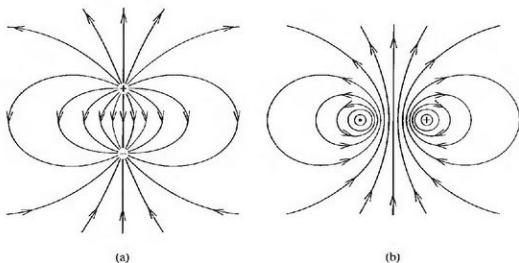


Figure 14.12 Les champs (a) d'un dipôle électrique et (b) d'un dipôle magnétique, au voisinage immédiat des dipôles.

Comme **A** est azimutal,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (r^3 \gg a^3) \quad (14.55)$$

La condition $r^3 \gg a^3$ est facilement satisfaite : en $r = 5a$, $a^3/r^3 = 1/125$.

La valeur de $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ s'en déduit immédiatement :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (14.56)$$

L'analogie avec le champ du dipôle électrique de la partie 5.1 est évidente. Elle n'est valable, cependant, qu'à des distances r grandes par rapport aux dimensions des dipôles. La figure 14.12 montre les champs proches.

Cf. exercices : 14.12 ; 14.13.

14.5 RÉSUMÉ

Une charge Q qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ dans le champ d'une distribution arbitraire de charge et de courant est soumise à une *force de Lorentz*

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (14.1)$$

où $Q\mathbf{E}$ est la *force électrique*, $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est la *force magnétique*, et $\mathbf{B}$ est l'*induction magnétique* exprimée en tesla (symbole T).

Dans le champ d'un courant I s'écoulant à travers un circuit C ,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (14.5)$$

Dans le champ d'une distribution volumique de courant,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV' \quad (14.8)$$

Les *lignes de champ de B* sont orientées partout en direction de $\mathbf{B}$.

Le *flux magnétique* à travers une surface ouverte d'aire $\mathcal{A}$ est

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{weber (symbole wb)} \quad (14.9)$$

Le *principe de superposition* s'applique aux champs magnétiques.

Le *flux magnétique net* à travers une surface fermée est nul :

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (14.24)$$

En conséquence,

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \quad (14.25)$$

Ce sont, respectivement, les formes intégrale et locale d'une des équations de Maxwell.

L'équation

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (14.26)$$

définit le *potentiel vecteur A*. Pour une distribution volumique de courant,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{r} dV' \quad (14.30)$$

tandis que, pour un courant I s'écoulant à travers un circuit C ,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l}'}{r} \quad (14.31)$$

Dans le champ d'un dipôle magnétique,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (14.55)$$

où le module du *moment dipolaire magnétique* $\mathbf{m}$ est la surface d'une spire, fois le nombre de spires, fois le courant. Le vecteur $\mathbf{m}$ est normal au plan de la spire, orienté selon la règle du tire-bouchon. Voir la Fig. 14.11. En outre,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (14.56)$$

Cf. exercice 14.14.

EXERCICES

14.1 * Force sur un monopôle magnétique situé dans un champ magnétique

Montrer que l'équation $F = Q_m^a Q_m^b / (4\pi\mu_0 r^2)$ est homogène. Cela signifie que $\mathbf{F} = Q^a \mathbf{B} / \mu_0$, et non $Q^a \mathbf{B}$ comme énoncé par certains auteurs.

① 14.2 Champ de deux fils parallèles

Deux fils parallèles de rayon R et séparés par une distance $2D$ sont parcourus par un courant I dans des directions opposées.

- Trouver B le long d'une ligne passant par les fils et perpendiculaire à eux.
- Tracer B pour $R = 1,00 \text{ mm}$, $D = 10,0 \text{ mm}$ et $I = 1 \text{ A}$.

14.3 Bobines en dos d'âne

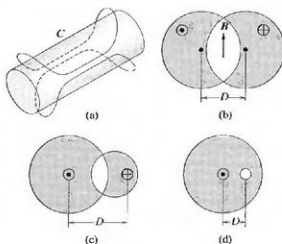


Figure 14.13

La figure 14.13 représente deux vues d'une paire de bobines en dos d'âne. En (a) on n'a représenté qu'une spire par bobine, et en (b) on montre une section en C. Plus généralement, on pourrait avoir la distribution de courant de la Fig. 14.13(c), où les deux parties portent la même densité de courant. Il n'y a pas de courant dans la région centrale. On pourrait aussi avoir la distribution de courant de la Fig. 14.13(d). Comme on va le voir, les champs magnétiques dans les cavités sont uniformes.

(a) Montrer que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{r}/2$ à l'intérieur d'un conducteur de section circulaire. L'origine pour $\mathbf{r}$ est au centre de la section.

(b) Dans la Fig. 14.13(a), $\mathbf{B}$ est le même que si chaque conducteur occupait un cercle entier, avec des courants opposés dans la région centrale.

Trouver $\mathbf{B}$ dans la région centrale.

(c) Trouver $\mathbf{B}$ dans les cavités des Figs. 14.13(c) et (d).

14.4 Champ magnétique sur l'axe d'une bobine circulaire

Tracer le graphique de B en fonction de z sur l'axe d'une bobine circulaire de 100 spires de rayon moyen 100 mm et parcourues par un courant de 1 A.

14.5 Le magnéton de Bohr

Suivant le vieux modèle de Bohr de l'atome, les électrons décrivent des orbites autour du noyau. Les moments magnétiques atomiques et moléculaires sont exprimés en magnétons de Bohr.

(a) Trouver le moment magnétique d'un électron sur une orbite circulaire de rayon r .

(b) Selon le postulat de Bohr, le moment angulaire est quantifié :

$$mvr = n\hbar = nh/(2\pi)n \times 1,0546 \times 10^{-34},$$

où n est un nombre quantique entier.

Calculer la valeur du *magnéton de Bohr* μ_B , qui est le moment magnétique d'une orbite électronique pour laquelle $n = 1$. Le nombre de magnétons de Bohr par atome ou par molécule est de l'ordre de quelques unités et il n'est pas, en fait, un nombre pair.

14.6 Champ magnétique tournant

Trois bobines identiques, orientées comme en Fig. 14.14(a), sont parcourues par un courant alternatif triphasé. Leurs champs magnétiques sont

$$\begin{aligned} B_a &= B_m \cos \omega t, \\ B_b &= B_m \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right), \\ B_c &= B_m \cos \left(\omega t + \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

et sont orientés comme en Fig. 14.14(b).

(a) Montrer que le champ résultant a un module de $1,5 B_m$ et tourne à la pulsation ω . C'est la méthode utilisée pour engendrer des champs magnétiques tournants dans les gros moteurs électriques.

(b) Le champ tourne-t-il dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse ?

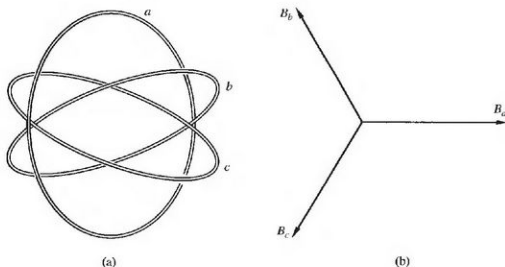


Figure 14.14

14.7 L'équation de Fabry pour les solénoïdes

Un solénoïde a un rayon interne R_1 , un rayon externe R_2 et une longueur $2L$. Le courant vaut I .

(a) Montrer qu'au centre

$$B = \mu_0 n I L \ln \frac{\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{1 + (1 + \beta^2)^{1/2}}$$

où n est le nombre de spires par mètre carré ($\approx 1/\text{section du fil}$), $\alpha = R_2/R_1$ et $\beta = L/R_1$.

(b) Montrer que la longueur du fil vaut

$$l = nV = 2\pi n(\alpha^2 - 1)\beta R_1^3$$

où V est le volume du bobinage.

(c) Vérifier l'équation de Fabry, qui stipule qu'au centre de tout solénoïde

$$B = G \left(\frac{P \lambda \sigma}{R_1} \right)^{1/2}$$

Ici G dépend de la géométrie, P est la puissance dissipée, $\lambda = n\pi r^2$ est le *facteur de remplissage*, ou la fraction de la section de la bobine occupée par le conducteur, r est le rayon du fil et σ la résistivité.

14.8 Solénoïde court et épais

La figure 14.15 montre la section d'une bobine. Les dimensions indiquées sont en millimètres. Le fil a une section carrée de 2 mm^2 et une résistance de $8,93 \Omega/\text{km}$. Le courant vaut 1 A . Voir le problème précédent.

(a) Calculer B au centre. Utiliser les formules données dans le problème 14.7.

(b) Calculer la puissance et la tension appliquée.

(c) Tracer B en fonction de z sur l'axe, de $z = -0,3 \text{ m}$ à $z = +0,3 \text{ m}$.

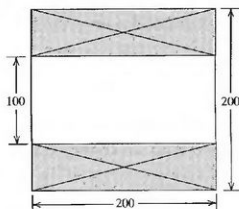


Figure 14.15

14.9 Les bobines de Helmholtz engendrent un champ uniforme

Les bobines de Helmholtz de la Fig. 14.16(a) sont un moyen simple d'obtenir un champ magnétique uniforme sur un volume donné. En gros, B_z est uniforme à 10 % près dans une sphère de rayon $0,1a$.

(a) Trouver B en fonction de z sur l'axe. En développant cette expression autour de $z = 0$,

$$B = B_0 \left(1 - \frac{144z^4}{125a^4} + \dots \right)$$

Cela signifie que les dérivées première, seconde et troisième de B par rapport à z sont nulles en $z = 0$. Ainsi la courbe de $B(z)$ est exceptionnellement plate près du centre.

(b) Tracer $B/(\mu_0 NI/a)$ en fonction de z/a , de $z/a = -0,5$ à $z/a = 0,5$. La figure 14.16(b) représente $B_z(z)$ pour des valeurs de r allant jusqu'à $0,16a$.

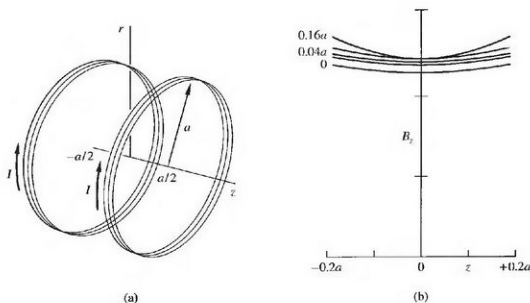


Figure 14.16

14.10 Une paire de Maxwell engendre un gradient de $\mathbf{B}$ uniforme

Tracer $B/(\mu_0 NI/2a)$ en fonction de z/a pour une paire de bobines comme celles de la Fig. 14.16(a) mais espacées de $2a$ au lieu de a et parcourues par des courants opposés. C'est une paire de Maxwell. On trouve que dB/dz est étonnamment linéaire entre environ $z = -0,7a$ et $z = 0,7a$.

14.11 Dérivées spatiales de $\mathbf{B}$ dans un champ statique

Considérons le champ d'une spire circulaire, comme en Fig. 14.12. Prenons l'axe z vertical et orienté vers le haut parallèlement à l'axe de symétrie, avec l'axe y orienté vers la droite, dans le plan de la spire.

Au-dessus de la spire, les lignes de champ de $\mathbf{B}$ s'écartent, donc B_z décroît avec z et $\partial B_z/\partial z$ est négative. Par ailleurs, B_y croît avec y , donc $\partial B_y/\partial y$ est positive. De même, $\partial B_x/\partial x$ est positive.

(a) Pourquoi cela, mathématiquement ? Comment ces dérivées sont-elles liées ?

(b) Comparer ces dérivées pour d'autres points de la Fig. 14.12.

14.12 Potentiel vecteur $\mathbf{A}$

Dans une région donnée, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Suggérer des $\mathbf{A}$ possibles et une caractéristique de la distribution de courant correspondante.

14.13 Dans un champ magnétique bidimensionnel une ligne de $\mathbf{A}$ constant est une ligne de champ de $\mathbf{B}$

Un champ magnétique a une composante z nulle.

(a) Montrer que $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{z}}$ est une des valeurs de $\mathbf{A}$ possibles.

(b) Montrer qu'une ligne de A constant est une ligne de champ de $\mathbf{B}$.

(c) Montrer que cela est valable pour le champ d'un fil rectiligne parcouru par un courant.

14.14 Champ magnétique d'une sphère tournante chargée électriquement

Une sphère conductrice de rayon R est chargée au potentiel V et tourne sur un de ses diamètres à la pulsation ω .

(a) Montrer que la densité surfacique de courant vaut $\alpha = \epsilon_0 \omega V \sin \theta = M \sin \theta$, où M vaut $\epsilon_0 \omega V$.

(b) Trouver l'induction magnétique B_0 au centre.

(c) Quelle est la valeur numérique de B_0 pour une sphère de rayon 100 mm, chargée à 10,0 kV et qui tourne à 10 000 tours par minute ?

(d) Montrer que le moment dipolaire est $\frac{4}{3}\pi R^3 M \hat{\mathbf{z}}$, où $\hat{\mathbf{z}}$ est le vecteur unitaire de l'axe de rotation, lié à la direction de rotation par la règle du tire-bouchon.

(e) Quel courant s'écoulant dans une spire de diamètre 100 mm produirait le même moment dipolaire ?

Chapitre 15

Champs magnétiques : le potentiel vecteur $\mathbf{A}$. Le théorème de la circulation d'Ampère

Dans ce deuxième chapitre sur les champs magnétiques, nous explicitons d'abord une conséquence directe de la définition du potentiel vecteur $\mathbf{A}$: l'intégrale curviligne de $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ sur une courbe fermée est égale au flux magnétique à travers la courbe. Ce résultat est général. Cependant, le reste du chapitre ne s'applique qu'aux champs statiques. Les expressions que nous trouverons ici pour $\Delta \mathbf{A}$, $\text{div } \mathbf{A}$ et $\text{rot } \mathbf{B}$ sont toutes tronquées : il manque chaque fois les termes dépendant du temps. C'est seulement au chapitre 23 que nous trouverons les expressions complètes.

15.1 L'INTÉGRALE CURVILIGNE DE $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ SUR UNE COURBE FERMÉE

Considérons d'abord une courbe C fermée simple, comme en Fig. 15.1. L'intégrale curviligne de $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ sur C est égale au flux magnétique lié à C :

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} = \Phi \quad (15.1)$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire d'une surface quelconque délimitée par C . Nous avons utilisé le théorème de Stokes.

Supposons maintenant que la bobine a N spires jointives comme en Fig. 15.1(b). Pour toute section de la bobine, disons en P , les différentes spires sont toutes soumises approximativement au même $\mathbf{A}$. Alors

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = N \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} = N\Phi = \Lambda \quad (15.2)$$

où Λ est le *flux total* et $\mathcal{A}$ l'aire d'une surface quelconque délimitée par la bobine.

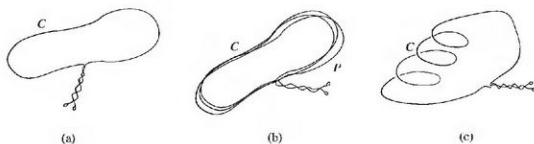


Figure 15.1 (a) Circuit fermé simple C . (b) Bobine à N spires. Les spires sont jointives. (c) Circuit fermé plus complexe.

L'unité de flux total est le *weber-tour*.

Et si on a un circuit comme celui de la Fig. 15.1(c)? Alors

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \Lambda \quad (15.3)$$

sauf que maintenant il est difficile de déterminer une surface délimitée par C . Par chance cette surface est sans intérêt, car le flux total Λ est facilement mesurable (Partie 19.2).

Exemple : Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ dans le champ d'un solénoïde long

- 1) Voyons d'abord, qualitativement, comment $\mathbf{A}$ varie avec la position, à l'intérieur et à l'extérieur d'un long solénoïde. Rappelons-nous l'intégrale pour $\mathbf{A}$ que nous avons trouvée dans la partie 14.4 :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{r} \quad (15.4)$$

En un point de l'axe du solénoïde, le $d\mathbf{A}$ d'un élément de courant $I d\mathbf{l}'$ situé quelque part sur le solénoïde annule le $d\mathbf{A}$ de l'élément $I d\mathbf{l}'$ diamétralement opposé au premier. Sur l'axe d'un solénoïde long, $\mathbf{A}$ est donc nul.

En un point P à l'intérieur du solénoïde, mais hors de l'axe, les éléments $I d\mathbf{l}'$ les plus proches de P contribueront le plus. Ainsi, $\mathbf{A}$ est azimutal comme en Fig. 15.2 et augmente avec le rayon r .

En un point P' à l'extérieur du solénoïde, $\mathbf{B}$ est nul, comme nous le verrons dans le deuxième exemple de la partie 15.4. Mais $\mathbf{A}$ est évidemment non nul car les éléments $I d\mathbf{l}'$ les plus proches de P' contribuent le plus.

Un potentiel vecteur $\mathbf{A}$ peut donc exister dans une région où $\mathbf{B}$ est nul. Cela signifie simplement que $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ pour $\mathbf{A} \neq 0$, ce qui est parfaitement sensé. Par exemple, si $\mathbf{A} = k\hat{x}$, où k est indépendant des coordonnées, alors $\text{rot } \mathbf{A} = 0$. Nous sommes déjà familiers avec une situation analogue en électrostatique : V peut prendre n'importe quelle valeur uniforme dans une région où $\mathbf{E} = -\text{grad } V = 0$.

À l'extérieur d'un long solénoïde, le vecteur $\mathbf{A}$ est azimutal et décroît avec r .

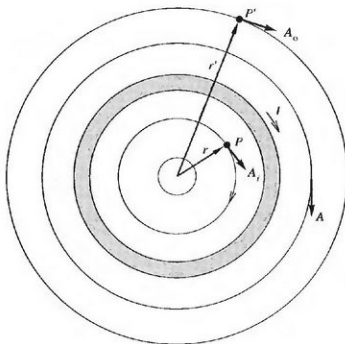


Figure 15.2 Solénoïde long vu de son extrémité, et lignes de $\mathbf{A}$ à l'intérieur et à l'extérieur. Le module de $\mathbf{A}$ est proportionnel à r à l'intérieur et inversement proportionnel à r' à l'extérieur.

2) Calculons maintenant $\mathbf{A}$.

Tout d'abord, considérons le champ à l'intérieur du solénoïde. En un point loin des bouts, $\mathbf{B}$ est parallèle à l'axe, uniforme et égal à $\mu_0 N' I$, où N' est le nombre de spires par mètre, comme dans l'exemple sur le solénoïde dans la partie 14.2. Alors, en un rayon r comme sur la figure,

$$2\pi r A_{int} = \pi r^2 \mu_0 N' I, \quad A_{int} = \frac{\mu_0 N' I r}{2} \quad (15.5)$$

À l'extérieur d'un solénoïde de rayon R , au rayon r' ,

$$2\pi r' A_{ext} = \pi R^2 \mu_0 N' I, \quad A_{ext} = \frac{\mu_0 N' I R^2}{2r'} \quad (15.6)$$

On peut imaginer à quel point il serait laborieux de calculer $\mathbf{A}$ en intégrant $I d\mathbf{l}/r$ sur l'enroulement !

La courbe de $\mathbf{A}$ en fonction du rayon est qualitativement la même que celle de $\mathbf{B}$ (voir la Fig. 15.5).

Ainsi, à l'extérieur d'un solénoïde long, $\mathbf{A} \neq 0$, bien que $\mathbf{B} = 0$. Nous reviendrons sur ce fait dans le premier exemple de la partie 18.3. Nous discutons le $\mathbf{B}$ d'un solénoïde long dans la partie 15.4 ci-dessous.

Cf. exercice : 15.1.

15.2 LE LAPLACIEN DE $\mathbf{A}$

On se rappelle d'après les parties 3.4.1 et 4.1 que

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{r} dV', \quad \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (15.7)$$

La première équation relie le potentiel V au point $P(x, y, z)$ à la distribution de charge complète, ρ étant la densité volumique totale de charge $\rho_l + \rho_p$ en $P'(x', y', z')$ et r la distance PP' . La seconde équation exprime la relation entre les *dérivées spatiales* de V en tout point et la densité volumique de charge ρ en ce point.

Il existe un couple d'équations analogue pour le potentiel vecteur $\mathbf{A}$. Nous avons déjà trouvé l'intégrale pour $\mathbf{A}$ dans la partie 14.4 :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{r} dV' \quad (15.8)$$

où V' est un volume quelconque comprenant tous les courants. La composante x de cette équation vaut

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x}{r} dV' \quad (15.9)$$

Alors, par analogie avec l'Éq. 15.7,

$$\Delta A_x = -\mu_0 J_x \quad (15.10)$$

Évidemment, des équations similaires existent pour les composantes y et z , et

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (15.11)$$

Cette équation n'est valable que pour des champs *statiques*.

15.3 LA DIVERGENCE DE $\mathbf{A}$

On peut montrer que, pour des champs *statiques* et des courants d'extension finie, la divergence de $\mathbf{A}$ est nulle. Tout d'abord,

$$\text{div } \mathbf{A} = \text{div} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{r} dV' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \text{div} \left(\frac{\mathbf{J}}{r} \right) dV' \quad (15.12)$$

où l'opérateur div agit sur les coordonnées sans prime (x, y, z) du point où on calcule le champ tandis que $\mathbf{J}$ est une fonction du point de la source (x', y', z'). L'intégrale s'effectue sur les coordonnées primées. Comme d'habitude, r est la distance entre ces points et l'intégration se fait sur un volume quelconque comprenant tous les courants.

Nous utilisons maintenant successivement les identités 15, 16 et 6 de l'annexe E :

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\text{grad } \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{J} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\text{grad } \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{J} dV' \quad (15.13)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(-\text{div}' \frac{\mathbf{J}}{r} + \frac{\text{div}' \mathbf{J}}{r} \right) dV' \quad (15.14)$$

Dans un champ indépendant du temps, $\partial \rho / \partial t = 0$ et, à cause de la conservation de la charge (Partie 4.2), $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Donc

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \operatorname{div} \frac{\mathbf{J}}{r} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A'} \frac{\mathbf{J}}{r} \cdot d\mathbf{A}' = 0 \quad (15.15)$$

où A' est l'aire de la surface délimitant le volume V' . Nous avons utilisé le théorème de la divergence pour transformer la première intégrale en la seconde. Cette seconde intégrale est nulle car, sur A' , $\mathbf{J}$ est nul ou tangentiel.

15.4 LE ROTATIONNEL DE $\mathbf{B}$.

LE THÉORÈME DE LA CIRCULATION D'AMPÈRE⁽¹⁾

Grâce à l'identité 13 de l'annexe E,

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (15.16)$$

Donc, d'après les parties 15.2 et 15.3,

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (15.17)$$

Cette équation n'est valide que pour des champs *statiques*. La forme plus générale de cette équation est donnée dans la partie 21.1.

L'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur une courbe fermée C est importante :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I \quad (15.18)$$

Dans cette suite d'équations nous avons d'abord utilisé le théorème de Stokes, A étant l'aire d'une surface quelconque délimitée par C . Nous avons ensuite utilisé la relation $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ trouvée ci-dessus. Finalement, I est le courant net traversant une surface quelconque délimitée par la courbe fermée C . La règle du tire-bouchon détermine l'orientation de I et de l'intégration le long de C , comme en Fig. 15.3(a).

C'est le *théorème de la circulation d'Ampère* : l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur une courbe fermée C est égale à μ_0 fois le courant net à travers C . À nouveau, ce résultat n'est valable que pour des champs constants.

Parfois un même courant traverse la surface délimitée par C plusieurs fois. Par exemple, avec un solénoïde, la courbe fermée C pourrait suivre l'axe et ressortir du solénoïde comme en Fig. 15.3(b). Le courant total à travers C est alors le courant dans une spire multiplié par le nombre de spires, soit le nombre d'*ampère-spire*.

Le théorème de la circulation peut être utilisé pour calculer $\mathbf{B}$, quand $\mathbf{B}$ est uniforme le long du chemin d'intégration. Ce théorème est analogue au théorème de Gauss, que nous avons utilisé pour calculer un $\mathbf{E}$ uniforme sur une surface.

(1) Il semble que ce théorème ne doive pas être attribué à Ampère. Voir Erlichson [7].

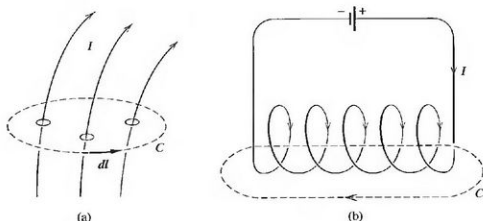


Figure 15.3 (a) Chemin d'intégration fermé C traversé par un courant I .
Le théorème de la circulation d'Ampère stipule que l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur C est égale à $\mu_0 I$.
(b) Ici l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur la courbe pointillée est égale à $6\mu_0 I$.

Exemple : Conducteur cylindrique long

Appliquons le théorème de la circulation d'Ampère pour calculer $\mathbf{B}$ à l'intérieur et à l'extérieur du long conducteur cylindrique de la Fig. 15.4, parcouru par un courant I uniformément distribué sur sa section. On utilise les coordonnées cylindriques avec l'axe z le long du conducteur.

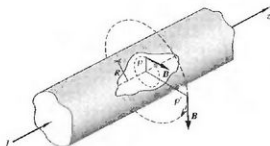


Figure 15.4 Long conducteur cylindrique de section circulaire parcouru par un courant I .
Les cercles sont des chemins d'intégration pour calculer $\mathbf{B}$.

À l'extérieur du conducteur, $\mathbf{B}$ est azimutal est indépendant de ϕ .
Alors

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} \quad (15.19)$$

À l'intérieur du conducteur, pour un chemin circulaire de rayon ρ ,

$$B = \mu_0 \frac{[I/(\pi R^2)] \pi \rho^2}{2\pi \rho} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} \quad (15.20)$$

Voir la Fig. 15.5.

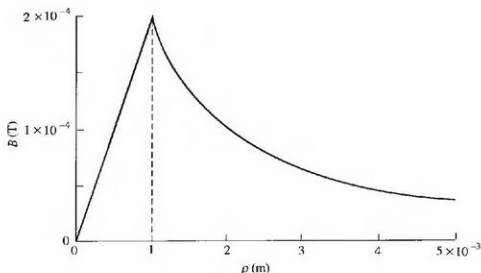


Figure 15.5 B en fonction de ρ pour un fil de rayon 1 mm parcouru par un courant de 1 A.

Exemple : Le solénoïde long

Nous revenons au solénoïde long et nous recalculons $\mathbf{B}$ à l'intérieur, dans une région éloignée des extrémités. Cela rend les effets de bord négligeables. Voir la Fig. 15.6. On suppose que le pas de l'enroulement est petit. On utilise encore les coordonnées cylindriques. La figure représente un solénoïde de section circulaire. Cependant, l'essentiel des résultats sera valable pour une section quelconque.

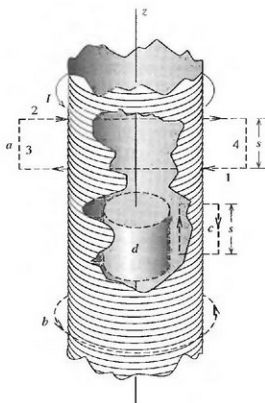


Figure 15.6 Long solénoïde parcouru par un courant I , avec des chemins d'intégration a , b , c .

Notons d'abord que $\mathbf{B}$ possède les caractéristiques générales suivantes :

- 1) Par symétrie, $\mathbf{B}$ est partout indépendant de z et de ϕ .
- 2) Imaginons un cylindre coaxial d comme sur la figure. Son rayon est soit plus petit soit plus grand que celui du solénoïde. Les intégrales de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ sur les faces des extrémités s'annulent. Alors l'intégrale de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ sur la surface cylindrique est nulle, d'après le théorème de Gauss pour $\mathbf{B}$ (Partie 14.3). Alors, à l'intérieur comme à l'extérieur, $B_\rho = 0$.
- 3) Le rotationnel de $\mathbf{B}$ est nul partout sauf à l'intérieur du fil où $\mathbf{J} \neq 0$. Alors, d'après l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, à l'extérieur du fil $\partial B_z / \partial \rho = 0$. Par symétrie, $\partial B_z / \partial \phi$ est nul également. Alors B_z est *uniforme à l'intérieur du solénoïde comme à l'extérieur, en négligeant les effets de bord*.

Considérons maintenant le champ à l'extérieur du solénoïde.

- 1) On peut montrer que $B_z = 0$ en considérant le chemin a sur la figure. Le courant net à travers ce chemin est nul et l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur ce contour est donc nulle aussi. Or, puisque les intégrales curvilignes le long des côtés 1 et 2 sont nulles ($B_\rho = 0$), les intégrales curvilignes le long des côtés 3 et 4 s'annulent. Mais les côtés 3 et 4 peuvent tous deux être situés à n'importe quelle distance du solénoïde, donc B_z est soit nul, soit non nul et indépendant de ρ . Or le flux à l'extérieur est égal au flux fini à l'intérieur. Par conséquent, à l'extérieur B_z est *pratiquement nul*.
- 2) Un chemin tel que b est traversé une fois par le courant. Donc à l'extérieur du solénoïde $B_\phi = \mu_0 I / (2\pi\rho)$. Ce flux est habituellement négligeable.

Regardons maintenant à l'intérieur du solénoïde.

- 1) Le flux dans la direction ϕ est nul à l'intérieur car l'intégrale curviligne de $B_\phi d\mathbf{l}$ sur un cercle de rayon ρ , disons l'extrémité supérieure du petit cylindre d représenté sur la figure, vaut $2\pi\rho B_\phi$; et elle est nulle car le chemin entoure un courant nul.
- 2) Considérons maintenant le chemin c sur la figure. En se rappelant que $B_\rho = 0$ à l'intérieur et à l'extérieur et que $B_z = 0$ à l'extérieur, on voit que, si on a N' spires par mètre, $B_z s = \mu_0 N' I s$ et $B_z = \mu_0 N' I$. Le champ axial à l'intérieur, en des points loin des extrémités, est uniforme.

Exemple : Réfraction des lignes de champ de $\mathbf{B}$ à travers une nappe de courant

Une plaque mince conductrice porte une densité surfacique de courant de α A/m, comme sur la Fig. 15.7. À la traversée de la plaque, les lignes de $\mathbf{B}$ se courbent de la façon suivante.

Comme $\text{div } \mathbf{B} = 0$, la composante normale de $\mathbf{B}$ est la même des deux côtés : $B_{1n} = B_{2n}$.

En appliquant le théorème de la circulation d'Ampère au chemin de longueur L indiqué sur la figure,

$$B_{1t}L - B_{2t}L = \mu_0 \alpha L, \quad B_{2t} = B_{1t} - \mu_0 \alpha \quad (15.21)$$

Une ligne de **B** est donc défléchie dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur qui regarde dans la direction de α .

On peut aussi parvenir à ce résultat d'une autre manière. L'induction magnétique **B** provient de l'existence d'un courant dans la plaque *et* de courants qui s'écoulent ailleurs. Selon le théorème de la circulation d'Ampère, le champ magnétique de la plaque, juste au-dessous d'elle, vaut $\mu_0\alpha/2$ et est orienté vers la gauche. Juste au-dessus, le champ vaut encore $\mu_0\alpha/2$ mais il est orienté vers la droite. La somme de ce champ et de celui des autres courants conduit à des composantes tangentielles qui diffèrent comme ci-dessus.

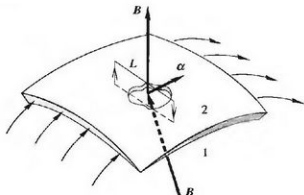


Figure 15.7 Réfraction d'une ligne de champ de **B** à la traversée d'une nappe de courant.

Cf. exercices : 15.2 ; 15.2 ; 15.4 ; 15.5 ; 15.6 ; 15.7 ; 15.8.

15.5 RÉSUMÉ

L'intégrale curviligne de $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ le long d'une courbe fermée C est égale au flux magnétique Λ à travers C :

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \Lambda \quad (15.3)$$

où A est l'aire d'une surface délimitée par C .

Pour des champs *statiques*,

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (15.11)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (15.15)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (15.17)$$

Le théorème de la circulation d'Ampère stipule que

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (15.18)$$

où I est le courant net à travers une surface ouverte quelconque délimitée par la courbe C , dans la direction donnée par la règle du tire-bouchon.

EXERCICES

15.1 Potentiel vecteur à l'intérieur d'un conducteur parcouru par un courant

Montrer que, à l'intérieur d'un conducteur rectiligne de rayon R parcouru par un courant,

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)$$

si A est pris égal à zéro en $\rho = R$.

15.2 Générateur de haute tension de Van de Graaff

Dans un générateur de Van de Graaff, une courroie isolante chargée transporte la charge électrique vers l'électrode à haute tension.

- (a) Calculer le courant porté par une courroie de largeur 500 mm actionnée par une poulie de diamètre 100 mm tournant à 60 tours par seconde, si $E = 2 \times 10^6$ V/m à la surface de la courroie.
 (b) Calculer B près de la courroie.

15.3 Bobine toroïdale

La figure 15.8 représente une bobine toroïdale de section carrée. Elle contient N spires et le courant vaut I .

Trouver (a) le champ azimuthal le long des chemins a et c , (b) B à l'intérieur du tore et (c) l'intégrale curviligne de B le long du chemin d .

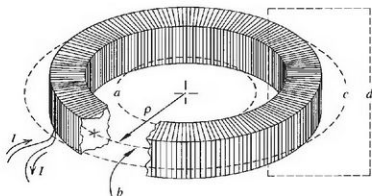


Figure 15.8

15.4 B près d'une plaque conductrice

Une plaque conductrice porte une densité surfacique de courant α A/m. Il n'y a pas d'autre courant à proximité.

- (a) Quelle est la valeur de B près de la plaque ?
 (b) Comment B est-il orienté par rapport à α ?
 (c) Un corps conducteur est parcouru par un courant à haute fréquence qui est confiné près de la surface. La densité surfacique de courant est α A/m. Montrer que, dans l'air près du conducteur, $B = \mu_0 \alpha \times \hat{n}$, où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface et orienté vers l'extérieur.

15.5 Champ magnétique près de l'axe d'une spire circulaire

Une spire circulaire est parcourue par un courant I . On prendra l'axe de symétrie comme axe z . Calculer B_ρ et B_z près de l'axe.

15.6 Définition de μ_0

Montrer que la perméabilité du vide μ_0 peut être définie de la façon suivante : si un solénoïde infiniment long porte une densité de courant $N'I$ d'un ampère par mètre, alors l'induction magnétique en tesla à l'intérieur du solénoïde est numériquement égale à μ_0 .

15.7 B moyen sur une sphère est égal à B au centre

On se référera au problème 3.23 concernant E moyen sur un volume sphérique.

Montrer que, dans une région où il n'y a pas de courant, le B moyen sur un volume sphérique est égal au B au centre.

15.8 Champ d'un solénoïde épais et court comparé à celui d'un solénoïde long

La valeur de B au centre d'un solénoïde épais et court, donnée dans le problème 14.7, peut être écrite comme $B = \mu_0 N' I g$, où $\mu_0 N' I$ est le champ d'un solénoïde long. Trouver g .

Chapitre 16

* Champs magnétiques : matériaux magnétiques

Tous les atomes contiennent des électrons en mouvement qui créent des champs magnétiques par un effet strictement quantique. Notre but est d'exprimer ces champs en termes macroscopiques.

Dans les matériaux diélectriques, les atomes ou molécules individuels peuvent posséder des moments électriques dipolaires qui, quand ils sont orientés correctement, confèrent un moment électrique net à un corps macroscopique. Les matériaux magnétiques leur sont analogues du fait que leurs atomes peuvent agir comme des dipôles magnétiques pouvant aussi être orientés. Le corps est alors dit *aimanté*. Les effets magnétiques sont faibles dans toutes les substances sauf les ferromagnétiques.

L'*aimantation* $\mathbf{M}$ est le moment magnétique par unité de volume en un point d'un matériau aimanté. S'il y a N atomes par unité de volume, chacun possédant un dipôle magnétique $\mathbf{m}$ orienté dans une direction donnée, alors

$$\mathbf{M} = N\mathbf{m} \quad (16.1)$$

L'aimantation $\mathbf{M}$ dans les milieux magnétiques correspond à la polarisation $\mathbf{P}$ dans les diélectriques. L'unité d'aimantation est l'ampère par mètre.

16.1 * LES DIFFÉRENTS TYPES DE MATÉRIAUX MAGNÉTIQUES

Il existe trois principaux types de matériaux magnétiques.

- 1) Tous les matériaux sont *diamagnétiques*. Ce magnétisme provient du fait que l'application d'un champ magnétique externe induit des moments suivant la loi d'induction de Faraday (Chapitre 18). Cet effet est généralement imperceptible et disparaît lorsqu'on supprime le champ externe.

- 2) Dans la plupart des atomes, les moments magnétiques issus des mouvements orbital et de spin des électrons s'annulent. Si l'annulation n'est pas complète, le matériau est *paramagnétique*. L'agitation thermique fait que les moments individuels sont orientés aléatoirement, mais l'application d'un champ magnétique entraîne une orientation partielle.
- 3) Dans les matériaux *ferromagnétiques* comme le fer, l'aimantation peut être plus élevée que dans les substances diamagnétiques ou paramagnétiques de plusieurs ordres de grandeur. Cet effet vient du spin de l'électron.

Ces matériaux sont divisés en *domaines* microscopiques, comme sur la Fig. 16.1, dans lesquels les spins sont tous alignés spontanément dans la même direction, même en l'absence de champ externe. Dans l'état non aimanté, les spins des différents domaines sont orientés aléatoirement et le champ net macroscopique est nul.

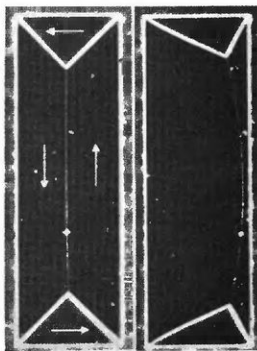


Figure 16.1 Domaines dans une lamelle monocristalline de nickel-cobalt d'épaisseur 500 nm, de dimensions $112\ \mu\text{m} \times 35\ \mu\text{m}$, avant et après l'application d'un champ magnétique vertical orienté vers le bas.

L'échantillon est d'abord poli puis recouvert d'une suspension aqueuse de Fe_3O_4 . Les particules d'oxyde de fer se rassemblent aux frontières des domaines, où le gradient du champ est maximal (voir Tebble [52]).

Sous l'effet d'un champ magnétique externe, les domaines qui se trouvent être orientés dans la bonne direction croissent au détriment de leurs voisins par migration des bornes des domaines. Finalement, lorsque l'on approche de la saturation, tous les domaines sont orientés dans la direction imposée.

Les substances ferromagnétiques sont violemment non-linéaires, ont des pertes et sont habituellement anisotropes. Les champs magnétiques impliquant de tels matériaux ne se prêtent donc pas à des analyses mathématiques rigoureuses, mais des programmes

informatiques sont disponibles pour effectuer des calculs numériques et tracer les lignes de champ.

Rappelons-nous le paragraphe 8.1.4 sur les matériaux *ferroélectriques*.

16.2 * LES COURANTS ÉQUIVALENTS. LA LOI DE BIOT ET SAVART REVISITÉE. LA DIVERGENCE DE B

Voici un calcul naïf du champ magnétique à l'extérieur d'un corps aimanté, disons le cylindre de la Fig. 16.2.

D'après le troisième exemple de la partie 14.4, le potentiel vecteur en un point P situé à une distance r d'une boucle de courant de moment magnétique $\mathbf{m}$ est

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (16.2)$$

Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{r}}$ est orienté dans la direction de P à partir du centre de la boucle, et r est grande comparée à la plus grande dimension de la boucle. Alors, pour un volume $\mathcal{V}'$ de matériau aimanté,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\mathcal{V}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \mathbf{M} \times \mathbf{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) d\mathcal{V}' \quad (16.3)$$

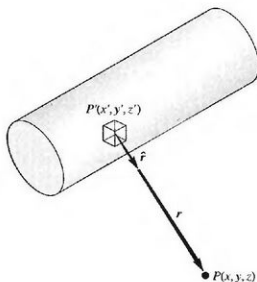


Figure 16.2 Éléments de volume à l'intérieur d'un corps aimanté et point P extérieur.

Nous avons utilisé l'identité 15 de l'annexe E. Le volume du matériau aimanté est $\mathcal{V}'$ et sa surface a une aire $\mathcal{A}'$.

Alors, avec les identités 11 et 19,

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\text{rot}' \frac{\mathbf{M}}{r} \right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\text{rot}' \mathbf{M}}{r} dV' \quad (16.4)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A'} \frac{\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}}{r} dA' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\text{rot} \mathbf{M}}{r} dV' \quad (16.5)$$

$\hat{\mathbf{n}}$ étant le vecteur unitaire normal à la surface d'aire A' du matériau aimanté et orienté vers l'extérieur. On peut omettre le prime sur le rotationnel qui agit sur $\mathbf{M}$, car il agit évidemment sur les coordonnées x', y', z' du point où l'aimantation vaut $\mathbf{M}$.

Ces expressions pour $\mathbf{A}$ sont toutes équivalentes, mais la dernière se prête à une interprétation physique simple. Il est évident que le potentiel vecteur au voisinage d'un morceau de matériau aimanté est le même que si on avait, au lieu de cela, des densités volumique et surfacique de courant équivalentes

$$\mathbf{J}_e = \text{rot} \mathbf{M} \quad \text{et} \quad \alpha_e = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (16.6)$$

À l'intérieur d'un matériau aimanté, aucune des intégrales ci-dessus ne diverge.

Plus généralement,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{r} \left(\mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{M} \right) dV' \quad (16.7)$$

où $\mathbf{J}_l$ est la densité de courant de charges libres et $\partial \mathbf{P} / \partial t$ est la densité de courant de polarisation de la partie 7.3.⁽¹⁾

Donc une forme plus générale de la loi de Biot et Savart (Partie 14.2) est

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{(\mathbf{J}_l + \partial \mathbf{P} / \partial t + \text{rot} \mathbf{M}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV' \quad (16.8)$$

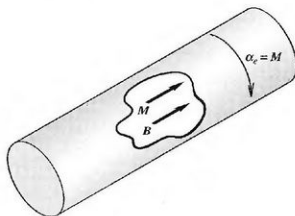


Figure 16.3 Un barreau uniformément aimanté.

Ce barreau agit comme un solénoïde parcouru par une densité surfacique de courant $\alpha_s = M$.

(1) On demande quelquefois s'il faut inclure le terme $\epsilon_0 \partial E / \partial t$ sous le signe d'intégrale. On remplacerait alors la densité de courant de polarisation par la densité de courant de déplacement $\partial D / \partial t$ (Partie 7.10). Le terme $\epsilon_0 \partial E / \partial t$ n'a pas sa place ici car les champs magnétiques proviennent uniquement du mouvement des charges. Cela est confirmé par le fait qu'on peut calculer le champ d'une antenne émettant dans le vide à partir du courant qui la parcourt, sans tenir compte des courants de déplacement dans le vide.

Exemple : * Barreau uniformément aimanté

Supposons que l'aimantation $\mathbf{M}$ soit uniforme et parallèle à l'axe. (C'est une situation idéalisée car les dipôles élémentaires s'orientent le long de $\mathbf{B}$ qui est seulement approximativement axial.) Comme $\mathbf{M}$ est uniforme, $\text{rot } \mathbf{M} = 0$ et il n'y a pas de courant volumique équivalent. En outre, puisque $\mathbf{M}$ est parallèle à l'axe, la densité de courant sur la surface du cylindre vaut M , dans la direction indiquée sur la Fig. 16.3, et il n'y a pas de courant sur les faces aux extrémités. Le barreau agit donc comme un solénoïde avec $N'I = M$, où N' est le nombre de spires par mètre. Observons que, à l'intérieur, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{M}$ sont tournés dans la même direction générale.

Puisque les champs magnétiques sont engendrés soit par des mouvements macroscopiques de charges soit par des courants équivalents, la relation

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \quad (16.9)$$

que nous avons trouvée dans la partie 14.3 est valable même en présence de matériaux magnétiques. C'est l'une des équations de Maxwell.

Cf. exercices : 16.1 ; 16.2 ; 16.3 ; 16.4 ; 16.5.

16.3 * LE CHAMP MAGNÉTIQUE H. LE ROTATIONNEL DE H. LE THÉORÈME DE LA CIRCULATION D'AMPÈRE REVU ET CORRIGÉ

Dans la partie 15.4 nous avons vu que, pour des champs statiques en l'absence de matériaux magnétiques,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_l \quad (16.10)$$

Dorénavant nous utiliserons $\mathbf{J}_l$ à la place du $\mathbf{J}$ sans indice pour la densité de courant reliée au mouvement des charges libres.

En présence de matériaux aimantés,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_l + \mathbf{J}_e) \quad (16.11)$$

Cette équation, évidemment, est valable seulement dans les régions où les dérivées spatiales existent, c'est-à-dire à l'intérieur des matériaux aimantés, mais pas à leur surface. Alors

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_l + \text{rot } \mathbf{M}) \quad (16.12)$$

$$\text{rot } \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_l \quad (16.13)$$

Le vecteur entre parenthèses est le *champ magnétique* :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (16.14)$$

$\mathbf{H}$ comme $\mathbf{M}$ s'expriment en ampère par mètre. Donc

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (16.15)$$

et, même à l'intérieur de matériaux aimantés,

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_l \quad (16.16)$$

pour des champs *statiques*.

Intégrons l'éq. 16.16 sur une surface ouverte d'aire $\mathcal{A}$ délimitée par une courbe fermée C :

$$\int_{\mathcal{A}} (\text{rot } \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_l \cdot d\mathbf{A} \quad (16.17)$$

soit, en utilisant le théorème de Stokes dans le membre de gauche,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_l \quad (16.18)$$

où I_l est le courant de charges libres à travers C . La règle du tire-bouchon s'applique pour la direction d'intégration et celle de I . Notons que I_l n'inclut *pas* les courants équivalents. Le terme de gauche est la *force magnétomotrice*.

Cette équation est une forme plus générale du *théorème de la circulation d'Ampère* de la partie 15.4, car il peut servir pour calculer $\mathbf{H}$ même en présence de matériaux magnétiques. Il n'est rigoureusement valide, cependant, que pour des courants continus.

► * Les matériaux diélectriques et magnétiques comparés

Comparons l'équation ci-dessus pour $\mathbf{B}$ avec l'éq. 7.21 correspondante pour les diélectriques,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P}) \quad (16.19)$$

Notons la différence de signe : moins $\mathbf{P}$ à la place de plus $\mathbf{M}$.

La figure 16.4 illustre la différence. En (a), les plaques du condensateur sont isolées et portent des charges libres qui ne sont pas affectées par la présence du diélectrique, en négligeant les effets de bord. Ainsi $D = \sigma_l$ est fixé. Les trois vecteurs $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$ sont orientés vers la droite. Sans le diélectrique, E serait égal à D/ϵ_0 . Avec le diélectrique, E est *plus petit* car le champ des charges liées s'*oppose* à celui des charges libres.

En (b), la bobine applique un $\mathbf{H}$ donné. Les trois vecteurs $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$ sont à nouveau orientés vers la droite. Sans le noyau magnétique, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Avec le noyau, $\mathbf{B}$ est *plus grand* car le champ des courants équivalents s'*ajoute* à celui des courants libres.

Rappelons-nous que nous ne nous intéressons ici qu'aux champs moyennés dans le temps et dans l'espace à l'intérieur de la matière. Rappelons-nous aussi que la similarité entre les champs des dipôles électrique et magnétique n'existe qu'en des points éloignés des dipôles. Plus près, les champs sont complètement différents, comme indiqué en Fig. 14.12.

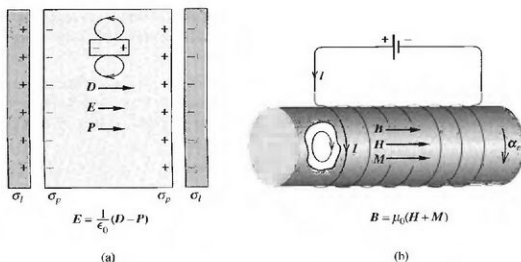


Figure 16.4 (a) Condensateur à faces planes et parallèles. Les plaques sont isolées et portent des densités surfaciques de charge libre fixes σ_l et σ_p . L'introduction du diélectrique réduit E d'un facteur ϵ_r , en négligeant les effets de bord. Notons l'orientation du petit dipôle électrique et de son champ. (b) Solénoïde parcouru par un courant fixe I . L'introduction du noyau magnétique augmente B d'un facteur μ_r , en négligeant les effets de bord. Notons l'orientation du petit dipôle magnétique et de son champ.

Cf. exercices : 16.6 ; 16.7 ; 16.8 ; 16.9.

16.4 * LA SUSCEPTIBILITÉ MAGNÉTIQUE χ_m ET LA PERMÉABILITÉ RELATIVE μ_r

Il est pratique de définir une *susceptibilité magnétique* χ_m telle que⁽¹⁾

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (16.20)$$

Alors

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (16.21)$$

où

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (16.22)$$

est la *perméabilité relative* et

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (16.23)$$

est la *perméabilité* d'un matériau. χ_m et μ_r sont des nombres sans dimension.

Donc

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r \mu_0} \mathbf{B} \quad (16.24)$$

La susceptibilité magnétique de matériaux purement diamagnétiques est négative et de l'ordre de 10^{-5} . Dans les matériaux paramagnétiques, χ_m varie d'environ 10^{-5} à 10^{-3} . La susceptibilité de substances ferromagnétiques peut aller jusqu'à 10^6 .

(1) Comparer avec $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$ (Partie 7.8).

L'équation $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ est générale mais les équations contenant soit μ_r soit χ_m supposent que le matériau est à la fois isotrope et linéaire. En d'autres termes, elles supposent que $\mathbf{M}$ est proportionnelle et colinéaire à $\mathbf{H}$.

Dans les matériaux ferromagnétiques, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ ne sont pas toujours colinéaires et quand ils le sont, μ_r peut varier de plusieurs ordres de grandeur selon la valeur de $\mathbf{H}$ et l'histoire antérieure du matériau (Partie 16.6). Dans un aimant permanent, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ sont orientés dans des directions sensiblement opposées.

16.5 * LES CONDITIONS AUX LIMITES POUR $\mathbf{B}$ ET $\mathbf{H}$

$\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ obéissent tous deux à des conditions aux limites à l'interface entre deux milieux. Nous procédons comme dans la partie 8.2. Il n'y a pas de courant surfacique à l'interface.

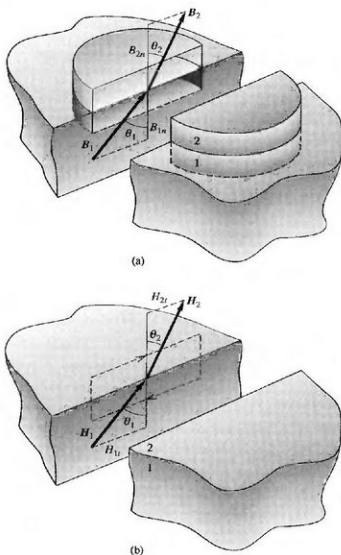


Figure 16.5 (a) Surface de Gauss chevauchant l'interface entre les milieux 1 et 2. Les composantes normales des $\mathbf{B}$ sont égales. (b) Chemin fermé traversant l'interface. Les composantes tangentielles des $\mathbf{H}$ sont égales, en supposant qu'il n'y a pas de courant surfacique.

La figure 16.5(a) représente un volume de Gauss cylindrique et plat à cheval sur une interface. Selon le théorème de Gauss, le flux sortant par le haut est égal à celui entrant par le bas et

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (16.25)$$

La composante normale de $\mathbf{B}$ est donc continue à travers une interface.

Considérons maintenant la Fig. 16.5(b). Le petit chemin rectangulaire perce l'interface. Selon le théorème de la circulation d'Ampère de la partie 16.3, l'intégrale curviligne de $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ sur le chemin est égale au courant I à travers le chemin. Les deux longs côtés du chemin étant infiniment près de l'interface, I est nul et la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ est continue à travers l'interface :

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (16.26)$$

En posant $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ pour les deux milieux, les perméabilités étant celles correspondant aux vrais champs, et en supposant que les matériaux sont isotropes, alors les deux équations ci-dessus impliquent que

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \quad (16.27)$$

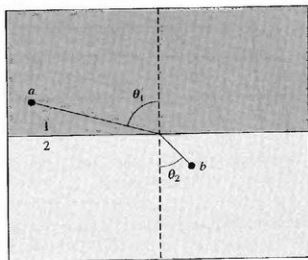


Figure 16.6 Ligne de $\mathbf{B}$ qui traverse l'interface entre les milieux linéaires et isotropes 1 et 2.

La perméabilité du milieu 1 est plus grande que celle du milieu 2. Les points a et b sont à la même distance de l'interface. Le chemin dans le milieu 1 de plus grande perméabilité est plus long que le chemin dans le milieu 2 : les lignes de $\mathbf{B}$ « préfèrent » être dans le matériau de plus grande perméabilité.

Nous avons donc la règle suivante pour les milieux linéaires et isotropes : les lignes de $\mathbf{B}$ sont plus loin de la normale dans le milieu qui possède la perméabilité la plus grande. En d'autres termes, les lignes de champ « préfèrent » passer à travers le milieu le plus perméable, comme sur la Fig. 16.6. Rappelons-nous qu'au paragraphe 8.2.4 nous avons rencontré une situation analogue avec les diélectriques.

16.6 * B EN FONCTION DE H DANS LES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES

Comment observer la relation entre H et B pour un échantillon donné de matériau magnétique ? Une méthode naïve consisterait à utiliser un solénoïde comme en Fig. 16.4(b). Alors H serait égal au nombre d'ampères-spires par mètre sur le solénoïde, et B pourrait être mesurée avec un magnétomètre basé sur l'effet Hall (Partie 17.1), à l'une des extrémités. La méthode est instructive mais n'est pas praticable à cause des effets de bord élevés. Heureusement, des instruments sophistiqués sont disponibles commercialement.

Si on augmente H dans un échantillon initialement non aimanté, B augmente mais au bout de quelque temps on atteint la saturation et B n'augmente plus. La figure 16.7 représente les courbes d'aimantation pour plusieurs matériaux magnétiques.

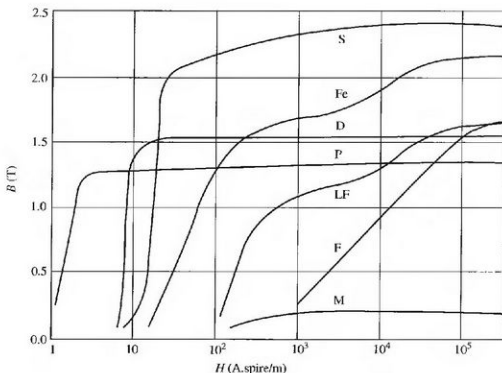


Figure 16.7 Courbes d'aimantation pour différents matériaux : S, Supremendur ; Fe, fer pur recuit ; D, Deltamax ; P, Permalloy ; LF, limaille de fer ; F, fonte grise ; M, Monel.

Considérons maintenant la Fig. 16.8. On part d'un échantillon non aimanté en O . L'augmentation de H fait augmenter B le long de la courbe ab . En réduisant maintenant le courant I dans le solénoïde jusqu'à zéro, B décroît le long de bc . Puis, quand on inverse le signe de I , B décroît jusqu'à zéro en d . Si on augmente encore le courant dans cette direction, on atteint un point e , symétrique du point b . Si maintenant I diminue, puis change de signe et augmente, on arrive de nouveau au point b . La courbe fermée $bcd e f b$ est une boucle d'hystérésis.

Les boucles d'hystérésis ont toujours la même allure générale, mais elles peuvent prendre des formes diverses. Elles peuvent être étroites, comme sur la figure, ou larges, ou même rectangulaires avec des côtés presque horizontaux et verticaux.

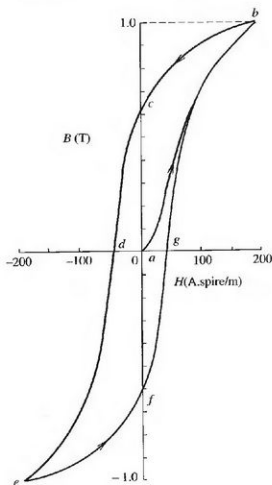


Figure 16.8 Courbe d'aimantation ab et boucle d'hystérésis $bcdefgb$ pour du fer pour transformateur.

Les matériaux magnétiques *doux* possèdent une perméabilité élevée et une boucle d'hystérésis étroite. Ils sont utilisés dans les électroaimants, les transformateurs, les moteurs, etc. Les matériaux *durs* ont des boucles larges et sont principalement utilisés comme aimants permanents.

Il apparaît que l'énergie dissipée dans le matériau en parcourant une boucle d'hystérésis est égale à la surface de la boucle exprimée en tesla-ampère-spire par mètre, soit en weber-ampère-spire par mètre cube, ou encore en joule par mètre cube.

On peut démagnétiser un objet, par exemple une bande magnétique, en l'exposant à une bobine portant un courant alternatif puis en éloignant progressivement l'objet du champ afin de décrire des boucles d'hystérésis de plus en plus petites.

Cf. exercices : 16.10 ; 16.11 ; 16.12 ; 16.13 ; 16.14 ; 16.15 ; 16.16.

16.7 * LE BARREAU AIMANTÉ

Comme nous l'avons vu dans l'exemple de la partie 16.2, le champ $\mathbf{B}$ d'un aimant cylindrique idéalisé, uniformément aimanté parallèlement à sa longueur, est le même que celui d'un solénoïde de dimensions identiques portant une densité de courant $N'I$ égale à l'aimantation M . La figure 16.9 montre les caractéristiques générales de ce champ. Observons que les lignes de $\mathbf{B}$ se « cassent » sur la surface cylindrique. Cependant, les lignes de $\mathbf{H}$ traversent la surface cylindrique sans être perturbées. La composante normale de $\mathbf{B}$ et la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ sont continues sur la surface cylindrique et aux extrémités, comme dans la partie 16.5.

À l'extérieur, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, tandis qu'à l'intérieur $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$.

Notons qu'à l'intérieur de l'aimant $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ sont orientés dans des directions approximativement opposées.

Où se trouve le point (H, B) sur la boucle d'hystérésis ? Supposons qu'on enroule une bobine tout autour d'un anneau de matériau magnétique non aimanté. On fait varier le courant dans la bobine afin d'aller du point a sur la boucle d'hystérésis au point b , puis en c . En c , le courant dans la bobine est nul, $\mathbf{H} = 0$ et $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$.

Découpons maintenant un tronçon de l'anneau comme en Fig. 16.10 pour former un aimant en barreau. Selon le théorème de la circulation d'Ampère, l'intégrale curviligne de $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ sur le chemin C est nulle car il n'y a pas de courant libre à travers C . À l'extérieur, $\mathbf{H}$ est orienté dans la même direction que $\mathbf{B}$ puisque $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Après avoir enlevé un tronçon de l'anneau comme en Fig. 16.10, il apparaît à l'intérieur un $\mathbf{H}$ orienté dans la direction opposée à $\mathbf{B}$. Le point de fonctionnement d'un aimant permanent se trouve donc dans le deuxième quadrant de la boucle d'hystérésis.

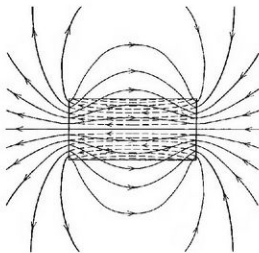


Figure 16.9 Lignes de $\mathbf{H}$ (trait plein) pour un cylindre uniformément aimanté, avec M uniforme, parallèle à l'axe et orienté vers la gauche.
Les lignes de $\mathbf{B}$ sont représentées en trait interrompu à l'intérieur de l'aimant; à l'extérieur elles suivent les lignes de $\mathbf{H}$. Cette figure est identique à la Fig. 7.4.

La figure 16.5(a) représente un volume de Gauss cylindrique et plat à cheval sur une interface. Selon le théorème de Gauss, le flux sortant par le haut est égal à celui entrant par le bas et

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (16.25)$$

La composante normale de $\mathbf{B}$ est donc continue à travers une interface.

Considérons maintenant la Fig. 16.5(b). Le petit chemin rectangulaire perce l'interface. Selon le théorème de la circulation d'Ampère de la partie 16.3, l'intégrale curviligne de $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ sur le chemin est égale au courant I à travers le chemin. Les deux longs côtés du chemin étant infiniment près de l'interface, I est nul et la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ est continue à travers l'interface :

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (16.26)$$

En posant $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ pour les deux milieux, les perméabilités étant celles correspondant aux vrais champs, et en supposant que les matériaux sont isotropes, alors les deux équations ci-dessus impliquent que

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \quad (16.27)$$

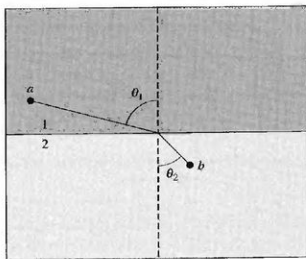


Figure 16.6 Ligne de $\mathbf{B}$ qui traverse l'interface entre les milieux linéaires et isotropes 1 et 2.

La perméabilité du milieu 1 est plus grande que celle du milieu 2. Les points a et b sont à la même distance de l'interface. Le chemin dans le milieu 1 de plus grande perméabilité est plus long que le chemin dans le milieu 2 : les lignes de $\mathbf{B}$ « préfèrent » être dans le matériau de plus grande perméabilité.

Nous avons donc la règle suivante pour les milieux linéaires et isotropes : les lignes de $\mathbf{B}$ sont plus loin de la normale dans le milieu qui possède la perméabilité la plus grande. En d'autres termes, les lignes de champ « préfèrent » passer à travers le milieu le plus perméable, comme sur la Fig. 16.6. Rappelons-nous qu'au paragraphe 8.2.4 nous avons rencontré une situation analogue avec les diélectriques.

16.6 * B EN FONCTION DE H DANS LES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES

Comment observer la relation entre H et B pour un échantillon donné de matériau magnétique ? Une méthode naïve consisterait à utiliser un solénoïde comme en Fig. 16.4(b). Alors H serait égal au nombre d'ampères-spires par mètre sur le solénoïde, et B pourrait être mesurée avec un magnétomètre basé sur l'effet Hall (Partie 17.1), à l'une des extrémités. La méthode est instructive mais n'est pas praticable à cause des effets de bord élevés. Heureusement, des instruments sophistiqués sont disponibles commercialement.

Si on augmente H dans un échantillon initialement non aimanté, B augmente mais au bout de quelque temps on atteint la saturation et B n'augmente plus. La figure 16.7 représente les *courbes d'aimantation* pour plusieurs matériaux magnétiques.

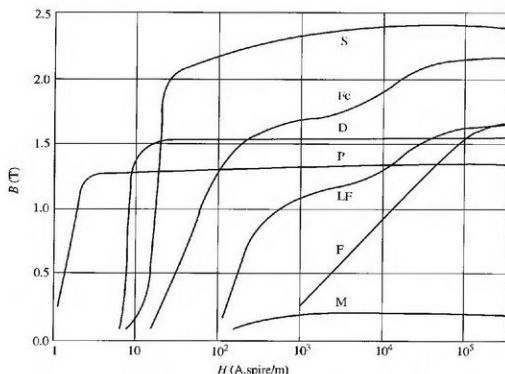


Figure 16.7 Courbes d'aimantation pour différents matériaux : S, Supermendur ; Fe, fer pur recuit ; D, Deltamax ; P, Permalloy ; LF, limaille de fer ; F, fonte grise ; M, Monel.

Considérons maintenant la Fig. 16.8. On part d'un échantillon non aimanté en O . L'augmentation de H fait augmenter B le long de la courbe ab . En réduisant maintenant le courant I dans le solénoïde jusqu'à zéro, B décroît le long de bc . Puis, quand on inverse le signe de I , B décroît jusqu'à zéro en d . Si on augmente encore le courant dans cette direction, on atteint un point e , symétrique du point b . Si maintenant I diminue, puis change de signe et augmente, on arrive de nouveau au point b . La courbe fermée $bcdefgb$ est une *boucle d'hystérésis*.

Les boucles d'hystérésis ont toujours la même allure générale, mais elles peuvent prendre des formes diverses. Elles peuvent être étroites, comme sur la figure, ou larges, ou même rectangulaires avec des côtés presque horizontaux et verticaux.

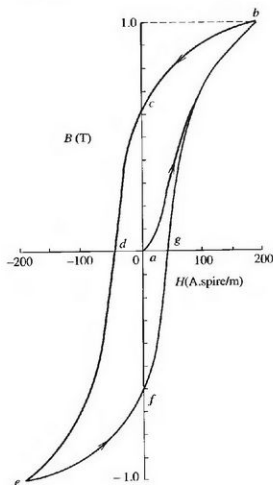


Figure 16.8 Courbe d'aimantation ab et boucle d'hystérésis $bcdefgb$ pour du fer pour transformateur.

Les matériaux magnétiques *doux* possèdent une perméabilité élevée et une boucle d'hystérésis étroite. Ils sont utilisés dans les électroaimants, les transformateurs, les moteurs, etc. Les matériaux *durs* ont des boucles larges et sont principalement utilisés comme aimants permanents.

Il apparaît que l'énergie dissipée dans le matériau en parcourant une boucle d'hystérésis est égale à la surface de la boucle exprimée en tesla-ampère-spire par mètre, soit en weber-ampère-spire par mètre cube, ou encore en joule par mètre cube.

On peut démagnétiser un objet, par exemple une bande magnétique, en l'exposant à une bobine portant un courant alternatif puis en éloignant progressivement l'objet du champ afin de décrire des boucles d'hystérésis de plus en plus petites.

Cf. exercices : 16.10 ; 16.11 ; 16.12 ; 16.13 ; 16.14 ; 16.15 ; 16.16.

16.7 * LE BARREAU AIMANTÉ

Comme nous l'avons vu dans l'exemple de la partie 16.2, le champ $\mathbf{B}$ d'un aimant cylindrique idéalisé, uniformément aimanté parallèlement à sa longueur, est le même que celui d'un solénoïde de dimensions identiques portant une densité de courant $N'I$ égale à l'aimantation M . La figure 16.9 montre les caractéristiques générales de ce champ. Observons que les lignes de $\mathbf{B}$ se « cassent » sur la surface cylindrique. Cependant, les lignes de $\mathbf{H}$ traversent la surface cylindrique sans être perturbées. La composante normale de $\mathbf{B}$ et la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ sont continues sur la surface cylindrique et aux extrémités, comme dans la partie 16.5.

À l'extérieur, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, tandis qu'à l'intérieur $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$.

Notons qu'à l'intérieur de l'aimant $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ sont orientés dans des directions approximativement opposées.

Où se trouve le point (H, B) sur la boucle d'hystérésis ? Supposons qu'on enroule une bobine tout autour d'un anneau de matériau magnétique non aimanté. On fait varier le courant dans la bobine afin d'aller du point a sur la boucle d'hystérésis au point b , puis en c . En c , le courant dans la bobine est nul, $\mathbf{H} = 0$ et $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$.

Découpons maintenant un tronçon de l'anneau comme en Fig. 16.10 pour former un aimant en barreau. Selon le théorème de la circulation d'Ampère, l'intégrale curviligne de $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ sur le chemin C est nulle car il n'y a pas de courant libre à travers C . À l'extérieur, $\mathbf{H}$ est orienté dans la même direction que $\mathbf{B}$ puisque $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Après avoir enlevé un tronçon de l'anneau comme en Fig. 16.10, il apparaît à l'intérieur un $\mathbf{H}$ orienté dans la direction opposée à $\mathbf{B}$. Le point de fonctionnement d'un aimant permanent se trouve donc dans le deuxième quadrant de la boucle d'hystérésis.

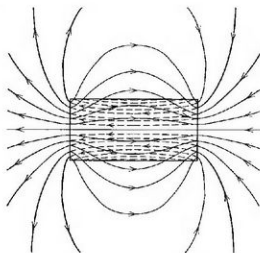


Figure 16.9 Lignes de $\mathbf{H}$ (trait plein) pour un cylindre uniformément aimanté, avec $\mathbf{M}$ uniforme, parallèle à l'axe et orienté vers la gauche.
Les lignes de $\mathbf{B}$ sont représentées en trait interrompu à l'intérieur de l'aimant ; à l'extérieur elles suivent les lignes de $\mathbf{H}$. Cette figure est identique à la fig. 7.4.

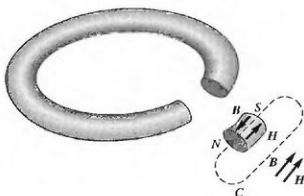


Figure 16.10 Expérience de pensée dans laquelle on découpe une portion d'un anneau aimanté pour obtenir un aimant en barreau.

À l'intérieur du barreau, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ sont orientés dans des directions opposées. Les lignes de $\mathbf{B}$ sortent par le pôle Nord N et rentrent par le pôle Sud S .

Le point de fonctionnement d'un aimant long et fin est proche de c sur la courbe d'hystérésis, tandis que celui d'un aimant trapu est plus près de d .

Le champ d'un vrai barreau aimanté n'est pas aussi simple. Comme les moments magnétiques des atomes individuels tendent à s'aligner sur le champ $\mathbf{B}$, l'aimantation $\mathbf{M}$, et donc la densité de courant équivalent sur la surface cylindrique, sont plus faibles près des extrémités. De plus, comme $\mathbf{M}$ n'est pas uniforme il y a des courants équivalents à l'intérieur de l'aimant. Les extrémités portent aussi des courants équivalents puisque sur les faces $\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ n'est nul que sur l'axe. Le résultat net est qu'il y a des « pôles » près des extrémités de l'aimant à partir desquels les lignes de $\mathbf{B}$, à l'extérieur de l'aimant, semblent rayonner dans toutes les directions. Les pôles sont plus visibles si le barreau aimanté est long et fin.

► * Le barreau aimanté et le barreau d'électret comparés

Il est instructif de comparer le champ de notre cylindre de matériau magnétique uniformément aimanté, Fig. 16.11(a), avec celui de son équivalent électrique, le cylindre de diélectrique uniformément polarisé de la Fig. 16.11(b). Nous avons discuté le champ du barreau d'électret dans le deuxième exemple de la partie 7.7.

Le champ $\mathbf{B}$ de l'aimant est celui d'un solénoïde équivalent, en Fig. 16.11(c), qui porte une densité surfacique de courant $N'I = M$. Pour trouver ensuite le champ $\mathbf{H}$, on utilise la relation

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (16.28)$$

Le champ $\mathbf{H}$ de l'aimant est le même que si on avait des densités de pôle magnétique $+M$ et $-M$ sur les extrémités.

Le champ $\mathbf{E}$ de l'électret est celui des charges liées sur les extrémités, comme en Fig. 16.11(d), ou d'une paire de disques de charges opposées portant des densités surfaciques de charge uniformes $+P$ et $-P$. Le champ $\mathbf{D}$ se déduit alors de

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P}) \quad (16.29)$$

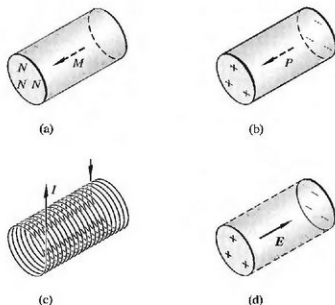


Figure 16.11 (a) Barreau aimanté. (b) Barreau d'électret. (c) Solénoïde dont le champ $\mathbf{B}$ est identique à celui du barreau aimanté. (d) Paire de plaques chargées électriquement dont le champ $\mathbf{E}$ est identique à celui du barreau d'électret.

Mathématiquement, les champs obéissent à des équations similaires :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P}) \quad (16.30)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (16.31)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (16.32)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (16.33)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (16.34)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad (16.35)$$

16.8 * RÉSUMÉ

L'*aimantation* $\mathbf{M}$ est le moment dipolaire magnétique par unité de volume dans les matériaux aimantés. Le champ magnétique, à l'intérieur et à l'extérieur, est le même que si le matériau était remplacé par ses *densités volumique et surfacique de courant équivalent* :

$$\mathbf{J}_e = \text{rot } \mathbf{M} \quad \text{et} \quad \alpha_e = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (16.6)$$

La *divergence* de $\mathbf{B}$ est nulle même en présence de matériaux magnétiques :

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \quad (16.9)$$

Le champ magnétique $\mathbf{H}$ a les mêmes dimensions que $\mathbf{M}$, et

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (16.14, 16.15)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_l \quad (16.16)$$

où $\mathbf{J}_l$ est la densité de courant imputable aux charges libres.

Cette dernière équation est valable seulement pour des champs *statiques*. Il vient que, pour des champs *statiques*,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_l \quad (16.18)$$

où C est une courbe fermée traversée par le courant I_l . C'est le *théorème de la circulation d'Ampère* sous une forme plus générale.

Comme avec des diélectriques, il est pratique de définir une *susceptibilité magnétique* χ_m et une *perméabilité relative* μ_r de la façon suivante :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (16.20)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad \mu_r = 1 + \chi_m \quad (16.21, 16.22)$$

Alors $\mu = \mu_r \mu_0$ est la *perméabilité*. Dans les matériaux ferromagnétiques la valeur de μ_r peut varier de plusieurs ordres de grandeur, et même changer de signe, suivant la valeur de H et l'histoire magnétique antérieure de l'échantillon.

À l'interface entre deux milieux la composante normale de $\mathbf{B}$ et la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ sont continues. Il y a *réfraction des lignes de $\mathbf{B}$* à une interface, l'angle le plus grand par rapport à la normale se trouvant dans le milieu de plus grande perméabilité.

Les matériaux ferromagnétiques se magnétisent spontanément sur des *domaines* microscopiques qui peuvent croître, aux dépens les uns des autres, lorsqu'on applique un champ magnétique.

Si on trace B en fonction de H pour un échantillon initialement non aimanté, B augmente d'abord avec H le long de la *courbe d'aimantation*. Sur un cycle complet de H on obtient une courbe fermée appelée *boucle d'hystérésis*. La surface de la boucle est égale à l'énergie perdue par mètre cube de matériau et par cycle.

EXERCICES

R 16.1 Nombre de magnéttons de Bohr par atome de fer

L'aimantation M dans le fer peut contribuer à hauteur de 2 T à B . Si un électron correspond à un magnéton de Bohr, combien d'électrons par atome, en moyenne, peuvent contribuer à M ? Voir le problème 14.5.

16.2 Champ magnétique terrestre

Une sphère de rayon R est uniformément aimantée parallèlement à un diamètre. Le champ externe d'une telle sphère est similaire à celui de la Terre.

Montrer que la densité surfacique de courant équivalent est la même que si la sphère portait une densité surfacique de charge uniforme σ et tournait à une pulsation ω telle que

$$\sigma\omega R = M$$

16.3 Courants équivalents

Un tore de fer dont le rayon extérieur est beaucoup plus grand que le rayon intérieur est aimanté dans la direction azimutale avec M uniforme.

Que peut-on dire sur α_e ?

⑧ 16.4 Mesure de M

La méthode suivante a été utilisée pour mesurer l'aimantation M d'une petite sphère de matériau induite par un champ magnétique appliqué uniforme $\mathbf{B}_0$ comme en Fig. 16.12.

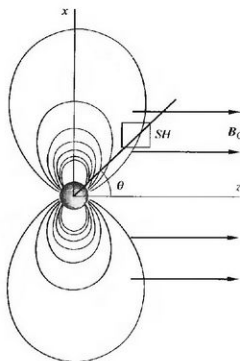


Figure 16.12 Montage destiné à mesurer l'aimantation M induite dans un petit échantillon sphérique de matériau par un champ uniforme $\mathbf{B}_0$.

La sonde à effet Hall SH est orientée afin d'être sensible à la composante x du champ provenant de la sphère, et pas à $\mathbf{B}_0$.

Sur la figure, SH est une sonde à effet Hall⁽¹⁾ dont le courant s'écoule parallèlement à $\mathbf{B}_0$. Puisque les sondes à effet Hall ne sont sensibles qu'aux champs magnétiques perpendiculaires à leur écoulement de courant, celle-ci mesure uniquement le champ dipolaire provenant de la

(1) Voir le troisième exemple de la partie 17.1.

petite sphère.

Si l'aimantation vaut M , le moment magnétique m de la sphère vaut $(4/3)\pi R^3 M$, et il apparaît que la composante x du champ dipolaire de l'échantillon en SH vaut

$$\frac{3\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^3}$$

Donc à un angle donné θ le champ décroît en $1/r^3$.

À quel angle θ le champ mesuré sera-t-il le plus élevé ?

16.5 Transducteur de déplacement mécanique

On souhaite souvent obtenir une tension proportionnelle au déplacement d'un objet à partir d'une position de référence connue.

S'il n'y a pas de matériau magnétique tout près, on peut fixer sur l'objet un petit aimant permanent et mesurer son champ avec une sonde à effet Hall⁽¹⁾, comme en Fig. 16.13. L'élément Hall est sensible seulement à la composante x du champ magnétique, et

$$B_x = \frac{3\mu_0 m}{4\pi} \frac{xz}{(x^2 + z^2)^{5/2}}$$

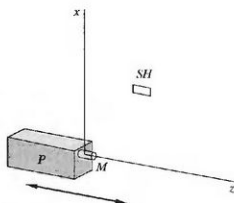


Figure 16.13 Sonde à effet Hall SH utilisée comme transducteur de déplacement mécanique.

La partie mobile P glisse le long de l'axe z . La sonde à effet Hall est orientée afin de détecter la composante x du champ magnétique du petit aimant permanent M fixé sur P .

(a) Tracer une courbe de $(xy)/(x^2 + z^2)^{5/2}$ en fonction de z pour $x = 100$ mm et pour $z = -50$ à $+50$ mm.

(b) Sur quel intervalle B_x s'écarte-t-elle de moins de 5 % de la tangente à la courbe en $z = 0$?

La région linéaire est plus longue pour des valeurs de x plus grandes, mais B_x décroît rapidement avec x .

16.6 Le weber-ampère-spire

Montrer qu'un weber-ampère-spire vaut un joule.

16.7 Bobine toroïdale avec un noyau magnétique

Comparer les champs à l'intérieur de deux bobines toroïdales similaires, toutes deux parcourues par un courant I , l'une ayant un noyau non magnétique et l'autre un noyau magnétique.

Comment sont orientés les courants équivalents sur le noyau magnétique par rapport à ceux dans la bobine ?

16.8 Champ d'un aimant en forme de disque

Un disque de fer de rayon a et d'épaisseur s est aimanté parallèlement à son axe. Calculer B sur l'axe, à l'extérieur du fer.

16.9 Champ à l'intérieur d'un aimant tubulaire

On vous demande de concevoir un aimant permanent qui délivrerait un champ magnétique dans un volume cylindrique d'environ 20 mm de long et 20 mm de diamètre. Quelqu'un suggère un aimant tubulaire, aimanté le long de sa longueur, qui engloberait ce volume. Que pensez-vous de cette suggestion ?

16.10 La divergence de $\mathbf{H}$ n'est pas toujours nulle

Montrer que $\text{div } \mathbf{H}$ n'est pas nulle dans un matériau magnétique non-homogène.

(R) 16.11 Champ dans une cavité à l'intérieur d'un matériau magnétique

Trouver B et H dans une cavité fine, en forme de disque, dont l'axe est parallèle à $\mathbf{B}$, à l'intérieur d'un matériau magnétique.

16.12 Densités volumiques de courant libre et équivalent

Montrer que, dans un matériau homogène, isotrope et linéaire,

$$\mathbf{J}_e = (\mu_r - 1)\mathbf{J}_l$$

16.13 Fil parcouru par un courant sur l'axe d'un tube de fer

Un fil parcouru par un courant I se trouve sur l'axe d'un cylindre de fer creux.

Trouver H , B et M dans la région interne, dans le fer et dans la région externe ainsi que les courants équivalents.

16.14 Aimantation en termes de χ_m et B

Montrer que dans un milieu magnétique linéaire et isotrope,

$$M = \frac{\chi_m B}{\mu_0(1 + \chi_m)}$$

16.15 Pertes de puissance dues à l'hystérésis

La figure 16.14 représente la boucle d'hystérésis pour un alliage nickel-fer appelé Deltamax.

Quelle est la valeur approchée de la dissipation de puissance par mètre cube et par cycle quand le matériau est porté à la saturation dans les deux sens ?

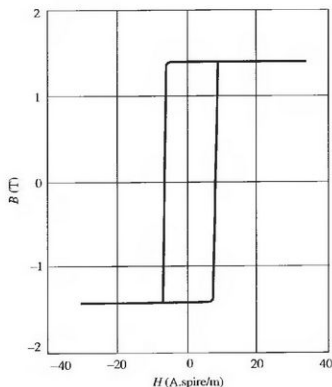


Figure 16.14

16.16 Correction de trajectoire d'un satellite en orbite

Ce problème concerne à la fois les matériaux magnétiques et les forces magnétiques, qui sont discutées au chapitre 17.

Quelqu'un suggère l'appareil suivant pour exercer une force sur un satellite en orbite. Une spire de fil fixée au satellite est parcourue par un courant électrique. Disons que la spire est rectangulaire. Comme le champ magnétique terrestre dans le satellite est essentiellement uniforme, la force magnétique nette exercée sur la spire est nulle. Mais si on blinde un côté avec un tube de haute perméabilité, il y aura une force magnétique nette exercée sur la spire.

Qu'en pensez-vous ? On pourra se référer au problème 16.13.

Voir le problème 18.3 sur le freinage magnétique des satellites.

Chapitre 17

Champs magnétiques : forces magnétiques sur des charges et des courants

La manifestation principale de la force magnétique dans la vie de tous les jours est le moteur électrique. Mais il y a des forces magnétiques partout dans la nature : les champs magnétiques de la Terre, du Soleil, du système solaire, des étoiles, des galaxies et de l'Espace ont tous leur origine dans des dynamos auto-excitées qui fonctionnent grâce à la force $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que nous étudions ici. Voir l'exemple sur les taches solaires dans la partie 17.5. Le champ magnétique terrestre n'est que légèrement modifié par les minerais magnétiques.

On affirme parfois dans les manuels que la force magnétique ne peut pas effectuer de travail⁽¹⁾. Le moteur électrique est, bien sûr, la preuve du contraire. Nous verrons ici comment les forces magnétiques peuvent être mises au travail.

Nous étudions les forces magnétiques dans deux chapitres : celui-ci et le chapitre 20. Nous avons en effet besoin de la force $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ maintenant, mais nous devons différer une discussion plus générale des forces magnétiques à un stade ultérieur.

17.1 LA FORCE DE LORENTZ

Les expériences montrent que la force exercée sur une particule de charge Q qui se déplace dans le vide à la vitesse instantanée $\mathbf{v}$ dans une région où règnent à la fois un champ électrique et un champ magnétique vaut

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (17.1)$$

(1) NdT : C'est en effet une question très controversée. En France on estime souvent que la force magnétique *ne* travaille pas, car, comme on le verra, ce n'est pas la force magnétique $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ elle-même qui travaille.

C'est la *force de Lorentz*⁽¹⁾. Cette équation est valable même si $\mathbf{v}$ est proche de la vitesse de la lumière. Les variables $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{v}$ peuvent être fonctions de l'espace et du temps, mais elles se rapportent toutes au même référentiel.

Le terme $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est la *force magnétique*. Observons que la force magnétique est perpendiculaire à $\mathbf{v}$. Elle peut donc changer la direction de $\mathbf{v}$, mais pas son module, ni l'énergie cinétique de la particule. Elle peut néanmoins faire du travail utile, comme nous allons le voir.

Exemple : L'effet de striction

Calculons la force nette vers l'extérieur sur un ion à la *périphérie* d'un faisceau d'ions. Tout d'abord il y a une force électrique *vers l'extérieur* à cause de la répulsion électrostatique entre les ions. Mais il y a aussi une force magnétique. Calculons les deux forces. La figure 17.1 représente, schématiquement, un faisceau d'ions.

Les ions ont une charge Q , une masse m et une vitesse $\mathbf{v}$. Le rayon du faisceau est a , et son courant est I . Supposons que la densité de charge soit uniforme. (C'est une approximation ; la densité de courant est en réalité une fonction gaussienne du rayon.)

Nous calculons tout d'abord $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. La densité linéique de charge vaut I/v . Alors à la périphérie

$$E = \frac{I/v}{2\pi\epsilon_0 a}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (17.2)$$

- 1) *La force électrique.* Référons-nous maintenant à la Fig. 17.1. Un ion de charge Q à la périphérie subit une force QE à cause de la répulsion électrostatique entre ions du même signe. Notons que, si les ions sont positifs, Q est positive et $\mathbf{E}$ est orienté *vers l'extérieur*, de telle sorte que la force QE est orientée *vers l'extérieur*. Si les ions sont négatifs, ou s'il s'agit d'un faisceau d'électrons, Q est négative et $\mathbf{E}$ est orienté *vers l'intérieur*, si bien que QE est toujours orientée *vers l'extérieur*.
- 2) *La force magnétique.* Un ion de charge Q à la périphérie se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ dans le champ magnétique $\mathbf{B}$. Il est donc soumis à une force $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Si Q est positive, $\mathbf{B}$ est orientée comme sur la figure et la force est orientée *vers l'intérieur*. Si Q est négative, $\mathbf{B}$ change alors de sens et $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est encore orientée *vers l'intérieur*.
- 3) *La force nette.* Ainsi la force nette *vers l'extérieur* sur un ion à la périphérie vaut

$$F = eE - evB = e \frac{I/v}{2\pi\epsilon_0 a} - ev \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (17.3)$$

$$= \frac{eI}{2\pi\epsilon_0 av} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (17.4)$$

On a remplacé $\epsilon_0\mu_0$ par $1/c^2$, grâce à l'Éq. 13.17. Ainsi, si $v^2 \ll c^2$, la force électrique répulsive prédomine.

(1) La force de « Lorentz » fut découverte par Heaviside en 1889, six ans avant que Lorentz ne la découvre. Voir l'annexe C.

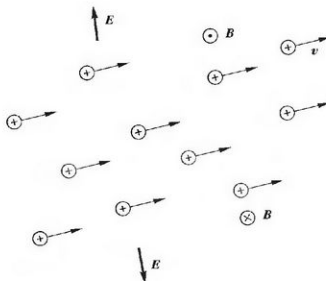


Figure 17.1 Diagramme schématisé d'un faisceau d'ions positifs. Tous les ions se déplacent à la même vitesse v . E est radial et orienté vers l'extérieur, et B est azimutal.

Notons que la force électrique au rayon r à l'intérieur du faisceau ne dépend que de la charge à l'intérieur de r . De même, la force magnétique en r ne dépend que du courant à l'intérieur de r .

Si maintenant on annule la force électrique répulsive en ajoutant des électrons à un faisceau de charges positives, disons des protons, la force magnétique agit seule et le faisceau *se contracte*. Ce phénomène est facile à observer dans les accélérateurs. Le gaz résiduel sur la trajectoire du faisceau s'ionise par collision et forme des ions de basse énergie et des électrons. Ces ions sont repoussés tandis que les électrons demeurent piégés dans le faisceau. C'est la *focalisation du gaz*.

Exemple : Les ceintures de van Allen

Les ceintures de van Allen illustrées en Fig. 17.2 ont été découvertes par James van Allen (1914-) en 1958. Ce sont des nuages de particules chargées qui entourent la Terre entre quelques centaines de kilomètres et environ six rayons terrestres. Les particules sont principalement des protons et des électrons, mais il y a aussi de l'hélium, de l'oxygène et d'autres ions. Les protons et les électrons proviennent du vent solaire (voir l'exemple au paragraphe 3.4.1) et de la désintégration de neutrons de haute énergie des rayons cosmiques.

Les particules sont piégées dans le champ magnétique terrestre par la force $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ et tournent en spirale autour des lignes de champ. À mesure qu'elles approchent soit du pôle Nord soit du pôle Sud magnétique, B augmente, les lignes de champ magnétique se resserrent et les particules font demi-tour : les régions des pôles agissent comme des *miroirs magnétiques*. Les particules reviennent plus ou moins sur leurs pas, un peu plus à l'Est dans le cas des électrons et un peu plus à l'Ouest dans le cas des ions positifs. Ainsi les nuages de particules tournent autour de l'axe magnétique

de la Terre. Les nuages évitent les pôles et leur axe de symétrie est celui du champ magnétique dipolaire terrestre, qui forme un angle d'environ 11 degrés par rapport à l'axe de rotation. La ceinture des ions positifs est plus basse que celle des électrons, comme en Fig. 17.2.

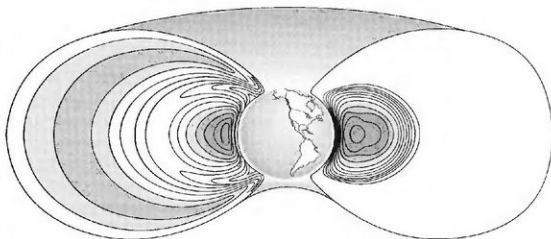


Figure 17.2 Ceintures de radiation de van Allen.

À droite : des protons d'énergie supérieure à 15 millions d'électronvolts.

À gauche : des électrons d'énergie supérieure à 0,5 millions d'électronvolts. Les zones grisées les plus foncées correspondent aux régions de flux de particules piégées les plus intenses. (Source : McGraw-Hill *Encyclopedia of Science and Technology*, 8^e édition, 1997.)

Comme les particules ont assez d'énergie pour pénétrer plusieurs centimètres d'aluminium, elles peuvent affecter les organismes vivants et les instruments électroniques à l'intérieur des satellites, ainsi que les panneaux solaires.

Les autres planètes qui ont un champ magnétique, par exemple Jupiter, possèdent des ceintures de van Allen.

Exemple : L'effet Hall

L'effet Hall fut découvert par Edwin H. Hall (1855-1938) à l'âge de 24 ans, pendant sa thèse en 1879. L'effet Hall est surtout connu pour son utilisation dans des sondes pour mesurer B , mais il a aussi beaucoup d'autres applications. L'effet Hall est une application directe de la force de Lorentz, comme le générateur magnétohydrodynamique de l'exemple suivant, le moteur électrique et tant d'autres appareils.

Les sondes Hall ont d'innombrables applications. Elles peuvent mesurer des B d'environ 0,0001 à 14 T, et peuvent être utilisées pour des champs statiques ou alternatifs, jusqu'à environ 3 kHz. La taille des sondes peut descendre jusqu'à 1 mm. Les sondes Hall servent à la détection de véhicules, et, avec un aimant permanent fixé sur un objet en mouvement, elles sont utilisées comme senseurs de position et de position angulaire. Certaines sondes sont submersibles et peuvent servir en *diagraphie des sondages*, indiquant la nature des sédiments en mesurant B en fonction de la profondeur. Les sondes triaxiales mesurent les trois composantes orthogonales de B .

Les figures 17.3(a) et (b) représentent des barres de matériau conducteur connectées à une source de tension V_i et parcourues par des courants longitudinaux I . Des bobines externes appliquent des champs magnétiques transverses B . Dans les deux cas les porteurs de charge dérivent longitudinalement.

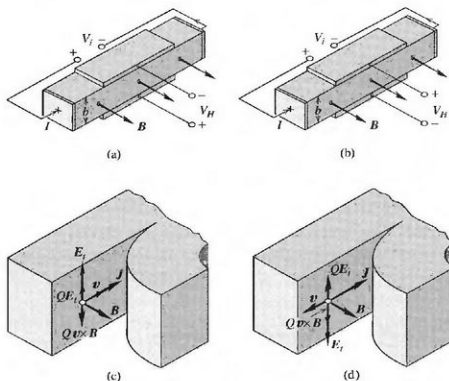


Figure 17.3 L'effet Hall dans les semi-conducteurs.

- (a) Dans un matériau de type p les porteurs de charge sont des trous, et la tension de Hall a le signe indiqué.
- (b) Dans un matériau de type n les porteurs sont des électrons, et la tension de Hall a la polarité opposée.
- (c) Dans un matériau de type p les forces transverses QE_i et $Qv \times B$ sont égales et opposées.
- (d) Les forces transverses dans un matériau de type n .

En (a), les porteurs de charge sont des trous (qui sont positifs) qui dérivent vers la droite. Les trous dérivent aussi vers le bas car la force $Qv \times B$ est orientée vers le bas. Cette tendance des porteurs de charge à dériver latéralement dans un champ magnétique transverse est appelée *effet Hall*. Supposons que la tension V_H est mesurée avec un voltmètre de haute impédance. La dérive des trous vers le bas se poursuit jusqu'à ce que le champ électrique transverse E_i entre les électrodes supérieure et inférieure compense le champ transverse $v \times B$. La tension V_H est appelée *tension de Hall*. La figure (c) montre les six vecteurs impliqués.

En (b), les porteurs de charge sont des électrons (qui sont négatifs) qui dérivent vers la gauche. La force $Qv \times B$ est encore orientée vers le bas, et la tension de Hall V_H a maintenant le signe opposé. La figure 17.3(d) montre les six vecteurs correspondants.

On peut calculer simplement la tension V_H en négligeant les effets de bord et en supposant que le champ B externe appliqué est uniforme et beaucoup plus grand que

celui du courant I de la figure. Une fois que la dérive transverse a cessé,

$$Q \frac{V_H}{b} = QvB \quad (17.5)$$

où b est l'épaisseur de l'échantillon comme sur la figure, et v est la vitesse de dérive longitudinale. Alors

$$V_H = vBb \quad (17.6)$$

Si la mobilité des porteurs est $\mathcal{M}$ (Paragraphe 4.5.2) et le champ électrique longitudinal E_{long} , alors

$$V_H = E_{\text{long}} \mathcal{M} B b \quad (17.7)$$

La tension est proportionnelle à la mobilité.

Notons que sur les figures les porteurs de charge tendent à dériver vers le bas, qu'ils soient positifs ou négatifs. La polarité de V_H dépend donc du signe des porteurs.

Les mobilités dans les semi-conducteurs étant plus élevées que dans les bons conducteurs de plusieurs ordres de grandeur, les appareils Hall utilisent toujours des semi-conducteurs. Certains appareils sont microscopiques et font partie de circuits intégrés.

Exemple : Le générateur magnétohydrodynamique

Le *générateur magnétohydrodynamique* [42] est une application à l'échelle industrielle de l'effet Hall. Il transforme une partie de l'énergie cinétique d'un gaz chaud directement en énergie électrique. La figure 17.4 montre le principe de son fonctionnement. Un gaz chaud entre par la gauche à une vitesse de l'ordre de 1 000 m/s. Il contient un sel du type K_2CO_3 qui s'ionise facilement à haute température, formant des ions positifs et des électrons. La température peut valoir de 2 000 à 3 000 K, et la conductivité est environ 100 S/m. (La conductivité du cuivre vaut $5,8 \times 10^7$ S/m.) Le champ magnétique est produit par des bobines supraconductrices.

Les ions positifs sont défléchis vers le bas, les électrons vers le haut, et le courant résultant I s'écoule à travers la résistance de charge R . Cela établit un champ électrique E comme en Fig. 17.4. Le gaz reste neutre.

Un avantage évident du générateur MHD est qu'il ne contient aucune partie en mouvement, sauf le gaz. Une autre est qu'il peut fonctionner à une température d'entrée tellement élevée que l'efficacité thermodynamique totale

$$\varepsilon = \frac{T_e - T_s}{T_e} \quad (17.8)$$

peut atteindre 60 % si le gaz chaud de sortie alimente un générateur à turbine conventionnel. Le combustible est du charbon, du pétrole ou du gaz naturel. L'efficacité thermodynamique des centrales thermiques conventionnelles est d'environ 38 %.

Les générateurs MHD ont fait l'objet d'un important travail de développement, en particulier dans l'ex-URSS et aux États-Unis, mais apparemment il n'en existe pas encore d'application commerciale (1999).

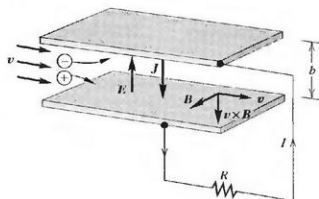


Figure 17.4 Diagramme schématisique d'un générateur magnétohydrodynamique (MHD).

Une partie de l'énergie cinétique d'un gaz très chaud injecté à gauche à la vitesse $\mathbf{v}$ est transformée directement en énergie électrique. Le champ magnétique $\mathbf{B}$ est celui d'une paire de bobines supraconductrices situées à l'extérieur de la chambre, non représentées. Les ions en mouvement sont défléchis soit vers le haut soit vers le bas suivant leur signe.

Dans les générateurs MHD, une partie de l'énergie cinétique associée au mouvement global du gaz devient énergie électrique de la manière suivante. La force magnétique sur une particule chargée est normale à la vitesse et n'a pas d'effet sur son énergie cinétique. La fonction de la force magnétique est d'obliger les particules positives à aller vers l'électrode positive et les particules négatives à aller vers l'électrode négative. Ainsi, les ions comme les électrons « montent », pour ainsi dire, sous l'action des forces indiquées en Fig. 17.5, et ils ralentissent. Comme la pression du gaz est supérieure à la pression atmosphérique, le libre parcours moyen entre collisions est infinitésimal et les particules chargées sont noyées dans le gaz. Par conséquent, ralentir les particules ralentit le gaz et épuise son énergie cinétique de translation.

Idéalement, les particules chargées devraient arriver sur les électrodes à vitesse nulle. Elles arrivent en fait à vitesse finie, les électrodes chauffent et seule une partie de l'énergie cinétique des *particules* devient énergie électrique. Une fraction encore plus petite de l'énergie cinétique de translation du gaz sert à engendrer de l'énergie électrique. En outre, une partie de l'énergie cinétique associée au mouvement transverse des particules chargées ne fait qu'augmenter l'énergie thermique aléatoire du gaz.

Supposons que $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ et la vitesse $\mathbf{v}$ des particules soient uniformes à l'intérieur du générateur. Supposons $\mathbf{v}$ horizontale. Ce sont des approximations grossières.

La force de Lorentz $Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ agit sur une charge Q comme si le champ électrique valait $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Ainsi, pour un gaz de conductivité σ ,

$$|\mathbf{J}| = |\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})| = \sigma(vB - E) = \sigma \left(vB - \frac{V}{b} \right) \quad (17.9)$$

$$I = \mathcal{A}J = \mathcal{A}\sigma \left(vB - \frac{IR}{b} \right) \quad (17.10)$$

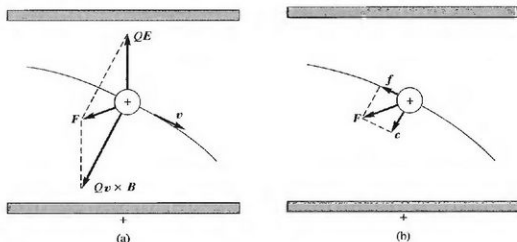


Figure 17.5 (a) Force électrique QE et force magnétique $Qv \times B$ agissant sur un ion chargé positivement dans le générateur MHD de la Fig. 17.4. La somme F de ces deux forces est orientée vers le bas et la gauche. (b) La force F a deux composantes : une force de freinage f tangentielle et une force centripète c normale.

où I et R sont indiqués en Fig. 17.4 et où $\mathcal{A}$ est l'aire d'une des électrodes. En résolvant,

$$I = \frac{vBb}{b/(\sigma\mathcal{A}) + R} \quad (17.11)$$

Observons que vBb est la tension de sortie en circuit ouvert et que $b/(\sigma\mathcal{A})$ est la résistance du gaz dans la direction transverse.

La tension de sortie est IR . Après multiplications en croix de l'Éq. 17.11,

$$V = IR = vBb - \frac{Ib}{\sigma\mathcal{A}} \quad (17.12)$$

La tension V diminue linéairement avec I .

Examinons maintenant l'efficacité. Nous ne sommes pas armés pour calculer l'efficacité avec laquelle l'énergie cinétique de translation du gaz devient énergie électrique. Nous pouvons cependant comparer les pertes Joule dans la résistance de charge R à celles dans le gaz. Définissons donc l'efficacité comme

$$\varepsilon = \frac{\text{Pertes Joules dans } R}{\text{Pertes Joules dans } R + \text{Pertes Joules dans le gaz}} \quad (17.13)$$

$$= \frac{I^2 R}{I^2 R + I^2 b/(\sigma\mathcal{A})} = \frac{R}{R + b/(\sigma\mathcal{A})} \quad (17.14)$$

D'après les expressions ci-dessus pour I et pour IR ,

$$\varepsilon = R \frac{I}{vBb} = \frac{IR}{vBb} = 1 - \frac{I}{\sigma\mathcal{A}vB} \quad (17.15)$$

L'efficacité est donc égale à un quand $I = 0$ ou quand $R \rightarrow \infty$. Elle est nulle quand $I = \sigma\mathcal{A}vB$ ou quand $R = 0$, $V = 0$.

Cf. exercices : 17.1 ; 17.2 ; 17.3 ; 17.4 ; 17.5 ; 17.6 ; 17.7 ; 17.8 ; 17.9 ; 17.10 ; 17.11.

17.2 LA FORCE MAGNÉTIQUE SUR UN FIL PARCOURU PAR UN COURANT

Un fil stationnaire de section A est parcouru par un courant I dans une région où règne un champ magnétique $\mathbf{B}$ d'origine différente. Le fil contient N porteurs de charge par mètre cube, dérivant à la vitesse $\mathbf{v}$, chacun de charge Q .

Un élément de longueur $d\mathbf{l}$ du fil contient $AN d\mathbf{l}$ porteurs de charge. Alors la force magnétique sur $d\mathbf{l}$ vaut

$$d\mathbf{F} = AN d\mathbf{l} Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (ANQv) d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (17.16)$$

puisque I est égal à la charge contenue dans une longueur v du fil.

La force magnétique par unité de longueur sur un fil parcouru par un courant I est donc $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$.

Or, nous avons calculé la force sur les porteurs de charge. Comment cette force est-elle transmise au fil ? Comme nous l'avons vu paragraphe 4.5.1, le libre parcours moyen des électrons de conduction entre collisions est seulement de l'ordre de 100 diamètres atomiques. Les électrons avancent donc en trébuchant, entrant continuellement en collision avec le réseau cristallin et le poussant latéralement. Ainsi, la force exercée sur les électrons de conduction est aussi exercée sur le fil. Le même phénomène se produit dans les dispositifs de physique du solide, où les libres parcours moyens sont beaucoup plus longs et où les porteurs de charge sont positifs.

Cette force latérale peut effectuer un travail. Imaginons un cas idéalisé où I est constant et $\mathbf{B}$ est constant et uniforme. Le fil se déplace parallèlement à lui-même d'une distance $d\mathbf{s}$. Alors le travail effectué par la force magnétique vaut

$$I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

Cette « expérience de pensée » naïve illustre le principe de fonctionnement des moteurs électriques.

Les cas du générateur MHD ci-dessus et du disque de Faraday discuté ci-dessous constituent d'autres exemples d'une force magnétique qui travaille.

La force magnétique totale exercée sur un circuit fermé C parcouru par un courant I dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ est

$$\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (17.17)$$

Si $\mathbf{B}$ est uniforme, la force magnétique nette $\mathbf{F}$ est nulle.

Cf. exercices : 17.13 ; 17.15 ; 17.15.

17.3 LA FORCE MAGNÉTIQUE ENTRE DEUX CIRCUITS FERMÉS

Nous avons vu, ci-dessus, que la force magnétique exercée sur un circuit stationnaire parcouru par un courant I vaut I fois l'intégrale curviligne de $d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. En appliquant alors la loi de Biot et Savart de la partie 14.2, la force magnétique exercée par un courant I_a

sur un courant I_b comme en Fig. 17.6 est donnée par

$$\mathbf{F}_{ab} = I_b \oint_b d\mathbf{l}_b \times \frac{\mu_0}{4\pi} I_a \oint_a \frac{d\mathbf{l}_a \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b d\mathbf{l}_b \times \frac{d\mathbf{l}_a \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (17.18)$$

où r est la distance entre $d\mathbf{l}_a$ et $d\mathbf{l}_b$ et $\hat{\mathbf{r}}$ est orienté de $d\mathbf{l}_a$ vers $d\mathbf{l}_b$.

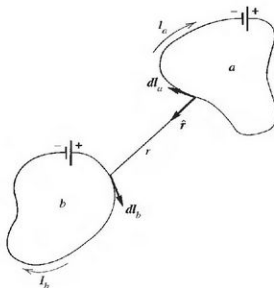


Figure 17.6 Deux circuits fermés a et b .

Le fait que $d\mathbf{l}_a$ et $d\mathbf{l}_b$ ne jouent pas des rôles symétriques dans cette intégrale est gênant. L'asymétrie semble indiquer que $\mathbf{F}_{ab} \neq -\mathbf{F}_{ba}$, ce qui est contraire à la loi de Newton⁽¹⁾. Cette impression est fautive. On peut transformer l'intégrale curviligne double en une intégrale symétrique et montrer que $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$ de la façon suivante. D'abord on développe le produit vectoriel triple :

$$d\mathbf{l}_b \times (d\mathbf{l}_a \times \hat{\mathbf{r}}) = d\mathbf{l}_a (d\mathbf{l}_b \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \hat{\mathbf{r}} (d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b) \quad (17.19)$$

Or

$$\oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a (d\mathbf{l}_b \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r^2} = \oint_a d\mathbf{l}_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_b \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (17.20)$$

La deuxième intégrale à droite est nulle pour la raison suivante. C'est l'intégrale ordinaire de dr/r^2 , avec des bornes supérieure et inférieure identiques car le circuit b est fermé par hypothèse. Ainsi l'intégrale double à gauche est nulle, et

$$\mathbf{F}_{ab} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \hat{\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r^2} \quad (17.21)$$

Il s'ensuit que $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$ car $\hat{\mathbf{r}}$ est orienté vers le circuit sur lequel la force agit.

L'intégrale curviligne double ci-dessus est généralement difficile à calculer analytiquement. On en trouvera des expressions plus utiles au chapitre 20.

(1) L'action est égale à la réaction seulement à des vitesses très inférieures à la vitesse de la lumière.

Exemple : La force entre deux courants parallèles

On peut calculer la force par unité de longueur entre deux longs fils parallèles parcourus par des courants comme en Fig. 17.7, sans avoir à effectuer l'intégration. À la position de I_b , B_a vaut $\mu_0 I_a / (2\pi D)$, dans la direction indiquée sur la figure. Voir le premier exemple de la partie 14.4. La force sur une longueur unitaire du fil b est donc

$$F' = B_a I_b = \frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi D} \quad (17.22)$$

La force est attractive si les courants s'écoulent dans la même direction et répulsive sinon. La force est généralement négligeable.

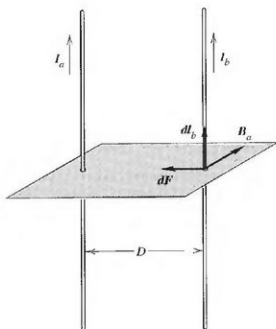


Figure 17.7 Deux longs fils parallèles parcourus par des courants I_a et I_b . La force est attractive quand les courants s'écoulent dans la même direction.

Voir la Fig. 17.8.

► **Les définitions de μ_0 , de l'ampère, du coulomb et de ε_0**

Comme énoncé auparavant dans la partie 14.2,

$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{Wb/A.m} \quad (17.23)$$

Si $I_a = I_b = I$ A, la force par unité de longueur est alors

$$F' = \frac{2 \times 10^{-7} I^2}{D} \quad \text{N/m} \quad (17.24)$$

Cette équation définit l'ampère.

La définition du coulomb s'ensuit : il est la charge transportée par un courant de 1 A pendant 1 s.

Ainsi, les définitions de μ_0 , I et Q sont arbitraires et liées.

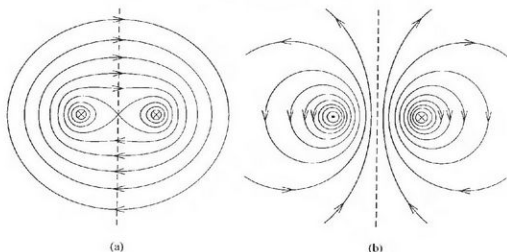


Figure 17.8 (a) Lignes de champ magnétique pour le vecteur somme des champs de deux courants parallèles s'écoulant dans la même direction. On a choisi les lignes de telle façon que le flux magnétique entre deux lignes voisines soit le même. Les lignes les plus proches des fils ne sont pas dessinées car elles sont trop serrées. La force entre les fils est attractive : les lignes de champ magnétique sont « sous tension ». (b) Lignes de champ magnétique pour deux courants parallèles qui s'écoulent dans des directions opposées. La force entre les fils est répulsive : les lignes de champ magnétique « se repoussent latéralement ». Ces lignes sont identiques aux lignes équipotentielles de la Fig. 3.11 car, dans un champ bidimensionnel, une ligne de B est une ligne de A constant (Problème 14.13) et V comme A varie comme l'inverse de la distance au fil.

Mais la loi de Coulomb relie la force d'attraction entre deux charges électriques avec leur valeur, et la force est définie en mécanique. La loi de Coulomb doit donc impliquer une constante de proportionnalité dont la valeur doit être mesurée.

On pourrait, en principe, déduire la valeur de ϵ_0 de la mesure de F , des Q et de r dans la loi de Coulomb. Pourtant, cela n'aurait pas beaucoup de sens car aucune de ces mesures ne peut être très précise. On utilise plutôt le fait que

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \quad (17.25)$$

où c , la vitesse de la lumière, est définie avec 9 chiffres significatifs. Donc

$$\epsilon_0 = 8.85418782 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (17.26)$$

17.4 LA FORCE MAGNÉTIQUE SUR UNE DISTRIBUTION VOLUMIQUE DE COURANT

Comment peut-on maintenant calculer une force magnétique si le courant ne s'écoule pas dans un fil fin mais à travers un volume fini ? Considérons un petit élément de volume de longueur $d\ell$ parallèle à $\mathbf{J}$ et de section dA , comme sur la Fig. 17.9. La force magnétique

exercée sur cet élément est

$$d\mathbf{F} = (J dA) d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (17.27)$$

puisque $J dA d\mathbf{l} = \mathbf{J} dV$ comme dans la partie 14.2.

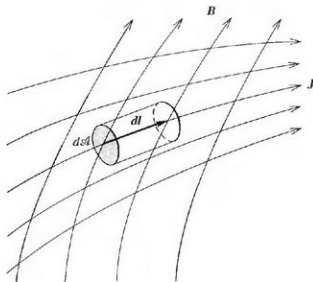


Figure 17.9 Élément de volume $dV = dl dA$ dans une distribution de courant $\mathbf{J}$.

La force par unité de volume est donc

$$\mathbf{F}' = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (17.28)$$

La force magnétique totale sur une distribution de courant qui occupe un volume V est donc

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (17.29)$$

► La pression magnétique

La pression magnétique est un concept important, à la fois pour la conception des solénoïdes, comme nous allons le voir ci-dessous, et pour l'étude des champs magnétiques naturels dans les plasmas, comme dans le Soleil et dans l'espace. Voir l'exemple ci-dessous sur les taches solaires.

Un long solénoïde possédant N' spires par mètre est parcouru par un courant I . Ainsi le courant par unité de longueur vaut $N'I$. L'enroulement a une épaisseur a . À l'intérieur du solénoïde, d'après la partie 15.4, $\mathbf{B}$ est axial et uniforme, et

$$B = \mu_0 N' I \quad (17.30)$$

À l'intérieur de l'enroulement, le champ B moyen a la même valeur, divisée par 2 :

$$\mu_0 N' I / 2.$$

Or, à l'intérieur de l'enroulement, $\mathbf{B}$ est axial et $\mathbf{J}$ est azimutal. Ainsi la densité de force magnétique $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, à l'intérieur de l'enroulement, est orientée radialement vers l'extérieur comme s'il existait une pression de gaz à l'intérieur du solénoïde.

Quelle est la valeur de la pression ? La densité volumique de force F' est donnée par JB , où

$$J = \frac{N'I}{a} = \frac{B}{\mu_0 a} \quad (17.31)$$

Ainsi, la densité de force moyenne par unité de volume est

$$F'_{\text{moy}} = JB_{\text{moy}} = \frac{B}{\mu_0 a} \frac{B}{2} + \frac{1}{a} \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (17.32)$$

Juste à l'intérieur de l'enroulement, la densité surfacique de force, ou *pression magnétique* p_{mag} , est donc

$$p_{\text{mag}} = aF'_{\text{moy}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (17.33)$$

Notons que p_{mag} est proportionnelle au carré de B . Notons aussi que nous avons supposé que $B = 0$ à l'extérieur du solénoïde.

La pression magnétique est-elle importante ? Prenons $B = 1$ T. C'est un champ élevé, à peu près le champ entre les deux pôles d'un électro-aimant puissant. Alors

$$p_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} = \frac{1}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \approx 4 \times 10^5 \text{ Pa} \approx 4 \text{ atm} \quad (17.34)$$

Aux abris ! Le solénoïde va exploser, à moins qu'il n'ait été soigneusement conçu. Des champs magnétiques plus ordinaires, disons 0,1 T ou moins, ne posent aucun problème : si $B \approx 0,1$ T, par exemple, $p_{\text{mag}} \approx 0,04$ atm.

À ce jour (1999), des solénoïdes de 100 teslas sont en cours de conception à Toulouse (France) et à Los Alamos (États-Unis). Que vaudra la pression magnétique ? Quarante milles atmosphères ! Évidemment, contenir une pression si énorme est un défi technologique majeur.

Nous reviendrons à la pression magnétique dans la partie 20.5.

Cf. exercice 17.16.

17.5 LA LOI D'OHM POUR DES CONDUCTEURS EN MOUVEMENT

Partout on trouve des conducteurs qui se déplacent dans des champs magnétiques. Il y a, bien sûr, les moteurs électriques, les générateurs et une multitude d'autres appareils magnétiques. Mais aussi, la couche liquide conductrice du noyau terrestre et les plasmas solaires, stellaires et spatiaux se déplacent par convection dans leur propre champ magnétique. Certains phénomènes, comme les taches solaires, sont des dynamos auto-excitées qui engendrent des champs magnétiques tandis que partout ailleurs le fluide est en mouvement de convection dans le champ ambiant. Voir les exemples suivants.

Rappelons-nous d'abord qu'une charge Q dans un conducteur *stationnaire* et dans un champ $\mathbf{E}$ est soumise à une force $Q\mathbf{E}$ et que $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. C'est la loi d'Ohm (Partie 4.3).

Si maintenant un conducteur *se déplace* à la vitesse $\mathbf{v}$ dans des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ superposés, la force de Lorentz sur une charge Q à l'intérieur est

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.35)$$

comme dans l'Éq. 17.1, et

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.36)$$

C'est la loi d'Ohm pour des conducteurs en mouvement.

Notons les points suivants. (1) Cette dernière équation est valable à un instant donné et en un point donné à l'intérieur du conducteur. Les cinq variables sont mesurées par rapport au *même* référentiel fixe, et peuvent être des fonctions des coordonnées spatiales et du temps. (2) Nous avons ici une densité de courant de conduction, ou courant de charges libres. Nous pourrions alors ajouter un indice l à $\mathbf{J}$. (3) Le $\mathbf{B}$ est le champ magnétique *net*, c'est-à-dire le champ magnétique appliqué plus le champ de $\mathbf{J}$. Cette équation néglige le *courant de convection*, dont la densité est

$$\mathbf{J}_{\text{conv}} = \rho\mathbf{v} \quad (17.37)$$

où ρ est la densité spatiale de charge de l'Éq. 17.54, et $\mathbf{v}$ est la vitesse du conducteur. Cependant, le courant de convection est négligeable tant que $v^2 \ll c^2$ [28].

On prétend souvent que, si la conductivité σ tend vers l'infini dans l'Éq. 17.36, alors $\mathbf{E}$ tend vers $-(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. C'est faux, pour la simple raison que $\mathbf{E}$ comme $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sont indépendants de σ [28, 38]. En fait, $\mathbf{J}$ augmente proportionnellement à σ .

Exemple : Le disque de Faraday, ou générateur homopolaire

Le *disque de Faraday*, ou *générateur homopolaire* [6, 28] est un appareil à basse tension et fort courant. Il comprend un disque de cuivre qui tourne dans un champ magnétique axial, avec des contacts sur l'axe et sur la périphérie, comme sur la Fig. 17.10. Le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est radial et engendre un courant entre l'axe et la périphérie du disque. L'une des applications est la génération des courants élevés nécessaires pour purifier les métaux par électrolyse à l'échelle industrielle. Des bobines supraconductrices fournissent le champ $\mathbf{B}$ axial.

Supposons que le champ électrique dans le disque soit purement radial. Cela nécessite des contacts tout autour de l'axe et sur toute la périphérie, ce qui est la configuration habituelle.

Observons la Fig. 17.11. Le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est orienté *vers l'extérieur* et $\mathbf{E}$ *vers l'intérieur*. D'après l'Éq. 17.36,

$$\mathbf{J} = \sigma[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] = \sigma(E + vB)\hat{\rho} \quad (17.38)$$

où E est une quantité *négative*, comme sur la figure.

Considérons la moitié inférieure du disque. (1) Un électron de charge $-e$ au rayon ρ au-dessous de l'axe a une vitesse azimutale $v = \omega\rho$. (2) Il est donc soumis à une force magnétique radiale *vers l'intérieur* $-evB$. (3) L'électron est aussi soumis à la

force électrique radiale vers l'extérieur $-eE$ (E est une quantité négative), qui est plus petite que la force magnétique vers l'intérieur : $|E| < |vB|$. (4) Sa vitesse radiale de dérive vers l'intérieur est donc $\mathcal{M}(E + vB)$, où $\mathcal{M}$ est la mobilité d'un électron de conduction dans le cuivre⁽¹⁾. Cette dérive radiale est inférieure à v de beaucoup d'ordres de grandeur. (5) Cette dérive radiale donne une force azimutale de freinage $-e\mathcal{M}(E + vB)B$ sur un électron de conduction.

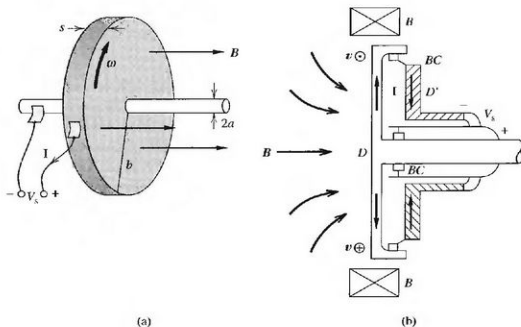


Figure 17.10 Générateur homopolaire.

(a) Principe de fonctionnement. (b) Section montrant la bobine B , le disque D , les balais de contact BC et les bornes V_s . Le couple de torsion sur le disque tournant D est égal et opposé à celui sur le disque fixe D' . En outre, le champ du courant à travers D et D' est azimutal. Il n'y a donc pas de force sur la bobine B . C'est important, car B est supraconductrice et enfermée dans un cryostat.

- 1) Le module de la force de freinage azimutale par unité de volume au rayon ρ est donc

$$F' = eN\mathcal{M}(E + vB)B \quad (17.39)$$

où N est la densité d'électrons de conduction. Or, d'après le paragraphe 4.5.2, $Ne\mathcal{M}$ est égal à la conductivité σ , si bien que

$$F' = \sigma(E + vB)B \quad (17.40)$$

et $\mathbf{F}' = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, comme attendu. Rappelons que E est négative.

Cette force est appréciable, malgré la petitesse de la vitesse de dérive et de $\mathcal{M}$, à cause de la valeur énorme du produit Ne : nous avons calculé au paragraphe 4.5.1 que $Ne \approx 10^{10} \text{ C/m}^3$ dans le cuivre !

(1) Voir le paragraphe 4.5.2. La vitesse de dérive d'un porteur de charge est égale à $\mathcal{M}$ fois le champ. Ici, le champ électrique équivalent est $E + vB$.

La force de freinage agit sur les porteurs de charge, mais leur libre parcours moyen entre collisions avec le réseau cristallin est si court, comme nous l'avons vu au paragraphe 4.5.1, que la force de freinage agit aussi sur le disque.

Remarquons que la force magnétique de freinage travaille contre tout appareil qui fait tourner le disque, malgré le fait que la force $-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ n'affecte pas la vitesse des électrons de conduction.

2) Le courant I . Appelons l'épaisseur du disque s . Alors selon l'Éq. 17.38,

$$I = 2\pi\rho s\sigma(E + vB) \quad (17.41)$$

Si $I = 0$, alors $|E| = |vB|$. Et si $I \neq 0$? Notons R_c la résistance de charge connectée entre les bornes de sortie, et V_s la tension de sortie. Alors

$$V_s = IR_c \quad (17.42)$$

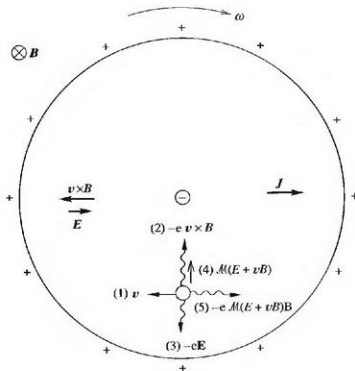


Figure 17.11 Disque de Faraday : $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{E}$ sont radiaux et $\mathbf{B}$ est axial.

Avec les polarités indiquées, la périphérie du disque est positive et l'axe négatif. Un électron de conduction a une vitesse azimutale $v = \omega\rho$, le produit $\omega\rho B$ est plus grand que E et le courant s'écoule radialement vers l'extérieur. Flèches (1) et (5) : composantes de vitesse (flèches droites) et forces (flèches ondulées) sur un électron de conduction. Voir le texte principal.

Notons V le potentiel au rayon ρ sur le disque, a le rayon de l'axe et b le rayon du disque. D'après la partie 3.4, comme $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ est orienté vers l'intérieur, V augmente avec le rayon et

$$V_s = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\rho} \quad (17.43)$$

Donc

$$IR_c = V_s = \int_b^a \left(-\omega \rho B + \frac{I}{2\pi\sigma s \rho} \right) d\rho \quad (17.44)$$

$$= \omega B \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) - \frac{I}{2\pi\sigma s} \ln \frac{b}{a} \quad (17.45)$$

Alors

$$I \left[R_c + \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma s} \right] = \omega B \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) \quad (17.46)$$

Le deuxième terme de la parenthèse de gauche est la résistance du disque R_d entre les rayons a et b , comme dans l'exemple de la partie 4.3. Ainsi

$$I = \frac{\omega B (b^2 - a^2)}{2(R_c + R_d)} \quad (17.47)$$

Vérifions. Le courant de disque I est proportionnel à la vitesse angulaire ω du disque et à B ; c'est raisonnable. Par ailleurs, $I = 0$ si R_c est infinie, ou si $b = a$, ou encore si $B = 0$, ce qui paraît sensé.

- 3) Et la *force centrifuge* ? Voyons cela. La force centrifuge sur un électron de conduction est $m\omega^2\rho$, tandis que la force magnétique est $e\omega\rho B$. Alors

$$\frac{m\omega^2\rho}{e\omega\rho B} = \frac{m}{e} \frac{\omega}{B} = \frac{9,1 \times 10^{-31}}{1,6 \times 10^{-19}} \frac{\omega}{B} \approx 6 \times 10^{-12} \frac{\omega}{B} \quad (17.48)$$

Le rapport est indépendant de ρ . Si, par exemple, $\omega = 1\,000$ rad/s et $B = 1$ T, la force centrifuge est complètement négligeable. Aucune combinaison raisonnable de ω et B ne peut rendre la force centrifuge importante.

- 4) La valeur de E est particulièrement intéressante. En réécrivant l'Éq. 17.41,

$$E = -\omega\rho B + \frac{I}{2\pi\sigma s\rho} \quad (17.49)$$

Calculons la divergence de $\mathbf{E}$. En coordonnées cylindriques⁽¹⁾,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E) = -2\omega B \quad (17.50)$$

Observons que $\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, comme nous le verrons dans la partie 17.6. Notons maintenant la densité de charge $\tilde{Q}$ et rappelons-nous que d'après l'Éq. 7.34,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\tilde{Q}}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad \text{si bien que} \quad \tilde{Q} = -2\epsilon_r \epsilon_0 \omega B \quad (17.51)$$

Ainsi le disque de cuivre porte-t-il une *charge volumique* constante et uniforme de densité $\tilde{Q}$.

(1) Voir l'annexe E.

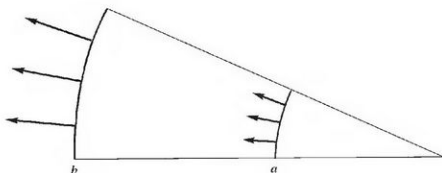


Figure 17.12 Portion du disque de Faraday.

Les flèches représentent le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, qui est proportionnel à la position radiale ρ , et $\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ est positive.

Mais nous avons vu au paragraphe 4.5.4 que, en régime stationnaire, la densité volumique de charge à l'intérieur d'un conducteur est *nulle* ! Y a-t-il une contradiction ? Non, parce que la densité $\tilde{Q}$ ci-dessus est fonction de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ et qu'au paragraphe 4.5.4 on ne considère pas les champs magnétiques.

Par ailleurs, pourquoi la charge est-elle *négative* ? La figure 17.12 montre pourquoi. Rappelons-nous que $\mathbf{B}$ est uniforme sur la surface du disque et que $v = \omega\rho$. Alors $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}|$ augmente avec le rayon, comme sur la figure. Pour l'élément de volume indiqué le flux de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est plus grand au rayon externe qu'au rayon interne, on a donc un flux net de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ vers l'extérieur et $\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ est positive. Ainsi, il se forme vers l'intérieur un flux d'électrons de conduction qui cesse rapidement à cause du champ électrique résultant $\mathbf{E}$.

Notons que la densité volumique de charge $\tilde{Q}$ est indépendante de la conductivité σ et du courant I . Elle est négative si la vitesse angulaire se trouve dans la direction positive par rapport à $\mathbf{B}$, comme ci-dessus. Nous reviendrons à ce phénomène important dans la partie 17.6.

Les moteurs homopolaires sont construits comme les générateurs homopolaires. Une tension est appliquée entre les bornes de la Fig. 17.10(a), donc $|E| > |vB|$. Les moteurs homopolaires sont aussi des appareils à basse tension et à haut courant, et fonctionnent généralement en courant continu. Ils produisent des couples de torsion élevés à faible vitesse et sont appropriés, par exemple, pour la propulsion des navires. Le courant est alors fourni par un moteur générateur diesel à travers un transformateur démultiplicateur et un circuit redresseur. Le courant qui s'écoule radialement à travers le disque fournit le couple de torsion. Là encore, la force magnétique $Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ travaille.

Exemple : La tache solaire, vue comme une dynamo auto-excitée⁽¹⁾

Les taches solaires sont des structures magnétiques excessivement complexes sur le Soleil. Voir la Fig. 17.14. Elles ont été découvertes par Galilée (1564-1642) qui a prouvé qu'elles n'étaient pas dues à des planètes tournant devant le Soleil, comme

(1) L'exemple du paragraphe 3.4.1 discute le potentiel électrostatique à la surface du Soleil et on trouve un exemple sur les boucles de la couronne solaire en partie 14.2.

on le croyait à l'époque. La découverte provoqua un scandale, car comment un corps parfait comme le Soleil pouvait-il avoir des taches ?

Le diamètre de la région centrale obscure, appelée l'*ombre*, varie beaucoup mais vaut typiquement 5 à 10 Mm. (Le diamètre de la Terre vaut environ 13 000 km.) Le champ magnétique est approximativement vertical et, au centre, B vaut quelques dixièmes de tesla, ce qui correspond à peu près au champ entre les pôles d'un électroaimant. Il y a deux types de taches, avec B orienté soit vers le haut soit vers le bas et couplé d'une manière inconnue au-dessous de la surface. Des milliers d'articles ont été écrits sur les taches solaires, et il s'en écrit environ 150 par an actuellement.

On observe que le plasma photosphérique coule dans la tache comme en Fig. 17.13 puis revient finalement à la surface. La densité du plasma augmente avec la profondeur.

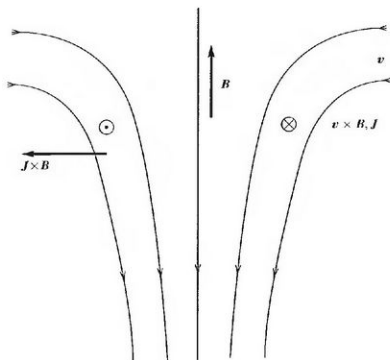


Figure 17.13 Section d'une tache solaire. La photosphère est approximativement au niveau du haut de la flèche de B .

Le plasma s'écoule vers le bas, et sa vitesse n'est pas seulement vers le bas mais aussi vers l'intérieur car la densité croît avec la profondeur. Supposons un champ originel B orienté vers le haut. Alors le champ $v \times B$ est azimutal, dans la direction indiquée. Le champ magnétique de ce courant induit est orienté dans la même direction que le champ originel. Il y a donc une rétroaction positive : plus le champ est grand plus il croît vite ! La densité de force magnétique $J \times B$ est dirigée vers l'extérieur, comme dans un solénoïde.

Supposons que le champ soit vertical et orienté vers le haut comme sur la figure, et que la tache soit circulaire. La vitesse du plasma vers l'intérieur donne un champ $v \times B$ azimutal orienté comme sur la figure. Le champ magnétique du courant induit, de densité $J = \sigma(v \times B)$, est proportionnel à B et est orienté vers le haut, dans la même

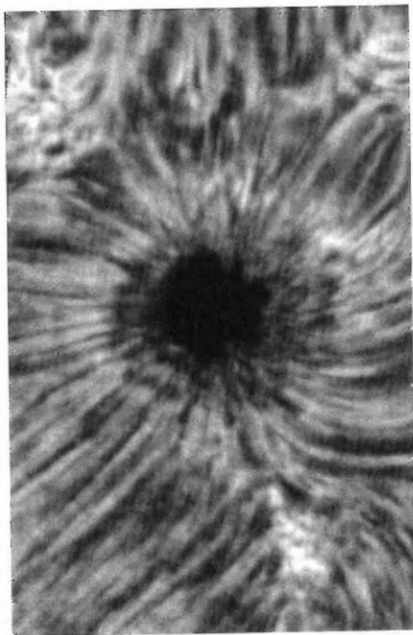


Figure 17.14 Une tache solaire photographiée près du centre du disque, au centre de la raie α de H ($\lambda = 656,3 \text{ nm}$).

La région centrale obscure est l'*ombre*, tandis que l'*anneau strié* autour est la *pénombre* à proximité, et la *superpénombre* plus loin. La figure couvre une surface de 70 par 44 secondes d'arc, soit environ 51 000 par 32 000 km, une seconde d'arc valant 725 km sur le Soleil. À titre de comparaison, le diamètre de la Terre est d'environ 13 000 km. Il existe une grande variété de dimensions et de formes des taches solaires.

L'*ombre*, qui est le haut du tube de flux magnétique, est loin d'être uniforme; une exposition plus longue révèle une structure complexe avec des *points d'ombre*, des *ponts de lumière*, etc. Les rayures brillantes et sombres de la pénombre et de la superpénombre sont encore l'objet de débats.

Cette image a été obtenue avec le télescope solaire R.B. Dunn au National Solar Observatory, au Sacramento Peak NM, par Eugenia Christopoulou de l'Université de Patras, Grèce, Alexander Georgakilas de l'Institut Astronomique, Observatoire National d'Athènes, Grèce, et Serge Koutchmy de l'Institut d'Astrophysique de Paris, Paris, France.

direction que le champ originel considéré. Si le champ originel est orienté vers le bas plutôt que vers le haut, alors $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ change de signe et le courant induit s'écoule encore dans la même direction que le champ originel. Ce type de configuration magnétique dans un plasma en convection est connu comme un *tube de flux magnétique* [39].

Une tache solaire est donc une *dynamo auto-excitée* [37] qui engendre un champ magnétique de même signe que le champ originel. La réaction est positive et, à première vue, B augmente exponentiellement avec le temps. Bien évidemment, B ne devient pas infini, mais tend plutôt vers une valeur asymptotique qui dépend de la puissance des forces de convection [31]. Observons que la force magnétique, de densité $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, est orientée radialement vers l'extérieur et freine la vitesse du plasma vers l'intérieur.

La force magnétique vers l'extérieur (Paragraphe 17.4) est compensée par le gradient de pression : la pression de gaz est *plus faible* à l'intérieur du tube de flux qu'à l'extérieur. En effet, on a montré que, idéalement, la somme de la pression magnétique et de la pression du gaz est indépendante du rayon [39].

Une question majeure est : pourquoi l'ombre est-elle sombre comparée à la photosphère voisine ? Une explication est que la pression y est plus faible, comme nous venons de le dire, et qu'ainsi il y a moins d'atomes excités susceptibles d'émettre. Le courant azimuthal chauffe le gaz, car le plasma a une conductivité finie, mais la densité de puissance Joule est négligeable [34]. Plusieurs autres explications ont été proposées [58]. Voir aussi Lorrain et Koutchmy [35, 36].

Exemple : Champs magnétiques naturels. Le cas de la Terre

L'exemple précédent a montré comment la convection du plasma solaire engendre les champs magnétiques des taches solaires. Il existe certainement dans la nature beaucoup d'autres types de dynamos auto-excitées dans les fluides conducteurs en convection.

Le principe général est que, une fois donné un champ originel, le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ de l'Éq. 17.36 donne un courant qui, sous certaines conditions, produit un champ magnétique *de même polarité que le champ originel*. Les forces magnétiques sont celles de la partie 17.4.

Les champs magnétiques dans la nature sont donc de deux types : ceux associés à des dynamos auto-excitées dans des fluides conducteurs en convection et ceux associés à des minerais magnétiques.

La Terre a un rayon de 6400 km, et son noyau a un rayon de 3500 km. Voir la Fig. 17.15. Le noyau est composé en grande partie de fer, mais il est non-magnétique car sa température est d'environ 3100 K à la surface, et plus à l'intérieur. (La *température de Curie*, au-dessus de laquelle le fer est non-magnétique est d'environ 800°C.) Le noyau externe, entre les rayons 3500 km et 1200 km, est liquide, et sa conductivité est estimée à environ 3×10^5 S/m, soit environ 1/200^e de la conductivité du cuivre à température ambiante.

Comme la densité du noyau liquide externe n'est pas uniforme à cause des gradients de température et des gradients chimiques, le liquide est en convection sous

l'action combinée des forces gravitationnelles, centrifuges et de Coriolis. C'est cette convection qui engendre le champ magnétique terrestre principal [30].

Il existe probablement d'innombrables dynamos auto-excitées de beaucoup de types différents dans le noyau terrestre, toutes plus ou moins couplées. Il est certain que le champ à la surface du noyau est largement plus complexe que celui à la surface de la terre. La dépendance temporelle aussi est extrêmement différente : à la surface, on ne voit que les composantes de fréquences les plus basses car la croûte terrestre et le *manteau*, qui est juste au-dessous, agissent comme des écrans conducteurs (Partie 22.6).

La composante dipolaire ne rend compte que de 80 % du champ magnétique total à la surface. Le pôle *Sud magnétique* est proche du pôle *Nord géographique*. Ainsi, dans l'hémisphère Nord, **B** est orienté vers le Nord et vers le bas ; dans l'hémisphère Sud, **B** est orienté vers le Nord et vers le haut. L'axe de symétrie de la composante dipolaire et l'axe de rotation forment un angle d'environ 11° , et ces axes sont décalés : le champ magnétique est perpendiculaire à la surface en $78,1^\circ \text{ N}$, $256,3^\circ \text{ E}$ et en $64,9^\circ \text{ S}$, $138,9^\circ \text{ E}$ [28, 41, 50]. Au siècle dernier, le pôle *Sud magnétique* s'est déplacé vers le Nord de 1 000 km, et migre à présent vers le Nord à la vitesse de 20 km/an.

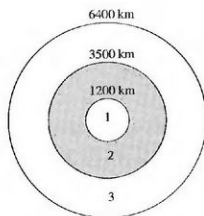


Figure 17.15 Section de la Terre.

1. Noyau interne solide. 2. Noyau externe liquide. 3. Manteau.

Le champ magnétique moyen a diminué de 1 % sur les 10 dernières années. À première vue c'est alarmant, car le champ magnétique terrestre agit comme un écran contre les rayons cosmiques, la plupart des particules chargées étant déviées par la force $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Sans cet écran, la vie pourrait-elle disparaître ? Certainement pas, car la polarité du champ magnétique terrestre a changé peut-être 100 fois au cours des 80 millions d'années passées, probablement en laissant la terre sans son écran à chaque changement, et la vie continue — mais il y a eu de nombreuses extinctions en masse dans le passé ! Voir *Physics World* de février 1999.

Voir le problème 22.2 concernant la Terre comme planète habitable.

Cf. exercice 17.17.

17.6 CHARGES ÉLECTROSTATIQUES DE VOLUME À L'INTÉRIEUR DE CONDUCTEURS EN MOUVEMENT DANS DES CHAMPS MAGNÉTIQUES

Au paragraphe 4.5.4 nous avons vu que, de manière générale, les charges électrostatiques dans les conducteurs résident uniquement sur la surface. Mais rappelons que d'après l'Éq. 17.51, dans le cas du disque de Faraday, la densité *volumique* de charge nette n'est pas nulle.

Nous montrons maintenant que la densité volumique de charge n'est en général pas nulle quand un conducteur se déplace dans un champ magnétique [28]. Étonnamment, ce phénomène important est peu connu.

Supposons que la conductivité σ soit uniforme, et prenons la divergence de l'Éq. 17.36 :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \sigma [\operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{div} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (17.52)$$

À gauche on a la divergence de la densité de courant libre, qui est égale à $-\partial \rho_l / \partial t$, d'après l'Éq. 7.10. Supposons maintenant que l'état est stationnaire. Alors le membre de gauche est nul.

Substituons ensuite l'Éq. 7.34 à droite. Alors

$$0 = \sigma \left[\frac{\rho_l}{\epsilon_r \epsilon_0} + \operatorname{div} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \quad (17.53)$$

et

$$\rho_l = -\epsilon_r \epsilon_0 \operatorname{div} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.54)$$

C'est la densité volumique de charge électrique dans un conducteur en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ magnétique $\mathbf{B}$. On pourrait aussi écrire simplement ρ , comme dans l'Éq. 17.51, au lieu de ρ_l . Notons que la densité de charge électrique est indépendante de σ .

Si σ n'est pas uniforme, ou si l'hypothèse de l'état stationnaire n'est pas valable, alors ρ_l est donnée par des expressions plus complexes, mais elle n'est pas nulle en général.

L'existence des ces charges volumiques provient du fait que le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ balaie les électrons de conduction vers l'intérieur. Dans une région où $\operatorname{div} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ est positive, les électrons de conduction vont vers l'intérieur et la région devient négative. Mais si la divergence est négative, alors des électrons sortent et la région devient positive. Ainsi ρ_l et $\operatorname{div} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ sont de signes opposés, comme ci-dessus.

Évidemment, $\rho_l = 0$ seulement dans des circonstances exceptionnelles. En outre, les charges de surface semblent inévitables. Donc il est douteux que le potentiel électrique V , et en conséquence $\mathbf{grad} V$, et donc $\mathbf{E}$ dans l'Éq. 17.36, puissent jamais être nuls en présence d'un champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sur un conducteur de taille finie.

Les charges électriques de surface et de volume jouent un rôle essentiel chaque fois que des conducteurs se déplacent dans des champs magnétiques, car leurs $\mathbf{E}$ annulent tout ou partie du $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ de l'Éq. 17.36.

Si $\mathbf{E}$ annule totalement $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, alors il n'y a ni courant induit, ni champ magnétique induit et le champ net est simplement le champ appliqué. Alors les lignes de champ magnétique ne sont pas affectées par le conducteur en mouvement.

Mais si $\mathbf{E}$ n'annule que partiellement $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, comme dans le disque de Faraday de la partie 17.5, alors il existe un courant induit et un champ magnétique induit qui s'ajoute au champ appliqué externe.

17.7 RÉSUMÉ

La force sur une charge Q en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ vaut

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.1)$$

C'est la *force de Lorentz*. Le terme $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est la *force magnétique*.

Les porteurs de charge s'écoulant le long d'un conducteur situé dans un champ magnétique tendent à dériver latéralement à cause de la force magnétique. C'est l'*effet Hall*.

La *force magnétique* par unité de longueur sur un fil parcouru par un courant est $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$. La force nette totale sur un circuit fermé est donc

$$\mathbf{F} = I \oint_C \mathbf{dl} \times \mathbf{B} \quad (17.17)$$

La force magnétique exercée par un circuit fermé a sur un circuit fermé b est

$$\mathbf{F}_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \int_a \int_b \mathbf{dl}_a \times \frac{\mathbf{dl}_b \times \mathbf{r}}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \mathbf{r} \frac{\mathbf{dl}_a \cdot \mathbf{dl}_b}{r^2} \quad (17.21)$$

Par définition, $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/(A.m)}$. La force par mètre entre des fils parallèles parcourus par le même courant I et séparés par une distance D vaut alors $2 \times 10^{-7} I^2 / D$. La force est attractive si les courants s'écoulent dans la même direction.

La *force magnétique exercée sur une distribution volumique de courant* est

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (17.29)$$

La *pression magnétique* sur un conducteur, pour un champ magnétique B d'un côté et un champ nul de l'autre côté, est

$$p_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (17.33)$$

La *loi d'Ohm généralisée* s'applique à un corps de conductivité σ en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$ dans des champs $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{J} = \sigma [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (17.36)$$

Les cinq variables peuvent être fonctions des coordonnées spatiales et du temps. Un conducteur qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ $\mathbf{B}$ porte une densité *volumique* de charge électrostatique

$$\rho_l = -\epsilon_r \epsilon_0 \text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.54)$$

Cette expression est valable pour des conducteurs homogènes en conditions stationnaires.

EXERCICES

(R) 17.1 Électrons dans la nébuleuse du Crabe⁽¹⁾

Dans la nébuleuse du Crabe se trouvent un champ magnétique d'environ 2×10^{-8} T et des électrons dont l'énergie vaut environ 2×10^{14} eV.

- (a) Trouver le rayon de giration. Comparer ce rayon avec celui de l'orbite terrestre (voir l'annexe E.2).
 (b) Combien de temps met un électron pour faire un tour, en jours ?

(R) 17.2 Accélération d'un électron dans un champ $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ ⁽¹⁾

(a) Montrer que l'équation du mouvement pour une particule de masse au repos m_0 , de charge Q et de vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ est

$$\gamma m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = Q \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \right)$$

Si $\mathbf{E}$ est nul et $\mathbf{B}$ est statique,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \frac{Q\mathbf{B}}{m} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_c$$

et les électrons décrivent un cercle à la pulsation $\omega_c = QB/m$, appelée *fréquence cyclotron*.

(b) Un électron de 12 MeV se déplace dans la direction positive de l'axe z dans un champ $\mathbf{E} = 1,00 \times 10^6 \hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{B} = 1,00 \hat{\mathbf{x}}$.

Calculer son accélération. La masse au repos d'un électron est $5,11 \times 10^5$ eV.

17.3 Mouvement d'une particule chargée dans des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ uniformes et perpendiculaires

Une particule de charge Q part au repos à l'origine dans une région où $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ et $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.

- (a) Trouver deux équations différentielles simultanées pour v_x et v_y .
 (b) Trouver v_x et v_y . On posera $\omega_c = BQ/m$. C'est la *fréquence cyclotron*. On prendra aussi $v_x = 0$, $v_y = 0$ à $t = 0$. Il y aura deux constantes d'intégration.
 (c) Trouver $x(t)$ et $y(t)$. On prendra $x = 0$, $y = 0$ à $t = 0$.
 (d) Décrire le mouvement de la charge.
 (e) Tracer la trajectoire pour $\omega_c = 1$ rad/s, $E/B = 1$ m/s.
 (f) Montrer que la particule dérive à la vitesse $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. Notons que cette vitesse est indépendante de la nature de la particule et de son énergie. Dans un plasma, les charges des deux signes dérivent à la même vitesse et le courant net de dérive est nul.
 (g) Calculer la vitesse de dérive d'un proton à l'équateur sous les actions combinées de la gravité et du $\mathbf{B}$ de la Terre. On supposera que $B = 4 \times 10^{-5}$ T, dans la direction horizontale. On rappelle que dans la région du pôle Nord géographique il y a le pôle Sud magnétique. Donc à l'équateur $\mathbf{B}$ est orienté vers le Nord.
 (h) Dans quelle direction dérive un électron à l'équateur ?

17.4 Photomultiplicateur à champs croisés

La figure 17.16 montre le principe de fonctionnement d'un photomultiplicateur à champs croisés. Une enceinte sous vide, étanche, contient deux plaques parallèles appelées *dynodes*. Elles

- (1) Ce problème nécessite des connaissances en relativité.

fournissent le champ électrique E . Un aimant permanent extérieur lui superpose le champ magnétique B .

Un photon éjecte un photoélectron de basse énergie. L'électron est accéléré vers le haut mais le champ magnétique le repousse vers la dynode négative. À ce point il éjecte quelques électrons secondaires et le processus se répète. À la fin, les électrons parviennent sur le collecteur C .

On veut trouver la valeur de a .

(a) Trouver les équations différentielles pour v_x et v_y . La trajectoire n'est pas circulaire. On peut simplifier le calcul en posant $Be/m = \omega_c$, la fréquence cyclotron.

(b) Trouver v_x en fonction de y .

(c) On peut maintenant trouver y , puis x , en fonction de t . On prendra $t = 0$, $dx/dt = 0$ et $dy/dt = 0$ en $x = 0$, $y = 0$. On doit trouver que la trajectoire est une cycloïde.

(d) Quelle est la valeur maximale de y ?

(e) Quelle est la valeur de a ?

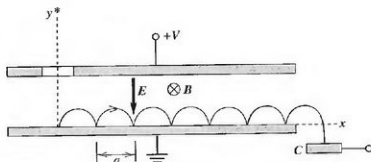


Figure 17.16

R 17.5 Accélération de Fermi⁽¹⁾

Fermi proposa le mécanisme suivant, appelé depuis *accélération de Fermi*, pour expliquer l'existence de particules de très haute énergie dans l'espace. Imaginons une masse de plasma qui voyage à une certaine vitesse $v_x \hat{x}$. Le plasma porte un courant et crée donc un champ magnétique. Imaginons maintenant une particule qui voyage en direction opposée à une vitesse $-v_a \hat{x}$, v_c et v_a étant toutes deux positives. La particule est défléchie dans le champ magnétique et elle acquiert une vitesse $v_b \hat{x}$, où v_b est également positive.

On pose $v_c = v_a = c/2$. Calculer les valeurs initiale et finale de γ .

17.6 Pompes électromagnétiques

Les pompes électromagnétiques sont pratiques pour pomper des fluides fortement conducteurs, par exemple le sodium liquide dans certains réacteurs nucléaires.

La densité de courant de conduction dans un métal liquide de conductivité σ qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ est $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Toutes les grandeurs sont mesurées par rapport à un référentiel fixe. La force magnétique par unité de volume est alors $\mathbf{F}' = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$. En général, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux comme en Fig. 17.17.

(a) Montrer que la densité de force $\mathbf{F}'$ vaut $\sigma B^2(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, où $\mathbf{u} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ et $\mathbf{v}$ est la vitesse du fluide. La force magnétique tend à rendre $\mathbf{v}$ égale à $\mathbf{u}$.

(b) Calculer l'efficacité, en supposant qu'un aimant permanent fournit le champ magnétique. On négligera tous les effets de bord.

(1) Ce problème nécessite des connaissances en relativité.

17.7 L'effet Hall

Dans ce problème on étudie l'effet Hall de plus près. On suppose que les porteurs de charge sont des électrons de charge $-e$. Leur masse effective est m^* . La *masse effective* prend en compte les forces périodiques exercées sur les électrons lorsqu'ils voyagent à travers le réseau cristallin. En général, la masse effective est *inférieure* à la masse d'un électron isolé.

La force sur un électron est $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, où $\mathbf{E}$ a deux composantes, le champ appliqué E_x et le champ de Hall E_y . La vitesse de dérive moyenne vaut

$$\mathbf{v} = \frac{\mathcal{M}\mathbf{F}}{e} = -\mathcal{M}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

où $\mathcal{M}$ est la mobilité (Paragraphe 4.5.2). La loi $\mathbf{F} = m^*\mathbf{a}$ n'est valable que pour des collisions avec le réseau cristallin.

(a) Montrer que

$$v_x = -\mathcal{M}(E_x + v_y B), \quad v_y = -\mathcal{M}(E_y - v_x B), \quad v_z = 0$$

(b) Montrer que

$$J_x = Ne\mathcal{M} \frac{E_x - \mathcal{M}E_y B}{1 + \mathcal{M}^2 B^2}, \quad J_y = Ne\mathcal{M} \frac{E_y + \mathcal{M}E_x B}{1 + \mathcal{M}^2 B^2}$$

Donc, si $J_y = 0$,

$$E_y = -\mathcal{M}E_x B \quad \text{ou} \quad V_y = \frac{b}{a}\mathcal{M}V_x B$$

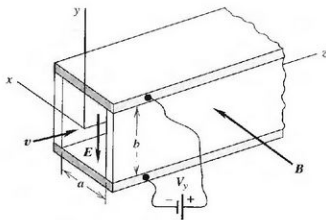


Figure 17.17

On notera que la tension de Hall V_y est proportionnelle au produit de la tension appliquée V_x par B . L'effet Hall est donc utile pour multiplier une variable par une autre.

Quand il est connecté de cette façon, l'élément Hall a quatre bornes et il est appelé *générateur Hall* ou *sonde à effet Hall*.

(c) Calculer V_y pour $b = 1$ mm, $a = 5$ mm, $\mathcal{M} = 7 \text{ m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ (antimoniure d'indium), $V_x = 1$ V, $B = 10^{-4}$ T.

(d) Montrer que, si $E_y = 0$, alors

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \mathcal{M}^2 B^2$$

où R_0 est la résistance de la sonde dans la direction x quand $B = 0$ et ΔR est l'augmentation de la résistance sous l'effet du champ magnétique.

17.8 Débitmètre électromagnétique

Le *débitmètre électromagnétique* est l'inverse de la pompe électromagnétique (Problème 17.6). Il fonctionne de la façon suivante. Voir la Fig. 17.18. Un fluide conducteur s'écoule dans un tuyau non-conducteur entre les pôles d'un aimant. Des électrodes en contact avec le fluide, de chaque côté du tube, mesurent le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, et donc la quantité de fluide qui s'écoule dans le tuyau par seconde. C'est un effet Hall, sauf que dans ce cas les ions des deux signes se déplacent avec le fluide dans la même direction.

Faraday essaya de mesurer la vitesse de la Tamise de cette manière en 1832. Le champ magnétique était évidemment celui de la Terre.

En l'absence de turbulences, la vitesse d'un fluide dans un tube de rayon R est de la forme $v = v_0(1 - r^2/R^2)$. Le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ dans le fluide n'est donc pas uniforme. Cela produit des courants électriques circulants avec $\mathbf{J} = \sigma(-\text{grad } V + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Le potentiel V_0 provient des charges qui s'accumulent sur les électrodes ainsi que de la densité volumique de charge ρ .

(a) Dessiner une section du tube, en montrant qualitativement, au moyen de flèches de différentes longueurs, le module et la direction de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

(b) Dessiner une autre section, en montrant les lignes du flux de courant. Le courant consommé par les électrodes est négligeable.

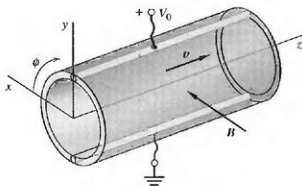


Figure 17.18

(c) On négligera les effets de bords en posant $\partial/\partial z = 0$. Utiliser le fait que $\text{div } \mathbf{J} = 0$ pour montrer que

$$\Delta V = B \frac{\partial v}{\partial y} = B \frac{\partial v}{\partial r} \sin \phi$$

Puisque ce laplacien est égal à $-\rho/\epsilon_0$, la densité volumique de charge ρ est nulle sur l'axe, où $\partial v/\partial r = 0$, et en $\phi = 0$ et π .

(d) Poser $V = V' \sin \phi$, où V' est indépendant de ϕ , et montrer que

$$\frac{d^2 V'}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV'}{dr} - \frac{V'}{r^2} = B \frac{dv}{dr}$$

(e) On peut résoudre cette équation différentielle de la façon suivante : (1) exprimer le membre de gauche comme une dérivée, (2) intégrer, (3) multiplier les deux membres par r , (4) exprimer les deux membres comme des dérivées, (5) intégrer. Il reste alors deux constantes d'intégration ; l'une d'entre elles est facile à éliminer. On peut trouver la valeur de l'autre en se rappelant que $J_z = 0$ en $x = 0$, $y = R$ si le voltmètre ne consomme pas de courant.

Noter que la tension de sortie est indépendante de la conductivité du fluide si on suppose que le voltmètre ne consomme pas de courant.

Trouver la tension de sortie en fonction du volume τ de fluide qui s'écoule en une seconde.

(f) On a négligé les effets de bord dans la région où le fluide entre et sort du champ magnétique. Tracer les lignes de flux de courant pour ces deux régions. Ces courants réduisent quelque peu la tension de sortie.

17.9 Focalisation magnétique

De nombreux appareils utilisent des faisceaux fins de particules chargées. Le tube cathodique, utilisé dans les téléviseurs et les oscilloscopes, en est l'exemple plus connu. Le microscope électronique est un autre exemple. Dans ces appareils le faisceau de particules est focalisé et défléchi de façon analogue à un faisceau lumineux dans un instrument d'optique.

Les faisceaux de particules chargées peuvent être focalisés et défléchis par des champs électriques de forme appropriée. Le faisceau d'électrons dans un tube de télévision est focalisé par des champs électriques et défléchi par des champs magnétiques. Les faisceaux peuvent être défléchis le long d'un chemin circulaire dans un champ magnétique. Voyons comment ils peuvent être focalisés par un champ magnétique.

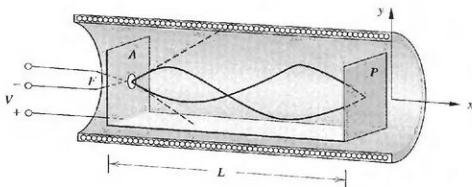


Figure 17.19 Focalisation d'un faisceau d'électrons dans un champ magnétique uniforme.

F est un fil chaud, A est l'anode, et le faisceau d'électrons est focalisé en P . La tension d'accélération vaut V . Le fil est alimenté par un générateur de tension de quelques volts connecté entre les deux bornes supérieures. Quand le solénoïde n'est pas alimenté, le faisceau diverge comme indiqué par les lignes pointillées.

La figure 17.19 représente un canon à électrons situé à l'intérieur d'un long solénoïde. Les électrons qui sortent du trou dans l'anode ont une faible composante transverse de vitesse et, s'il n'y a pas de courant dans le solénoïde, ils s'étalent comme sur la figure. Voyons ce qui se passe quand on allume le champ magnétique.

Soient v_x et v_y les composantes de vitesse au niveau du trou, avec $v_x^2 \gg v_y^2$. Alors

$$eV = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \approx \frac{1}{2}mv_x^2$$

Si $v_y = 0$, l'électron continue parallèlement à l'axe. Si $v_y \neq 0$, l'électron suit un parcours hélicoïdal à la vitesse angulaire ω . Après un tour complet, il est revenu sur l'axe. Ainsi, si B est bien réglé, tous les électrons convergent au même point P , comme sur la figure, et forment l'image du trou sur l'anode.

(a) Montrer que cela se produit si

$$B = 2^{3/2} \pi \frac{(mV/e)^{1/2}}{L}$$

(b) Calculer le nombre d'ampère-tours par mètre IN' dans le solénoïde, pour une tension d'accélération V de 10 kV et une distance L de 0,5 m.

En pratique, la focalisation magnétique est réalisée avec des bobines courtes et pas avec des solénoïdes.

17.10 Le spectromètre de masse de Dempster

La figure 17.20 représente un *spectromètre de masse de Dempster*. Un ion décrit un cercle et la force centripète est $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Le champ magnétique est fourni par un électroaimant.

(a) Montrer que

$$m = QR^2 B^2 / (2V)$$

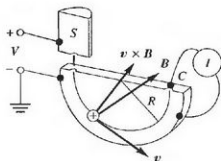


Figure 17.20 Section d'un spectromètre de masse de type Dempster.

Les ions produits par la source S sont collectés en C . Les ions sont accélérés par une différence de potentiel V et décrivent un demi-cercle de rayon R . Le champ magnétique B est perpendiculaire au plan de la trajectoire.

(b) Dans une expérience particulière, un spectromètre de masse de ce type a été utilisé pour des ions d'hydrogène H_1^+ , H_2^+ , H_3^+ avec $R = 60,0$ mm et $V = 1\,000$ V. L'ion H_1^+ est un proton, H_2^+ est constitué de deux protons et d'un électron et H_3^+ de trois protons et deux électrons.

Trouver la valeur de B pour ces trois ions.

(c) Tracer une courbe de R en fonction de m dans les conditions ci-dessus, de l'hydrogène à l'uranium.

Utiliserez-vous ce type de spectromètre pour des ions lourds ? Pourquoi ?

17.11 Plasmas à haute température

Une méthode pour injecter et piéger des ions dans un plasma à haute température est illustrée en Fig. 17.21. Des ions moléculaires de deutérium, D_2^+ (deux deutérons plus un électron, le deutéron étant composé d'un proton et d'un neutron), sont injectés dans un champ magnétique et sont dissociés en paires d'ions D^+ (deutérons) et en électrons dans un arc électrique de haute intensité. Le rayon de la trajectoire est réduit et les ions sont piégés.

(a) Calculer le rayon de courbure R pour des ions D_2^+ d'énergie cinétique 600 keV dans un B de 1,00 T.

(b) Calculer R pour les ions D^+ produits dans l'arc. Les ions D^+ ont la moitié de l'énergie cinétique des ions D_2^+ .

17.12 Force magnétique

Calculer la force magnétique sur un arc de 50 mm de long parcouru par un courant de 400 A dans une direction perpendiculaire à un champ $\mathbf{B}$ uniforme de 5×10^{-2} T.

Les interrupteurs de fort courant comprennent souvent des bobines qui engendrent un champ magnétique afin de souffler l'arc qui se forme lorsque le contact s'ouvre.

Ⓡ 17.13 Force magnétique

(a) Trouver la densité de courant nécessaire pour faire léviter un fil de cuivre dans le champ magnétique terrestre à l'équateur.

On suppose un champ de 10^{-4} T. La densité du cuivre est $8,9 \times 10^3$ kg/m³.

(b) Le fil chauffera-t-il ?

La conductivité du cuivre est $5,80 \times 10^7$ S/m.

(c) Dans quelle direction le courant doit-il s'écouler ?

(d) Que se passerait-il si l'expérience était effectuée à l'un des pôles magnétiques ?

17.14 Force magnétique

Calculer la force due au champ magnétique terrestre sur un fil horizontal de 100 m de long parcouru par un courant de 50 A vers le nord.

On prendra $B = 5 \times 10^{-5}$ T, orienté vers le bas à un angle de 70 degrés par rapport à l'horizontale.

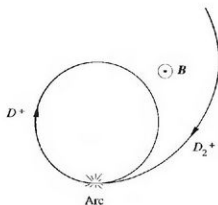


Figure 17.21 Méthode pour injecter et piéger des ions D^+ .

17.15 Force magnétique

Montrer que la force totale sur un circuit fermé parcouru par un courant I dans un champ magnétique uniforme est nulle.

17.16 L'effet de striction sur un conducteur

La densité de force magnétique sur un conducteur est $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$.

Si la densité de force est énorme, alors tout solide peut être traité comme un fluide, et si p est la pression, $\text{grad } p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$.

(a) Un fil conducteur de rayon R est parcouru par un courant I . À la surface, $p = 0$. Montrer qu'à un rayon r , $p = [\mu_0 I^2 / (4\pi^2 R^2)] (1 - r^2/R^2)$. La force magnétique comprime le fil.

(b) Calculer la pression instantanée sur l'axe pour un courant de 30 kA dans un fil de rayon 1 mm. Le fil, évidemment, se vaporise. De tels courants sont obtenus en déchargeant des gros condensateurs de faible inductance.

(c) Montrer que, avec un conducteur tubulaire de rayon interne R_1 et de rayon externe R_2 , la pression dans la cavité est donnée par

$$P = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R_2^2} \frac{1 - (R_1/R_2)^2 [1 + 2 \ln(R_2/R_1)]}{[1 - (R_1/R_2)^2]^2}$$

Des pressions transitoires approchant les 10^6 atm ont été obtenues de cette façon.

Un type de source de rayons X fait imploser des tubes fins de plastique aluminé en y déchargeant 1 MJ. Le plasma résultant produit un pulse de radiation de 150 kJ.

17.17 Moteur homopolaire

(a) Trouver la puissance mécanique en fonction de ω pour un moteur homopolaire, pour une tension appliquée donnée V . Voir la Fig. 17.10(a).

On peut y parvenir en écrivant d'abord $P = \omega T = \omega B(b^2 - a^2)I/2 = \omega AI$, où A est une constante, puis en exprimant I en fonction de ω .

(b) Tracer une courbe de P en fonction de ω .

(c) Montrer que la puissance mécanique est maximale à la vitesse angulaire

$$\omega_{\text{Puiss Max}} = V / [B(b^2 - a^2)] .$$

Chapitre 18

Champs magnétiques : la loi de l'induction de Faraday

La loi de l'induction de Faraday est sans doute la partie la plus subtile de la théorie de l'électromagnétisme. Cette loi combine deux phénomènes qui, à première vue, ne sont pas liés : si on déplace un conducteur dans un champ magnétique statique, alors il y a un courant induit (mais pas toujours, comme on l'a vu dans les parties 17.5 et 17.6), et si un conducteur stationnaire se trouve dans un champ dépendant du temps, alors il y a aussi un courant induit. Nous montrons que les deux phénomènes ne sont pas réellement distincts, mais la démonstration nécessite l'utilisation de la relativité.

On relie souvent les deux phénomènes en attribuant le courant induit à la « coupure du flux », mais cette explication de la loi est incomplète bien qu'utile, comme on le montre dans le premier exemple de la partie 18.3.

Ce chapitre démontre l'importance fondamentale du potentiel vecteur $\mathbf{A}$.

18.1 LA LOI DE L'INDUCTION DE FARADAY POUR LES CHAMPS $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. FORCE ÉLECTROMOTRICE INDUITE

Considérons un circuit fermé C qui se déplace globalement et qui se déforme de façon arbitraire dans un champ magnétique constant mais pas nécessairement uniforme, comme en Fig. 18.1. Alors, par définition, la *force électromotrice induite* est

$$\mathcal{V} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \quad (18.1)$$

Le signe négatif vient du fait que nous avons changé l'ordre cyclique des termes sous l'intégrale.

Or $\mathbf{v} \times d\mathbf{l}$ est l'aire balayée par l'élément $d\mathbf{l}$ en une seconde. Donc $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})$ est le taux auquel augmente le flux magnétique à travers le circuit à cause du mouvement de l'élément de circuit $d\mathbf{l}$. En intégrant sur le circuit complet, on trouve que la force électromotrice induite est proportionnelle au taux de variation du flux magnétique Φ à travers le circuit :

$$\mathcal{V} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (18.2)$$

Les directions positives pour $\mathcal{V}$ et Φ satisfont la règle du tire-bouchon. Le courant est le même que si le circuit contenait une pile de tension $\mathcal{V}$.

C'est la *loi de l'induction de Faraday pour les champs $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$* . Cette loi est importante. Pour ce qui concerne notre démonstration, elle est valable seulement pour des $\mathbf{B}$ constants, mais en fait elle est générale, comme on le verra dans la partie 18.2. Bien souvent Φ est difficile à définir ; on peut alors intégrer $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sur le circuit pour obtenir $\mathcal{V}$.

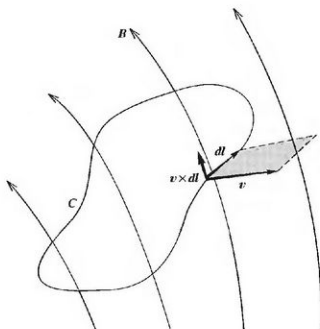


Figure 18.1 Circuit fermé C qui se déplace et se déforme de façon arbitraire dans un champ magnétique B constant.

L'élément $d\mathbf{l}$ se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ et balaye une surface $\mathbf{v} \times d\mathbf{l}$ en une seconde.

Si C est ouvert, comme en Fig. 18.2, alors le courant s'écoule jusqu'à ce que le champ électrique résultant de l'accumulation des charges annule exactement le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Il y a généralement des charges de surface mais, comme nous l'avons vu dans la partie 17.6, il y a aussi des charges volumiques à l'intérieur d'un conducteur qui se déplace dans un champ magnétique, à moins que $\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$.

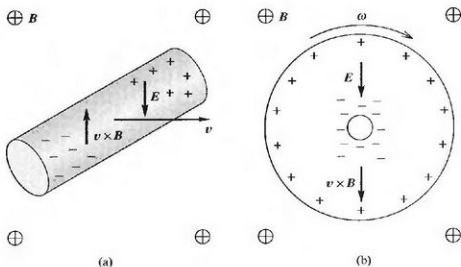


Figure 18.2 (a) Barre conductrice en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ magnétique $\mathbf{B}$. Le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est orienté vers le haut et pousse les électrons de conduction vers le bas. Le courant s'écoule jusqu'à ce que le champ électrique résultant $\mathbf{E}$ annule exactement le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ en chaque point. (b) Disque tournant dans un champ magnétique $\mathbf{B}$. Le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est orienté vers l'extérieur et pousse les électrons de conduction vers l'intérieur. Un courant radial s'écoule jusqu'à ce que $\mathbf{E}$ annule $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Voir l'exemple sur le disque de Faraday dans la partie 17.5.

Exemple : Un générateur naïf

Un générateur électrique transforme de l'énergie mécanique en énergie électrique, généralement en déplaçant des fils conducteurs perpendiculairement à un champ magnétique.

Le type de générateur le plus simple (et le moins pratique !) est celui de la Fig. 18.3. Le contact glisse vers la droite à une vitesse $\mathbf{v}$ telle que $v^2 \ll c^2$, où c est la vitesse de la lumière, dans un $\mathbf{B}$ constant et uniforme, normal à la feuille de papier. La résistance à l'extrémité gauche du circuit est R et celle du contact est R_c . Les fils horizontaux ont une résistance nulle.

La force électromotrice est

$$\mathcal{V} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = BDv \quad (18.3)$$

On a négligé le flux magnétique résultant du courant I lui-même. En d'autres termes, la résistance R est grande. Alors

$$I = \frac{BDv}{R + R_c} \quad (18.4)$$

Observons que le glissement de la barre vers la droite augmente le flux, mais que le courant induit I tend à le faire décroître. Ainsi la force électromotrice induite produit un courant dont le champ s'oppose à la variation du flux magnétique net à travers le circuit $abcd$. C'est la loi de Lenz. Si le circuit était supraconducteur, le flux resterait constant.

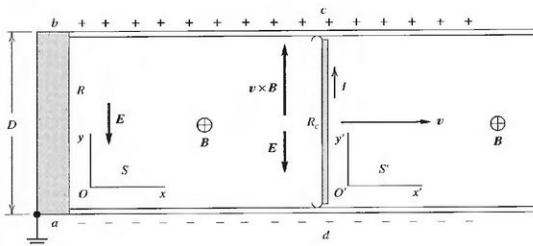


Figure 18.3 Générateur électrique naif.

Le champ magnétique B est constant et uniforme. En faisant glisser le contact vers la droite à la vitesse v on engendre un courant I dans la direction indiquée. La résistance de charge est R et le contact a une résistance R_c .

Dans un référentiel fixe S , la force sur un électron de conduction de charge Q à l'intérieur du contact vaut $Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Donc, dans le contact,

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \sigma(-\text{grad } V + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (18.5)$$

Calculons V dans le référentiel stationnaire S .

En b en Fig. 18.3, $V_b = IR$. Dans chacun des fils horizontaux, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ est finie. Puisque $\sigma \rightarrow \infty$, par hypothèse, alors $\mathbf{E} = 0$, $\text{grad } V = 0$ et

$$V_d = V_a = 0, \quad V_c = V_b = IR \quad (18.6)$$

À l'intérieur de R et R_c , avec l'axe y comme sur la figure,

$$V = IR \frac{y}{D} = \frac{vBR}{R + R_c} y \quad (18.7)$$

La tension V_c aux bornes de R_c est IR :

$$V_c = IR = I(R + R_c) - IR_c = vBD - IR_c \quad (18.8)$$

Cela signifie que le mouvement engendre une tension vBD dans le contact, tandis que son courant cause une chute de tension IR_c .

Supposons que l'on connecte un voltmètre aux bornes du contact comme en Fig. 18.4(a). Appelons sa résistance R_v avec $R_v \gg R_c$. Cela n'affecte pratiquement pas le courant I . Que lira-t-on sur le voltmètre ? Si le courant à travers le voltmètre est I_v , alors il affichera une tension $I_v R_v$, avec la polarité indiquée sur la figure.

Référons-nous maintenant à la Fig. 18.4(b). Évidemment, $I_v R_v = I_c R_c$ et le voltmètre mesure la chute de tension $I_c R_c$.

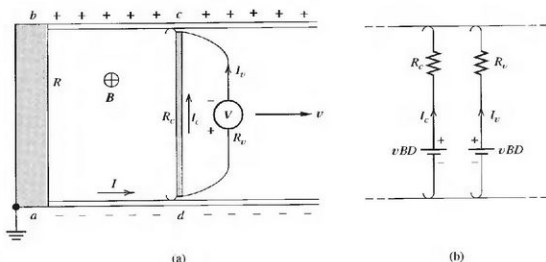


Figure 18.4 (a) Voltmètre V connecté aux bornes du contact dans le générateur de la Fig. 18.3. (b) Circuit équivalent.

Tout ce que nous savons du champ magnétique est que $\mathbf{B} = -B\hat{z}$; la distribution de courant qui engendre $\mathbf{B}$ n'est pas spécifiée. Posons

$$A_x = -nBy, \quad A_y = -(n+1)Bx \quad (18.9)$$

où n est un nombre sans dimension. On vérifie simplement que $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

Si $n = 0$, alors les courants qui donnent $\mathbf{B}$ sont tous verticaux. Si $n = -1$, ils sont tous horizontaux. Avec un solénoïde dont l'axe coïncide avec l'axe z , $n = -1/2$. Donc, dans R et R_c ,

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad (18.10)$$

$$= -\frac{vBR}{R+R_c} \hat{y} \quad (18.11)$$

La suite de cet exemple fait appel à la relativité. Voyons maintenant ce qui se passe à l'intérieur du contact, dans son référentiel propre S' . On suppose que $v^2 \ll c^2$, ce qui fait que $\gamma \approx 1$.

D'après la partie 13.4,

$$A'_x = A_x - \frac{vV}{c^2} = -nBy - \frac{v^2}{c^2} \frac{BR}{R+R_c} y \approx -nBy, \quad (18.12)$$

$$A'_y = A_y = -(n+1)Bx = -(n+1)Bvt, \quad (18.13)$$

$$V' = V - vA_x = \frac{vBR}{R+R_c} y + vnBy = \left(\frac{R}{R+R_c} + n \right) vBy \quad (18.14)$$

$$V'_c = \left(\frac{R}{R+R_c} + n \right) vBD \quad (18.15)$$

Notons que les valeurs de A' et de V' dépendent de la valeur de n . En d'autres termes, elles dépendent de la géométrie particulière des bobines sélectionnées pour créer B . Observons aussi l'apparition d'un terme $\partial A' / \partial t'$ dans S' .

Maintenant, comme nous le verrons dans l'Éq. 18.35,

$$\mathbf{E}' = -\text{grad}' V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t'} \quad (18.16)$$

où

$$\text{grad}' = \frac{\partial}{\partial y'} \hat{\mathbf{y}} = \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}}, \quad t' = t - \frac{v}{c^2} x = t - \frac{v^2}{c^2} t \approx t \quad (18.17)$$

Ainsi

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial V'}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\frac{\partial V'}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial A_y'}{\partial t} \hat{\mathbf{y}} \quad (18.18)$$

$$= \left[-\left(\frac{R}{R+R_c} + n \right) vB + (n+1)vB \right] \hat{\mathbf{y}} \quad (18.19)$$

$$= -\left(\frac{R}{R+R_c} - 1 \right) vB \hat{\mathbf{y}} = \frac{R_c}{R+R_c} vB \hat{\mathbf{y}} \quad (18.20)$$

En général, $-\partial A' / \partial t'$ n'est pas égale à $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

La variable n a disparu ! Nous pouvions nous y attendre, évidemment, car $\mathbf{E}'$ doit être indépendant de la configuration des bobines qui engendrent le champ magnétique donné.

Nous aurions aussi pu trouver directement $\mathbf{E}'$ en transformant simplement $\mathbf{E}$, avec $v^2 \ll c^2$:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{\parallel} + (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (18.21)$$

$$= \left(-\frac{vBR}{R+R_c} + vB \right) \hat{\mathbf{y}} = \frac{R_c}{R+R_c} vB \hat{\mathbf{y}} \quad (18.22)$$

comme ci-dessus. Cela montre que, dans le référentiel en mouvement du contact, $\mathbf{E}'$ est égal à $\mathbf{E}$ plus $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Le courant I' est égal à I , et l'affichage du voltmètre est le même pour un observateur dans S' que pour un observateur dans S .

Exemple : Un générateur de courant alternatif

La spire rectangulaire de la Fig. 18.5 tourne à une vitesse angulaire ω dans un $\mathbf{B}$ constant et uniforme. Nous calculons la force électromotrice induite $\mathcal{V}$, d'abord via $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, puis par $d\Phi/dt$.

1) Sur la partie droite de la spire,

$$b\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{\omega a}{2} Bb \sin \theta \hat{\mathbf{x}} = \frac{\omega abB}{2} \sin \omega t \hat{\mathbf{x}} \quad (18.23)$$

Sur le côté gauche on a la même force électromotrice induite, mais orientée vers le bas comme sur la figure. Sur les côtés supérieur et inférieur, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est perpendiculaire au fil. Cela pousse les électrons latéralement, augmentant ainsi la

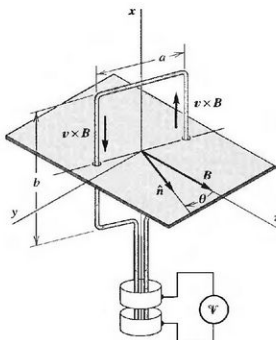


Figure 18.5 Spire tournant dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ constant et uniforme. Les anneaux glissants fournissent les contacts entre le voltmètre et la spire.

résistance imperceptiblement, mais $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ne contribue pas à la force électromotrice. Ainsi

$$\mathcal{V} = abB\omega \sin \omega t \quad (18.24)$$

Remarquons que la force électromotrice est nulle quand $\omega t = n\pi$, où n est un nombre entier. Alors $\mathbf{v}$ et $\mathbf{B}$ sont parallèles et $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est nul.

2) Le taux de variation du flux magnétique donne le même résultat :

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(abB \cos \omega t) = abB\omega \sin \omega t \quad (18.25)$$

Cf. exercices : 18.1 ; 18.2 ; 18.3 ; 18.4 ; 18.5.

18.2 LA LOI D'INDUCTION DE FARADAY POUR DES $\mathbf{B}$ VARIABLES. LE ROTATIONNEL DE $\mathbf{E}$

Imaginons maintenant deux circuits fermés et rigides comme en Fig. 18.6. Le circuit actif a est stationnaire tandis que le circuit passif b se déplace de façon arbitraire, disons en direction de a comme sur la figure. Le courant I_a est constant.

D'après la partie 18.1, la force électromotrice induite dans le circuit b est

$$\mathcal{V} = \oint_b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (18.26)$$

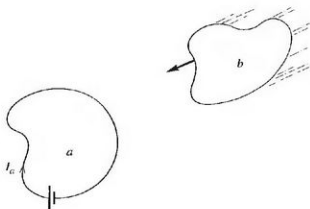


Figure 18.6 Le circuit a est actif et immobile.
Le circuit b est passif et se déplace dans le champ de a.

où Φ est le flux magnétique à travers b . Cela semble trivial, mais ne l'est pas, car $d\Phi/dt$ serait la même que si les deux circuits étaient stationnaires et si I_a variait convenablement. Cela signifie que la loi de l'induction de Faraday

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (18.27)$$

s'applique, qu'on ait des conducteurs en mouvement dans un $\mathbf{B}$ constant ou des conducteurs immobiles dans un $\mathbf{B}$ variable. Toutefois, notre raisonnement n'est que vraisemblable. Une démonstration correcte se trouve à la fin de ce chapitre. Elle fait appel à la relativité. Voir la partie suivante.

En admettant que le résultat ci-dessus soit correct, la force électromotrice induite dans un circuit C rigide et stationnaire, plongé dans un champ magnétique variable, est

$$\mathcal{V} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (18.28)$$

Nous avons utilisé le théorème de Stokes pour passer de la première à la deuxième intégrale, $\mathcal{A}$ étant une surface arbitraire délimitée par C . Par ailleurs, on a une dérivée partielle dans la dernière intégrale, pour prendre en compte le fait que le champ magnétique peut être fonction des coordonnées autant que du temps. La règle du tire-bouchon s'applique.

Le chemin d'intégration n'a pas à se trouver dans un matériau conducteur.

Observons que l'équation ci-dessus implique seulement l'intégrale de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Elle ne donne pas $\mathbf{E}$ en fonction des coordonnées. Exceptionnellement, pour des géométries simples, on peut déduire $\mathbf{E}$ de la valeur de $\mathcal{V}$.

Comme la surface d'aire $\mathcal{A}$ choisie pour les intégrales de surface est arbitraire, l'égalité du troisième et du dernier terme signifie que

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (18.29)$$

C'est encore une équation de Maxwell. Cette équation, comme les deux autres (Éqs. 7.16 et 14.25), est valable à condition que toutes les variables soient exprimées dans le même référentiel.

Le signe négatif dans les Éqs. 18.27 et 18.29 est important. Si Φ est orienté vers la feuille de papier et augmente, $d\Phi/dt$ est orienté vers la feuille de papier. Alors, selon la règle du tire-bouchon, le signe négatif signifie que la force électromotrice induite est orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre : la force électromotrice induite tend à engendrer un champ magnétique qui s'oppose au *changement* de flux imposé. La loi de Lenz est toujours valable.

Si un circuit fermé contient N spires, chacune interceptant le même flux magnétique, alors les forces électromotrices s'ajoutent et la force électromotrice nette est N fois plus grande. Alors la quantité $N\Phi$ est appelée le *flux total* :

$$\Lambda = N\Phi \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = -\frac{d\Lambda}{dt} \quad (18.30)$$

Évidemment, la géométrie du circuit et la configuration du champ peuvent être fort complexes. Dans ce cas cette équation s'applique encore et la signification géométrique de Λ devient obscure, mais $\mathcal{V}$, et donc Λ , sont des grandeurs mesurables.

Cf. exercices : 18.6 ; 18.8 ; 18.9 ; 18.10 ; 18.11.

18.3 LE CHAMP ÉLECTRIQUE E EXPRIMÉ EN TERMES DES POTENTIELS V ET A

Un circuit fermé arbitraire C , rigide et stationnaire, est plongé dans un champ $\mathbf{B}$ dépendant du temps. Alors, d'après la partie 18.2,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (18.31)$$

où A est l'aire d'une surface ouverte quelconque délimitée par C .

Par ailleurs, selon la partie 15.1, on peut remplacer l'intégrale de surface à droite par l'intégrale curviligne du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ sur C :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \quad (18.32)$$

On peut sans problème insérer la dérivée temporelle sous le signe d'intégrale, mais alors elle devient une dérivée partielle car $\mathbf{A}$ est normalement fonction des coordonnées spatiales autant que du temps. Donc,

$$\oint_C \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (18.33)$$

où C est une courbe fermée, comme indiqué ci-dessus. Alors, d'après la partie 1.8, l'expression entre parenthèses est égale au gradient d'une fonction :

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } V, \quad (18.34)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (18.35)$$

où V est, bien sûr, le potentiel électrique.

Ainsi $\mathbf{E}$ est la somme de deux termes, $-\text{grad } V$ qui provient de l'accumulation de charge, et $-\partial \mathbf{A}/\partial t$, s'il y a des champs dépendant du temps dans un référentiel donné.

C'est une équation fondamentale ; nous l'utiliserons à plusieurs reprises. Notons qu'elle exprime $\mathbf{E}$ lui-même, et non ses dérivées ou son intégrale, en un point donné, en termes des dérivées de V et $\mathbf{A}$ en ce point. Son équivalent magnétique est le

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

de la partie 14.4.

Notons que l'Éq. 18.35 est une relation *locale* : elle relie $\mathbf{E}$, V et $\mathbf{A}$ en un point donné. Mais l'Éq. 18.31 est *non-locale* : elle relie les *intégrales* de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. Les deux équations sont justes, mais l'équation locale 18.35 est souvent plus utile. Voir, par exemple, Lorrain et S. Koutchmy [37] pour une discussion du champ $-\partial \mathbf{A}/\partial t$ dans l'atmosphère solaire. Malheureusement, la relation locale est beaucoup moins bien connue.

La loi de l'induction de Faraday, sous forme différentielle (Éq. 18.29), relie les dérivées *spatiales* de $\mathbf{E}$ aux dérivées *temporelles* de $\mathbf{B}$ en un point donné.

Observons que $\text{grad } V$ est fonction de V , qui dépend de la position des charges. Cependant, $\partial \mathbf{A}/\partial t$ est fonction des dérivées temporelles de la densité de courant $\mathbf{J}$, et en conséquence de l'accélération des charges.

Les relations

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (18.36)$$

sont toujours valables dans tout référentiel inertiel.

Dans un $\mathbf{B}$ dépendant du temps, la force électromotrice induite dans un circuit C est

$$\mathcal{V} = - \int_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \quad (18.37)$$

Exemple : Le mystère du circuit secondaire autour d'un long solénoïde

Enroulons un circuit secondaire autour d'un long solénoïde, près du centre comme en Fig. 18.7. Si on fait varier le courant dans le solénoïde, une tension $\mathcal{V}$ apparaît aux bornes du secondaire, comme dans l'Éq. 18.2. Mais comment est-ce possible ? Il n'y a pas de champ magnétique à l'extérieur du solénoïde ! A.P. French [9] posa la question, et plusieurs enseignants ont proposé différentes réponses dans les années suivantes, mais personne n'a mentionné le potentiel vecteur $\mathbf{A}$!

Certes, il n'y a pratiquement pas de champ $\mathbf{B}$ à l'extérieur d'un solénoïde long. Mais il y a un champ $\mathbf{A}$! Le vecteur $\mathbf{A}$ est azimutal, comme dans l'exemple qui suit la partie 15.1. Disons que le secondaire a une seule spire de rayon a . Selon l'Éq. 15.3, au rayon a , $A = \Phi/(2\pi a)$, où Φ est le flux magnétique dans le solénoïde, et la force électromotrice induite $\mathcal{V}$ sur le secondaire est $-d\Phi/dt$. Si le secondaire a N spires, alors $\mathcal{V} = -N d\Phi/dt$.

Cette expérience de pensée montre que la « coupure du flux » n'est pas une interprétation complètement satisfaisante de la loi de l'induction de Faraday.

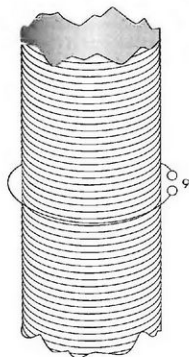


Figure 18.7 Bobinage secondaire d'une seule spire autour d'un long solénoïde.

Exemple : Courants de Foucault

Imaginons une feuille de cuivre à l'intérieur d'un solénoïde, dans un plan perpendiculaire à l'axe. Le solénoïde est parcouru par un courant alternatif.

Selon la loi de Lenz, le champ électrique $-\partial A/\partial t$ induit des courants dans le cuivre qui tendent à annuler les changements du B net. Ces courants sont azimutaux car A et $\partial A/\partial t$ sont azimutaux (voir l'exemple en partie 15.1).

Les courants induits dans des conducteurs massifs par des champs magnétiques variables sont appelés *courants de Foucault*.

Les courants de Foucault peuvent être utiles. Par exemple, ils dissipent l'énergie dans différents systèmes d'amortissement.

Ils sont dangereux dans les transformateurs car ils causent des pertes Joule dans le noyau. Les noyaux de transformateurs sont généralement construits à partir de fines feuilles de fer à transformateur, appelées *lamelles*, d'une fraction de millimètre d'épaisseur dans les petits appareils, isolées les unes des autres par une mince couche d'oxyde. Avec un noyau massif, les courants de Foucault annuleraient largement les variations du flux magnétique. Les pertes Joule seraient également excessives.

Dans les transformateurs audio, l'alliage de fer se trouve parfois sous la forme d'une poudre moulée dans une résine isolante. On dit alors que le transformateur a un *noyau de fer pulvérulent*.

Les *ferrites* sont utilisés aux fréquences audio et au-dessus, jusqu'à 5 GHz, pour les inducteurs et les transformateurs, et dans les têtes d'enregistrement des lecteurs de cassettes, disquettes ou disques durs.

Les ferrites sont des matériaux de type céramique composés d'oxydes de différents métaux, souvent sans fer. Les oxydes sont d'abord réduits en poudre, puis moulés, et enfin chauffés sous pression. Leur perméabilité magnétique, de l'ordre de 100, dépend de la fréquence, et leur conductivité peut descendre jusqu'à 10^{-3} S/m. La conductivité du fer à transformateur vaut environ 10^6 S/m.

Exemple : La force électromotrice induite dans un circuit rigide

Dans le circuit rigide de la Fig. 18.8, on suppose que (1) les fils horizontaux ont une résistance nulle, (2) la résistance R_a est à grande distance de I' , et (3) R_a et R_b sont assez grandes pour que le champ magnétique de I soit négligeable devant celui de I' . Alors $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ sont essentiellement ceux de I' , et sont orientés dans les directions indiquées. Le potentiel vecteur du courant I' à la position de R_b est $\mathbf{A}_b$, et il est orienté vers le bas. Selon la loi de Lenz (Partie 18.2), une augmentation de I' induit une force électromotrice et un courant I dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On peut attribuer la force électromotrice induite soit à la variation du flux magnétique Φ , soit au champ électrique $-\partial\mathbf{A}/\partial t$ en R_b , avec

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \approx A_b D \quad (18.38)$$

L'intégrale curviligne est calculée dans le sens des aiguilles d'une montre à cause de la règle du tire-bouchon. La force électromotrice induite est donc

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dA_b}{dt} D \quad (18.39)$$

$\mathcal{V}$ est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre si Φ est orienté vers la feuille de papier et augmente, soit si I' augmente. Alors

$$I = \frac{(dA_b/dt)D}{R_a + R_b} \quad (18.40)$$

dans la direction indiquée.

À l'intérieur de la résistance R_a , $A \approx 0$ par hypothèse et

$$\mathbf{E}_a = -\text{grad } V_a = -\frac{IR_a}{D} \hat{\mathbf{y}}, \quad V_c = IR_a \quad (18.41)$$

avec $\mathbf{E}_a$ et $\text{grad } V_a$ orientés comme sur la Fig. 18.8.

Le potentiel en e est nul pour la raison suivante. Dans les fils horizontaux, $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$, où $\mathbf{J}$ a une valeur finie et σ est infini par hypothèse. Ainsi

$$E_x = 0, \quad -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = 0 \quad (18.42)$$

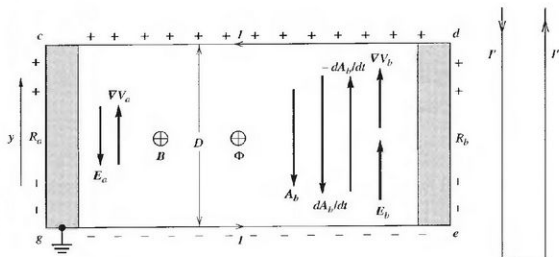


Figure 18.8 Circuit rigide gcde fermé par les résistances R_a et R_b et situé près d'une paire de fils parcourus par un courant I' . La longueur des flèches montre l'amplitude relative de $\mathbf{E}$, $\text{grad } V$ et $d\mathbf{A}/dt$, avec $R_a = R_b$.

Mais A_x est nulle partout car le courant I' n'a quasiment pas de composante x . Donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad V_e = 0 \quad (18.43)$$

et

$$V_c = V_d = IR_a \quad (18.44)$$

Ce potentiel sur le fil cd provient de l'accumulation de charges de surface positives sur la moitié supérieure du circuit et de charges négatives sur la partie inférieure, comme en Fig. 18.8.

Dans R_b , donc,

$$\text{grad } V_b = \frac{IR_a}{D} \hat{\mathbf{y}} \quad (18.45)$$

est orienté vers le haut, et

$$\mathbf{E}_b = -\text{grad } V_b - \frac{\partial \mathbf{A}_b}{\partial t} = \frac{IR_b}{D} \hat{\mathbf{y}} \quad (18.46)$$

est aussi orienté vers le haut. Bien sûr, $\mathbf{E}$ est orienté dans la même direction que $\mathbf{J}$.

Si $R_a = R_b$, alors

$$|\mathbf{E}_a| = |\mathbf{E}_b|, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{A}_b}{\partial t} \right| = 2 |\text{grad } V_b| \quad (18.47)$$

Cf. exercices : 18.7 ; 18.12 ; 18.13 ; 18.14.

18.4 LES CHAMPS $\mathbf{E}$, $-\text{grad } V$, $-\partial \mathbf{A}/\partial t$ ET $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Dans tout référentiel inertiel, disons S , l'équation

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (18.48)$$

est toujours valable.

Si une charge Q se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ par rapport à S , alors pour un observateur dans S la force vaut

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q \left(-\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (18.49)$$

et, dans un milieu de conductivité σ ,

$$\mathbf{J} = \sigma \left(-\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (18.50)$$

ce qui correspond à l'Éq. 18.5 en remplaçant $\mathbf{E}$ par ses deux composantes comme dans l'Éq. 18.35.

Toutes les variables sont mesurées par rapport au *même* référentiel S . Ces équations sont valides même si v devient proche de la vitesse de la lumière.

⁽¹⁾Pour un observateur sur le corps en mouvement, disons dans le référentiel S' , le corps est au repos et

$$\mathbf{F}' = Q\mathbf{E}' = Q \left(-\text{grad}' V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t'} \right) \quad (18.51)$$

18.5 * LIEN ENTRE LES DEUX FORMES DE LA LOI DE L'INDUCTION DE FARADAY

⁽¹⁾On a trouvé ci-dessus que si un circuit rigide se déplace dans un $\mathbf{B}$ constant, alors la force électromotrice induite suit la loi de l'induction de Faraday, Éq. 18.2. On a ensuite conclu que la même loi s'applique à un circuit stationnaire plongé dans un champ $\mathbf{B}$ variable.

Passer d'une forme de la loi à l'autre fait appel à la relativité.

Dans le reste de ce chapitre on appelle $\mathbf{v}$ la vitesse de S' par rapport à S . On suppose $\mathbf{v}$ constante.

L'équation 18.27 concerne la force électromotrice induite mesurée dans le référentiel fixe S . D'après notre expérience avec les calculs relativistes il n'est pas du tout évident que, dans le référentiel S' du circuit en mouvement,

$$\mathcal{V}' = -\frac{d\Phi'}{dt'} \quad (18.52)$$

En fait, cela est vrai car, comme nous allons le voir,

$$\mathcal{V}' = \gamma \mathcal{V}, \quad \Phi' = \Phi, \quad dt' = \frac{dt}{\gamma} \quad (18.53)$$

On peut accepter immédiatement l'équation pour dt' pour la raison suivante. En tout point de S' ,

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \quad (18.54)$$

(1) Ici on a besoin de connaissances en relativité.

selon la partie 11.4. Donc, en tout point donné dans S' , x' est fixé et

$$dt = \gamma dt' \quad (18.55)$$

La démonstration des deux autres équations est un peu plus longue.

18.5.1 * Transformation d'un flux magnétique

Le flux magnétique à travers un circuit fermé donné qui délimite une surface $\mathcal{A}$ est

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} \quad (18.56)$$

dans un référentiel S et

$$\Phi' = \int_{\mathcal{A}'} \mathbf{B}' \cdot d\mathcal{A}' \quad (18.57)$$

dans S' .

Évidemment, la surface d'aire $\mathcal{A}$ dans le référentiel S a une forme différente dans le référentiel S' , à cause de la contraction de Lorentz, et une aire $\mathcal{A}'$ différente. Un élément de surface donné (disons qu'il est peint en rouge) porte un flux $\mathbf{B} \cdot d\mathcal{A}$ dans le référentiel S et $\mathbf{B}' \cdot d\mathcal{A}'$ dans le référentiel S' . Donc

$$\frac{d\Phi'}{d\Phi} = \frac{\mathbf{B}' \cdot d\mathcal{A}'}{\mathbf{B} \cdot d\mathcal{A}} \quad (18.58)$$

Mais, d'après le premier exemple de la partie 11.4 et la partie 13.4, en posant $\mathbf{E} = 0$,

$$\mathbf{B}' \cdot d\mathcal{A}' = (\mathbf{B}_{\parallel} + \gamma \mathbf{B}_{\perp}) \cdot \left(d\mathcal{A}_{\parallel} + \frac{d\mathcal{A}_{\perp}}{\gamma} \right) \quad (18.59)$$

$$= \mathbf{B}_{\parallel} \cdot d\mathcal{A}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} \cdot d\mathcal{A}_{\perp} = \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} \quad (18.60)$$

et $\Phi' = \Phi$. Le flux magnétique à travers une courbe fermée rigide est invariant par transformation de Lorentz.

18.5.2 * Transformation d'une force électromotrice

Référons-nous à nouveau à la Fig. 18.6 et appelons S' le référentiel d'un circuit rigide en mouvement. Dans S' ,

$$\mathcal{V}' = \oint_{C'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}' \quad (18.61)$$

Puisque nous ne nous intéressons pour le moment qu'à la force électromotrice induite, nous pouvons supposer que $\mathbf{B}$ est constant et $\mathbf{E}$ nul dans S . Alors, selon la partie 13.4,

$$\mathcal{V}' = \oint_{C'} \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}' \quad (18.62)$$

Or, le produit vectoriel est perpendiculaire à $\mathbf{v}$. Seule compte donc la composante perpendiculaire de $d\mathbf{l}'$, $d\mathbf{l}'_{\perp} = d\mathbf{l}_{\perp}$, et

$$\mathcal{V}' = \gamma \oint_{C'} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \gamma \mathcal{V} \quad (18.63)$$

Nous avons donc prouvé les trois équations 18.53. En conséquence, dans tous les cas, mais dans un seul référentiel, la force électromotrice induite dans un circuit fermé associé à un flux magnétique variable est donnée par

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (18.64)$$

L'orientation choisie pour $\mathcal{V}$ et Φ suit la règle du tire-bouchon.

18.6 CINQ ÉQUATIONS CLEFS

Il est utile à ce stade de regrouper les équations suivantes :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \mathcal{V} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (18.36)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (18.6)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (18.30)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (14.26, 18.36)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (15.17)$$

Ces équations sont générales, si $\mathbf{J}$ dans la dernière comprend plus que le courant de conduction, comme dans la partie 21.2. Toutes ces équations sont des relations *locales* qui s'appliquent aux variables de champ et à leurs dérivées *en un point donné*.

Dans chaque équation tous les termes concernent le *même* référentiel.

La forme intégrale de la troisième équation ci-dessus est l'Éq. 18.28, qui est non-locale car elle contient des intégrales sur une courbe et sur une surface. La forme intégrale de la cinquième équation ci-dessus est l'Éq. 15.18, qui est aussi non-locale.

18.7 RÉSUMÉ

Un corps se déplace de façon arbitraire dans un champ magnétique constant mais pas nécessairement uniforme. En un point fixé au corps en mouvement, une charge Q subit une force $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La *force électromotrice induite* le long d'une courbe quelconque C est

$$\mathcal{V} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (18.1)$$

Ici $\mathbf{v}$ est la vitesse de la charge et $\mathbf{B}$ est l'induction magnétique en ce point de l'espace.

Quand la courbe C est fermée, la force électromotrice induite est donnée aussi par

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (18.2)$$

où Φ est le flux à travers C . C'est la loi de l'induction de Faraday. On applique la règle du tire-bouchon. Cette loi est aussi valable pour un circuit immobile dans un champ magnétique variable.

En tout point de l'espace, dans un référentiel donné,

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (18.29)$$

C'est l'une des équations de Maxwell.

La loi de Lenz stipule que la force électromotrice induite dans un circuit fermé tend à s'opposer à la variation du flux magnétique à travers le circuit.

Avec un circuit fermé multispire,

$$\mathcal{V} = - \frac{d\Lambda}{dt} \quad (18.30)$$

où Λ est le flux total. Si un circuit à N spires est traversé par un flux Φ , $\Lambda = N\Phi$.

Dans tout référentiel inertiel,

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (18.36)$$

Une charge Q en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$ dans des champs électrique et magnétique superposés est soumise à une force

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q \left(-\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (18.49)$$

et, dans un milieu de conductivité σ ,

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \sigma \left(-\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (18.50)$$

EXERCICES

18.1 L'expérience de pensée de la Fig. 18.3

Montrer qu'il y a conservation de l'énergie dans l'expérience de pensée de la Fig. 18.3.

18.2 Marées et champ magnétique terrestre

Discuter comment les marées affectent le champ magnétique terrestre en considérant le cas d'une rivière qui se jette dans la mer en direction est-ouest dans l'hémisphère Nord. On se rappellera que le pôle magnétique situé au pôle Nord géographique est un pôle Sud magnétique. Le vecteur $\mathbf{B}$ est orienté vers le bas dans l'hémisphère Nord.

⑧ 18.3 Force de freinage magnétique sur un satellite

Un satellite naturel de diamètre 10^6 m se déplace à une vitesse de 1 km/s dans la direction normale au champ magnétique d'une planète dans une région où $B = 10^{-7}$ T. Le satellite a une conductivité appréciable.

- Le satellite se déplace dans un vide parfait. Que se passe-t-il ?
- Le gaz ambiant a une densité de l'ordre de 10^{10} particules par mètre cube, les particules étant soit des électrons soit des ions simplement chargés. Chaque moitié du satellite récolte les particules du signe correct en balayant l'espace. Calculer l'ordre de grandeur du courant.
- Calculer l'ordre de grandeur de la force de freinage.
- Quelqu'un suggère que ce courant pourrait fournir de l'énergie à un satellite artificiel qui voyagerait dans le même champ à la même vitesse. Inversement, un courant dans la direction opposée pourrait servir à propulser le satellite. Qu'en pensez-vous ?

La vitesse d'un satellite artificiel vaut 4 à 8 km/s et $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}|$ dans l'ionosphère et la magnétosphère varie entre 100 $\mu\text{V/m}$ et 320 mV/m.

⑧ 18.4 Bassin de test de bateaux

Un wagon roule sur des rails de chaque côté d'un long bassin d'eau équipé pour tester des maquettes de bateaux. Les rails sont séparés de 3,0 m et le wagon a une vitesse maximale de 20 m/s.

- Calculer la tension maximale entre les rails si la composante verticale du champ magnétique terrestre vaut $2,0 \times 10^{-5}$ T.
- Que vaudrait la tension si le bassin était situé à l'équateur magnétique ?

18.5 Un barreau aimanté est tiré à travers un anneau conducteur à vitesse constante, comme en Fig. 18.9

Tracer les courbes (a) du flux magnétique Φ , (b) du courant I , (c) de la puissance dissipée dans l'anneau, en fonction du temps.

On choisira pour Φ et I les directions positives indiquées sur la figure.

Ce phénomène a été utilisé pour mesurer la vitesse de projectiles. Le projectile, avec un petit aimant permanent inséré dans sa tête, passe successivement dans deux bobines séparées par une distance d'environ 100 mm. L'intervalle de temps entre les deux pulses est une mesure de la vitesse. La méthode a été utilisée jusqu'à des vitesses de 5 km/s.

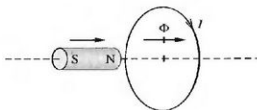


Figure 18.9

18.6 Force électromotrice induite

Une boucle de fil est située dans un champ magnétique dépendant du temps avec

$$B = 1,00 \times 10^{-2} \cos(2\pi \times 60)t$$

perpendiculaire au plan de la boucle.

Calculer la force électromotrice induite dans une bobine carrée de 100 spires de 100 mm de côté.

18.7 Amortisseur par courant de Foucault

La figure 18.10 représente un type courant d'amortisseur par courant de Foucault. Le mouvement de la plaque de cuivre dans le champ d'un aimant permanent induit des courants qui tendent à s'opposer au mouvement, suivant la loi de Lenz. Les pertes Joule dans la plaque dissipent son énergie cinétique.

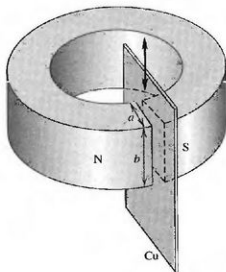


Figure 18.10

Les amortisseurs de ce type sont utilisés surtout, mais pas exclusivement, dans des appareils de faible puissance tel que les compteurs d'énergie électrique et les balances. Comme on le verra, la force de freinage est proportionnelle à la vitesse, comme dans un fluide visqueux.

- Expliquer qualitativement, mais plus en détail, l'origine de la force de freinage.
- Imaginer un compteur de vitesse pour voiture qui utilise les courants de Foucault.
- Disons que B est uniforme sur la face du pôle. Le chemin suivi par le courant est complexe ; prenons $R \approx 3a/(\sigma bs)$. Cette quantité est de l'ordre de 3. La plaque a une épaisseur s et une conductivité σ . Calculer le courant.
- Calculer la force de freinage F . Celle-ci est proportionnelle à la conductivité. Ainsi la plaque devrait être soit en cuivre soit en aluminium. Une solution encore meilleure consiste à utiliser une plaque de fer recouverte de cuivre.
- Calculer la puissance IV dissipée dans la plaque. Elle devrait être égale à Fv .
- Estimer la valeur de B nécessaire dans des freins à disque à courant de Foucault pour un petit bus. La conductivité du cuivre est $5,8 \times 10^7$ S/m. Estimer la puissance dissipée dans chaque roue. Pourquoi un véhicule équipé de freins à courant de Foucault a-t-il encore besoin de freins conventionnels ?

Dans les régions montagneuses, certains bus et camions sont équipés de dynamos qui freinent en produisant de la puissance électrique qui est dissipée dans une grande résistance sur le toit.

18.8 La détection des défauts dans des tuyaux métalliques

La figure 18.11 indique le principe de fonctionnement d'un appareil pour la détection des défauts dans des tuyaux ou des barres en métal. Les bobines a créent un fort *gradient* de champ magnétique le long de l'axe, comme dans le problème 14.10. La bobine b est connectée à un écran. Le tuyau T se déplace à vitesse constante v le long de l'axe de symétrie. Une tension apparaît aux bornes de la bobine b quand un défaut la traverse. Expliquer.

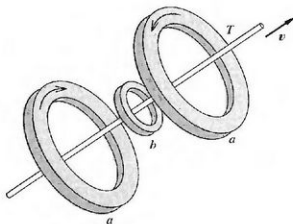


Figure 18.11

18.9 Le magnétomètre à entrefer⁽¹⁾

Un *magnétomètre* mesure B . Un type courant est le *magnétomètre à entrefer*, qui met en œuvre la courbe d'hystérésis. Il en existe plusieurs formes, dont l'une est indiquée en Fig. 18.12(a). Les deux barreaux a et b sont faits d'un matériau ferromagnétique comme la ferrite, dont la courbe d'hystérésis est représentée en Fig. 18.12(b). Les deux bobines jumelles sont en série et sont bobinées comme sur la figure afin de magnétiser les deux barres en sens opposés.

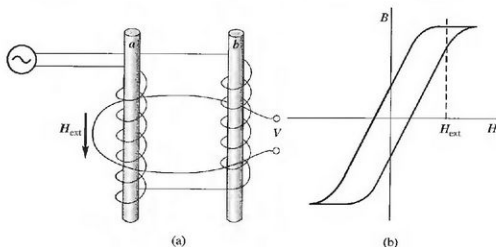


Figure 18.12

(1) Ce problème fait appel à la partie 16.6.

Le courant à travers ces bobines est suffisant pour faire parcourir au matériau une courbe d'hystérésis complète.

En l'absence de champ extérieur H_{ex} , les flux magnétiques à travers les barreaux s'annulent et $V = 0$.

(a) Esquisser $\Phi(t)$ et $V(t)$ pour chaque barreau quand $H_{\text{ex}} = 0$.

(b) Dessiner les mêmes quantités pour $H_{\text{ex}} \neq 0$. On remarquera que si l'oscillateur fonctionne à une fréquence f , la fréquence fondamentale de V est $2f$. Cela simplifie la mesure, car le détecteur peut être construit de façon à couper la fréquence f .

Les magnétomètres à entrefer peuvent mesurer des champs faibles, à partir de quelques nanoteslas.

18.10 Le ruban à hystérésis⁽¹⁾

Un *ruban à hystérésis* sert à mesurer B . Il consiste en un mince fil de Permalloy (voir ci-dessous) orienté dans la direction de B et un petit capteur constitué d'une bobine de quelques milliers de spires près du centre, sur l'axe d'un solénoïde, comme sur la Fig. 18.13.

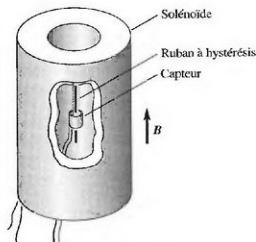


Figure 18.13

Pour mesurer le B ambiant, le solénoïde est parcouru par un courant continu qui annule juste B , plus un faible courant alternatif. Alors le H sur l'axe du solénoïde est celui du courant alternatif, et le ruban parcourt une boucle d'hystérésis à chaque cycle.

Avec du Permalloy de molybdène la boucle d'hystérésis est approximativement rectangulaire et la tension induite dans la petite bobine a deux pics prononcés, un positif et un négatif, qui peuvent être observés à l'oscilloscope.

Quand le balayage de l'oscilloscope est synchronisé avec le courant alternatif dans le solénoïde, les deux pics sont symétriques si la moyenne temporelle de H sur l'axe du solénoïde est nulle. Le champ stationnaire du solénoïde annule alors précisément le B ambiant et le courant dans le solénoïde est une mesure de B .

Le ruban à hystérésis a un champ d'application assez limité. (1) Le solénoïde doit faire au moins une dizaine de centimètres de long car il doit être sensiblement plus long que le ruban pour éviter des effets de bord excessifs. Mais la longueur du ruban doit être beaucoup plus grande que son diamètre, toujours pour réduire les effets de bord, et une diminution de la section du ruban

(1) Ce problème fait appel à la partie 16.6.

diminue le signal proportionnellement. (2) Le B ambiant ne peut excéder quelques centièmes de teslas car sinon la puissance dissipée dans le solénoïde devient excessive. (3) Si on mesure B au voisinage d'un matériau magnétique, le champ du solénoïde altère la perméabilité du fer localement.

Calculer la tension maximale induite dans la bobine-captur dans les conditions suivantes : diamètre du ruban, $25\text{ }\mu\text{m}$; nombre de spires de la bobine-captur, 1 000 ; valeur maximale de μ_r , 75 000 ; fréquence, 60 Hz ; amplitude du H alternatif, 7 A.tr/m.

18.11 Mesure d'une résistivité sans contact

Il est utile de pouvoir mesurer la résistivité d'un échantillon sans avoir à y sceller des contacts. Une méthode consiste à placer un disque du matériau à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant alternatif, les deux axes étant parallèles, et à mesurer la puissance absorbée par le disque. Le disque a un rayon a , une épaisseur s et une conductivité σ . Le champ magnétique est uniforme, et $B = B_m \cos \omega t$. On négligera le champ magnétique des courants induits. On se limite donc à des matériaux de faible conductivité.

Trouver la relation entre σ et la puissance moyenne dissipée P .

18.12 Accélérateur linéaire par induction

La figure 18.14 montre le schéma d'une section d'un accélérateur linéaire par induction. Il consiste en une série de tores de ferrite traversés par le faisceau d'ions et par des boucles à une spire parcourues par de forts courants pulsés.

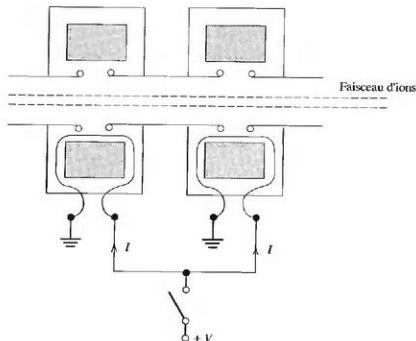


Figure 18.14

Un accélérateur de ce type contient 200 tores et accélère un faisceau pulsé d'électrons de 10 kA à 50 MeV. Sa longueur totale est de 80 m et les impulsions de courant font 70 nm de long. Expliquer qualitativement son fonctionnement.

18.13 Un magnétomètre qui utilise les courants de Foucault

La figure 18.15 montre le principe de fonctionnement d'un magnétomètre qui peut mesurer des champs magnétiques à partir de 10^{-8} T et jusqu'à 10^{-2} T. La plaque d'aluminium P tourne autour de l'axe AA' à la vitesse angulaire ω dans le champ ambiant B_0 que l'on veut mesurer. Les courants de Foucault fluctuants induits dans P produisent un flux magnétique fluctuant à travers la bobine stationnaire C , qui a N spires, et la tension V est une mesure de B_0 .

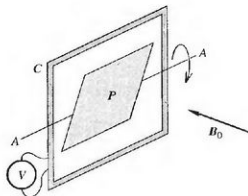


Figure 18.15

La plaque fait 10 mm^2 et elle est collée à l'intérieur du rotor en plastique d'une petite turbine à air qui fonctionne à 1 000 tr/s. Les seules parties métalliques sont la plaque et la bobine.

Un calcul exact de V en fonction de la géométrie, de ω et de B_0 serait difficile. Mais il n'est pas nécessaire car on peut étalonner l'instrument avec des bobines de Helmholtz (Problème 14.9).

(a) Comment V varie-t-elle avec B_0 et ω ? On posera $\omega t = 0$ quand la plaque se trouve dans le plan de C .

(b) Quelle est la fréquence de V ?

18.14 Tuyaux électriques

La norme électrique aux États-Unis impose que les deux conducteurs d'un circuit fonctionnant en courant alternatif, s'ils passent dans un tube métallique, doivent être placés dans le même tube.

Supposons que l'on aie un seul conducteur parcouru par un courant alternatif et enfermé dans un tube conducteur.

Montrer que A et $\partial A / \partial t$ sont tous deux longitudinaux dans le tube.

Ainsi, avec un seul fil, un courant longitudinal est induit dans le tube. Cela produit une perte de puissance inutile et peut même engendrer des étincelles à des joints défectueux. Avec des conducteurs parcourus par des courants égaux et opposés, A et $\partial A / \partial t$ sont essentiellement nuls dans le tube.

Chapitre 19

* Champs magnétiques : inductances propre et mutuelle⁽¹⁾

Ce chapitre porte sur la force électromotrice induite dans un circuit quand le flux magnétique qui le traverse change. Cette variation de flux peut se produire à cause d'un changement du courant qui parcourt le circuit lui-même, ou de courants circulant ailleurs, ou encore à cause d'un changement de la géométrie des circuits.

19.1 * L'INDUCTANCE MUTUELLE M

Sur la Fig. 19.1 le circuit actif a est parcouru par un courant I_a . L'amplitude du flux Φ_{ab} engendré par a à travers b est

$$\Phi_{ab} = \oint_b \mathbf{A}_a \cdot d\mathbf{l}_b = \oint_b \left(\frac{\mu_0 I_a}{4\pi} \oint_a \frac{d\mathbf{l}_a}{r} \right) \cdot d\mathbf{l}_b \quad (19.1)$$

où r est la distance entre les éléments $d\mathbf{l}_a$ et $d\mathbf{l}_b$. Donc

$$\Phi_{ab} = \frac{\mu_0 I_a}{4\pi} \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r} = M_{ab} I_a \quad (19.2)$$

où

$$M_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r} \quad (19.3)$$

est l'*inductance mutuelle* entre les deux circuits. L'inductance mutuelle s'exprime en weber/ampère, ou en henry (symbole H). C'est l'*équation de Neumann*.

(1) Ce chapitre peut être omis sans perdre la cohérence d'ensemble. Pour une discussion plus complète des circuits électriques, voir Lorrain, Corson et Lorrain [32].

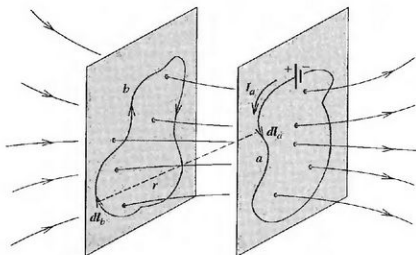


Figure 19.1 Le circuit actif *a* est parcouru par un courant I_a qui augmente. Une partie de son flux magnétique traverse le circuit passif *b*. La force électromotrice V_b , induite dans *b*, est dans la direction indiquée.

Si la géométrie est plus complexe que celle de la Fig. 19.1, le raisonnement ci-dessus est toujours valable, à part que le flux Φ_{ab} devient le flux total Λ_{ab} (Parties 15.1 et 18.2) et

$$\Lambda_{ab} = M_{ab}I_a \quad (19.4)$$

La force électromotrice induite dans *b* par une variation de I_a est

$$V_b = -\frac{d\Lambda_{ab}}{dt} = -M_{ab}\frac{dI_a}{dt} - I_a\frac{dM_{ab}}{dt} \quad (19.5)$$

L'inductance mutuelle est généralement constante. Alors le dernier terme à droite disparaît.

Par conséquent, l'inductance mutuelle entre deux circuits vaut 1 H si une variation de courant au taux de 1 A/s dans un circuit induit une force électromotrice de 1 V dans l'autre.⁽¹⁾

Si le courant I_a est sinusoïdal, alors

$$V_b = -j\omega M_{ab}I_a \quad (19.6)$$

Un appareil constitué par deux circuits conçus pour posséder une inductance mutuelle est appelé *inductance mutuelle* ou *transformateur*.

L'équation de Neumann est rarement utile car l'intégrale double est difficile à calculer, même pour des géométries simples. Cela n'est pas un problème car les inductances mutuelles se mesurent facilement. On peut aussi calculer M_{ab} à partir du rapport $V_b/(dI_a/dt)$.

(1) Généralement, le signe de M n'est pas important. Il y a des cas, pourtant, où la phase est essentielle, et où on a donc besoin du signe de M . Par ailleurs, la direction des forces et des couples entre circuits dépend du signe de M (Chapitre 20). Le signe de M est défini de la façon suivante. D'abord il faut définir une direction positive arbitraire pour les courants dans les deux circuits. M est alors positive si un courant positif dans *a* donne à travers *b* un flux du même signe que celui produit par un courant positif dans *b*.

L'équation de Neumann est néanmoins intéressante. Elle montre que l'inductance mutuelle ne dépend que de la géométrie du système. Nous avons rencontré une situation similaire avec la capacité.

Par ailleurs, on peut échanger les indices dans l'équation de Neumann sans modifier l'inductance mutuelle. Par conséquent

$$M_{ab} = M_{ba} = M \quad (19.7)$$

C'est surprenant, car les circuits peuvent avoir des formes différentes et un nombre de spires différent. Ainsi,

$$\text{si } \mathcal{V}_b = -M \frac{dI_a}{dt}, \quad \text{alors } \mathcal{V}_a = -M \frac{dI_b}{dt} \quad (19.8)$$

Exemple : * Inductance mutuelle entre deux solénoïdes coaxiaux

Dans le troisième exemple de la partie 14.2, nous avons trouvé que, à l'intérieur d'un long solénoïde comprenant N' spires par mètre et parcouru par un courant I (en négligeant les effets de bord),

$$B = \mu_0 N' I \quad (19.9)$$

On rajoute un deuxième bobinage autour du solénoïde, comme en Fig. 19.2, et on suppose que les deux bobinages sont longs par rapport à leur diamètre commun, afin de rendre les effets de bord négligeables.

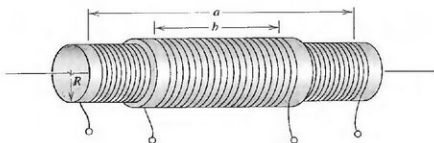


Figure 19.2 Deux solénoïdes coaxiaux. On a dessiné des rayons différents pour plus de clarté, mais la bobine b est enroulée directement autour de a .

Tout d'abord, on suppose que le solénoïde a , de rayon R et de nombre de spires N_a , est parcouru par un courant I_a . Le flux magnétique de a à travers le solénoïde b , de même rayon et avec N_b spires, est alors, d'après le troisième exemple de la partie 14.2,

$$\Phi_{ab} = \pi R^2 \mu_0 \frac{N_a}{a} I_a \quad (19.10)$$

et

$$M_{ab} = \frac{N_b \Phi_{ab}}{I_a} = \frac{\mu_0 \pi R^2 N_a N_b}{a} \quad (19.11)$$

On peut aussi considérer un courant I_b dans le solénoïde b . Alors

$$\Phi_{ba} = \pi R^2 \mu_0 \frac{N_b}{b} I_b \quad (19.12)$$

Ce flux ne traverse que $(b/a)N_a$ spires de la bobine a , car B tombe rapidement à zéro après les extrémités d'un long solénoïde. Donc

$$M_{ba} = \frac{b N_a \Phi_{ba}}{a I_b} = \frac{\mu_0 \pi R^2 N_a N_b}{a} \quad (19.13)$$

et $M_{ab} = M_{ba}$, comme attendu.

Il est paradoxal qu'une variation du courant dans le solénoïde interne induise une force électromotrice dans le solénoïde externe, puisque $B \approx 0$ à l'extérieur d'un long solénoïde. La raison en est que le E induit est égal à moins la dérivée temporelle de A , et pas de B , et que A ne disparaît pas à l'extérieur d'un long solénoïde, même si $\text{rot } A$ est nul. Voir le premier exemple de la partie 18.3.

Cf. exercices : 19.1 ; 19.2 ; 19.3 ; 19.4 ; 19.5.

19.2 * L'INDUCTANCE PROPRE L

Un circuit parcouru par un courant I est évidemment traversé par son propre flux magnétique, comme en Fig. 19.3. Le rapport

$$L = \frac{\Lambda}{I} \quad (19.14)$$

est appelé l'*inductance propre* du circuit. Comme pour l'inductance mutuelle, l'inductance propre ne dépend que de la géométrie du circuit et s'exprime en henry. L'inductance propre est toujours positive.

Si le courant I dans une inductance propre L change, alors une tension

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Lambda}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (19.15)$$

apparaît à ses bornes. Le signe négatif signifie que cette tension s'oppose à la variation du courant. Voir la Fig. 19.3.

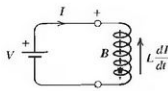


Figure 19.3 Circuit traversé par son propre flux.
Si I augmente, la tension induite $L dI/dt$ à travers L s'oppose à I .

L'inductance propre d'un circuit de résistance nulle vaut 1 H si le courant augmente à un taux de 1 A/s quand la tension appliquée entre les bornes vaut 1 V.

Si I et L dépendent tous deux du temps, alors

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt} \quad (19.16)$$

Généralement, L est constante.

On peut calculer une inductance propre, au moins en principe, à partir de l'équation de Neumann (Partie 19.1), les deux intégrales curvilignes étant calculées sur le même circuit. Si la section du conducteur est infiniment petite, alors le flux et l'inductance propre sont infinis. Cela vient du fait que B tend vers l'infini au voisinage immédiat du fil. La région où B tend vers l'infini est elle-même infiniment petite, mais le flux tend vers l'infini de façon logarithmique. Pour des courants distribués sur une surface infiniment fine, comme dans le prochain exemple, B reste fini et L l'est aussi.

L'inductance propre se mesure facilement. Un circuit conçu pour posséder une inductance propre est appelé une *bobine à inductance*, ou simplement *inductance*.

Exemple : * L'inductance propre d'un long solénoïde

Si l est la longueur d'un long solénoïde, N le nombre de spires et R son rayon, alors

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N\pi R^2 \mu_0 (N/l) I}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l} \quad (19.17)$$

L'inductance propre d'un solénoïde court est plus petite d'un facteur qui est fonction du rapport R/l .

Exemple : * L'inductance propre d'une bobine toroïdale

L'induction magnétique à l'intérieur de la bobine toroïdale à noyau d'air de la Fig. 19.4 dérive de la loi de la circulation d'Ampère (Partie 16.3) :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (19.18)$$

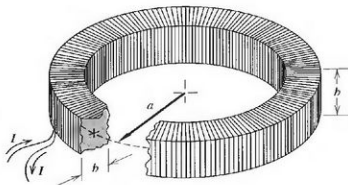


Figure 19.4 Bobine toroïdale à section carrée.

Donc

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_{a-b/2}^{a+b/2} \frac{b}{r} dr = \frac{\mu_0 N I b}{2\pi} \ln \frac{2a+b}{2a-b}, \quad (19.19)$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln \frac{2a+b}{2a-b} \quad (19.20)$$

Si la perméabilité relative du noyau est μ_r , alors l'inductance propre est μ_r fois plus grande.

Cf. exercices : 19.6 ; 19.7.

19.3 * CONSTANCE DE TEMPS ET IMPÉDANCE Z D'UNE BOBINE À INDUCTANCE

Dans les parties 6.5 et 6.6 on a discuté les constantes de temps et les impédances en relation avec les condensateurs. Qu'en est-il des inductances ?

- 1) *La constante de temps.* Si on applique une tension constante à une bobine à inductance, d'inductance propre L et de résistance R , comme en Fig. 19.5(a), alors

$$V = IR + L \frac{dI}{dt}, \quad \text{soit} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{V}{L} \quad (19.21)$$

et

$$I = \frac{V}{R} + I_0 \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right) \quad (19.22)$$

où I_0 est une constante d'intégration.

Si $I = 0$ à $t = 0$, alors $I_0 = -V/R$ et

$$I = \frac{V}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right) \right] \quad (19.23)$$

Le courant I s'établit à partir de zéro avec une constante de temps de L/R secondes, puis il atteint finalement sa valeur asymptotique V/R .

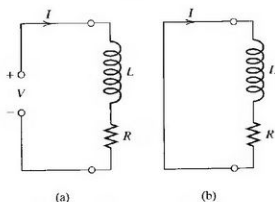


Figure 19.5

Si au contraire un circuit fermé contenant une inductance L et une résistance R comme en Fig. 19.5(b) est initialement parcouru par un courant I_0 , alors l'Éq. 19.22 s'applique encore avec $V = 0$ et

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right) \quad (19.24)$$

Le courant décroît maintenant, avec la même constante de temps L/R .

- 2) *L'impédance*. Si on applique une tension alternative $V_m \exp j\omega t$ à une bobine à inductance L de résistance R , alors d'après l'Éq. 19.21

$$V = V_m \exp j\omega t = IR + Lj\omega I = (R + j\omega L)I \quad (19.25)$$

et

$$I = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{V}{Z} \quad (19.26)$$

où $Z = R + j\omega L$ est l'impédance de la bobine à inductance. La partie imaginaire $j\omega L$ est proportionnelle à la fréquence f car, par définition, $\omega = 2\pi f$.⁽¹⁾

Les lois de Kirchhoff pour le courant et pour la tension de la partie 4.4 et du paragraphe 6.6 sont valables pour des circuits qui contiennent n'importe quelle combinaison de résistances, condensateurs ou inductances alimentés par des courants ou des tensions alternatifs. On doit simplement utiliser la représentation complexe et les impédances. Les impédances complexes en série et en parallèle se comportent comme des résistances en série et en parallèle.

Cf. exercices : 19.8 ; 19.9 ; 19.10.

19.4 * RÉSUMÉ

L'inductance mutuelle M entre deux circuits a et b est donnée par l'équation de Neumann

$$M_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r} \quad (19.4)$$

où les intégrales curvilignes sont calculées sur chaque circuit, et où r est la distance entre les éléments $d\mathbf{l}_a$ et $d\mathbf{l}_b$. À cause de la symétrie de l'intégrale,

$$M_{ab} = M_{ba} = M \quad (19.8)$$

Si Λ_{ab} est le flux engendré par a à travers b , alors

$$\Lambda_{ab} = M_{ab} I_a \quad (19.5)$$

La force électromotrice induite dans b par le courant dans a est

$$\mathcal{V}_b = -\frac{d\Lambda_{ab}}{dt} = -M \frac{dI_a}{dt} - I_a \frac{dM}{dt} \quad (19.6)$$

(1) En augmentant la fréquence on augmente le rapport $\omega L/R$, ce qui diminue l'importance relative de R . Cependant, cela fait apparaître deux autres phénomènes. (1) Puisqu'il y a une différence de tension entre les spires, l'inductance agit aussi comme un condensateur et il y a une *capacité parasite* entre les bornes. Voir le problème 19.9. L'impédance de cette capacité décroît avec la fréquence. (2) L'augmentation de la fréquence accroît R , car l'effet de peau (Partie 22.6) impose que le courant s'écoule de plus en plus près de la surface du fil.

L'inductance propre d'un circuit est

$$L = \frac{\Lambda}{I} \quad (19.15)$$

où Λ est le flux total quand le courant vaut I . L'impédance d'une inductance idéale est $j\omega L$.

Si on applique une tension constante V à un circuit qui contient une résistance R et une inductance L en série, le courant augmente avec une constante de temps L/R :

$$I = \frac{V}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right) \right] \quad (19.24)$$

Si un circuit fermé a une résistance R en série avec une inductance L et qu'il est initialement parcouru par un courant I_0 , alors le courant décroît avec la même constante de temps :

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right) \quad (19.25)$$

L'impédance Z d'une inductance L et d'une résistance R en série vaut $R + j\omega L$.

EXERCICES

19.1 Inductance mutuelle entre un tore et un fil axial

Un long fil rectiligne se trouve le long de l'axe d'une bobine toroïdale à N spires, de grand rayon a et de section carrée de côté b , avec $a \gg b$.

Calculer l'inductance mutuelle (a) en supposant un courant I dans le fil et (b) en supposant un courant I dans le tore.

Ⓡ 19.2 Inductance mutuelle entre un fil rectiligne et une boucle

Une boucle de fil de rayon R est centrée à une distance $2R$ d'un long fil rectiligne. Le fil est dans le plan de la spire.

Calculer l'inductance mutuelle.

19.3 Paire de dipôles magnétiques sans inductance mutuelle

Un appareil pour l'exploration géophysique comprend deux bobines courtes dans la position indiquée en Fig. 19.6. Le constructeur affirme que l'inductance mutuelle est nulle.

Est-ce vrai ?



Figure 19.6

19.4 Transformateur de courant

La figure 19.7 représente un *transformateur de courant à mesure latérale* pour mesurer des impulsions de courant élevé. Montrer que pour une bobine d'une seule spire

$$V = \frac{\mu_0 a}{\pi} \ln \left(\frac{b+a}{b-a} \right) \frac{dI}{dt}$$

Le courant $I(t)$ s'en déduit en intégrant V .

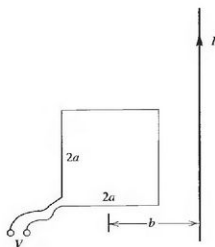


Figure 19.7

19.5 Inductance mutuelle

(a) Montrer que l'inductance mutuelle entre deux bobines coaxiales séparées par une distance z comme en Fig. 19.8, l'une de rayon a ayant N_a spires et l'autre de rayon $b \ll a$ ayant N_b spires, vaut

$$\frac{\pi \mu_0 N_a N_b a^2 b^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

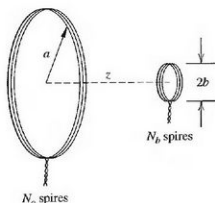


Figure 19.8

On peut calculer cela de deux manières. On peut soit supposer un courant dans la bobine a et calculer le flux à travers la bobine b , soit supposer un courant dans b et calculer le flux à travers a . D'après la partie 19.1, M prend la même valeur dans les deux cas. Or, si le courant est dans a , on sait comment calculer le champ en b grâce au deuxième exemple de la partie 14.2, puisque $b \ll a$. Au contraire, si le courant est dans b , le calcul est beaucoup plus difficile car on doit calculer $\mathbf{B}$ loin de l'axe. Ainsi, il vaut mieux calculer le flux magnétique à travers la bobine b engendré par un courant qui circule dans la bobine a .

(b) Comment l'inductance mutuelle varie-t-elle quand on tourne la petite bobine autour de l'axe vertical ?

(c) Et si on tournait la grande bobine autour d'un axe vertical ? L'inductance mutuelle varierait-elle de la même façon ?

19.6 Courants induits

Un courant azimutal est induit dans un tube conducteur de longueur l , de rayon moyen a et d'épaisseur b , avec $b \ll a$.

(a) Montrer que sa résistance et son inductance sont données par

$$R = 2\pi a / (\sigma b l), \quad L = \mu_0 \pi a^2 / l$$

(b) Calculer L , R , L/R pour un tube de cuivre ($\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$) de 1 m de long, 10 mm de diamètre et 1 mm d'épaisseur.

(R) 19.7 Blindage conducteur pour des champs magnétiques fluctuants

Il est souvent nécessaire de protéger les instruments contre les champs magnétiques parasites. Si le seul champ perturbateur est celui de la Terre, alors on peut monter une paire de bobines de Helmholtz (Problème 14.9) pour s'opposer au champ de la Terre. Si le champ est statique mais non uniforme, alors il faut utiliser un blindage réalisé avec un matériau de haute perméabilité. Des blindages multiples, à l'intérieur l'un de l'autre, sont meilleurs qu'un seul blindage épais. Une enceinte conductrice peut-elle être un bon blindage contre des champs magnétiques fluctuants ? La réponse est oui, comme on va le voir, mais seulement à des fréquences assez élevées. On imagine une situation simple où le champ magnétique extérieur B_{ext} est uniforme, avec $B_{\text{ext}} = B_{\text{ext},m} \exp j\omega t$. Le blindage est un tube long, parallèle aux lignes de $\mathbf{B}$, quelques fois plus long que son diamètre $2a$ et quelques fois plus long que la région blindée.

On suppose que le courant induit dans le blindage est uniformément distribué dans toute son épaisseur b . Autrement dit, on néglige l'effet de peau (Partie 22.6). Si cette hypothèse n'est pas valide, alors le blindage sera meilleur que ce calcul ne l'indique.

(a) Calculer la résistance R' du tube, par unité de longueur, dans la direction azimutale.

Calculer L .

(b) On prend $B_{\text{int}} = B_{\text{int},m} \exp j\omega t$ pour valeur de B à l'intérieur du tube, loin des extrémités. Trouver le rapport $B_{\text{int},m} / B_{\text{ext},m}$.

(c) Montrer que, si l'effet de peau est négligeable, ce rapport ne peut pas être inférieur à 0.5. Une enceinte conductrice agit donc comme blindage principalement grâce à l'effet de peau.

(R) 19.8 Le pont de Maxwell

La figure 19.9 représente un *pont de Maxwell*. Ce circuit sert à mesurer l'inductance L et la résistance R d'une bobine inductrice. On adapte les valeurs de R_b , R_c , R_d et C afin que V soit nulle.

Trouver L et R en fonction des autres composants.

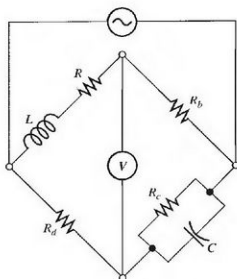


Figure 19.9

19.9 Impédance Z d'une inductance réelle

La figure 19.10 représente le circuit équivalent d'une inductance réelle où R , L et C dépendent de la géométrie de la bobine et de la nature des matériaux utilisés. Le fil a une résistance finie R , et il y a une capacité parasite C entre les spires.

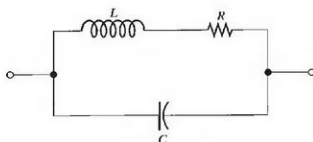


Figure 19.10

Poser $Z = R' + jX$ et calculer R' et jX . On négligera le fait que R' dépend de la fréquence à cause de l'effet de peau (Partie 22.6).

Si la fréquence $f = \omega/(2\pi)$ change, le point (R', X) dans le plan complexe se déplace. Tracer le lieu géométrique de Z dans le plan complexe avec $R = 1\,000\,\Omega$, $L = 100\,\text{mH}$ et $C = 100\,\text{pF}$ pour des fréquences autour de $1\,\text{MHz}$.

19.10 Résonances en série

La figure 19.11 représente un générateur de courant alternatif qui alimente un circuit RLC. Le circuit a deux paramètres importants :

$$\omega_r = \frac{1}{(LC)^{1/2}}, \quad \text{et} \quad Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}$$

où $\omega_r/(2\pi)$ est abusivement appelée la *fréquence de résonance*, et Q est le *facteur de qualité*, ou simplement le Q du circuit.

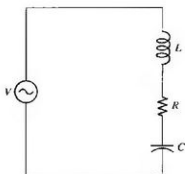
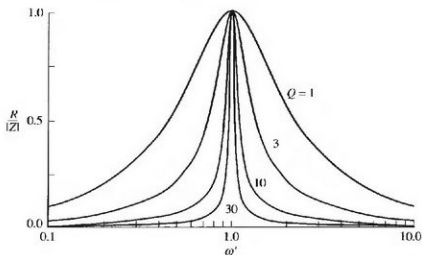


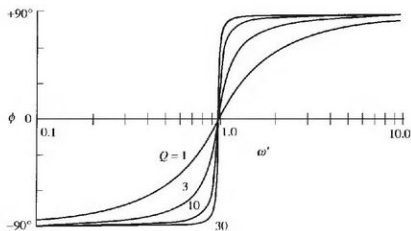
Figure 19.11

Calculer $Z = R + jX$ en fonction de ω . On se rappellera que les impédances en série et en parallèle sont traitées comme des résistances en série et en parallèle.

La figure 19.12 représente (a) le rapport $R/|Z|$ et (b) l'angle de phase $\phi = \arctan(X/R)$ en fonction de $\omega' = \omega/\omega_0$, pour $Q = 1; 3; 10$ et 30 .



(a)



(b)

Figure 19.12

À résonance, la composante imaginaire est nulle et $Z = R$.

Par définition, la *largeur du pic de résonance* est la différence Δf entre les fréquences pour lesquelles

$$R/|Z| = 1/2^{1/2} \simeq 0,7071, \quad \text{et} \quad \Delta f = f_r/Q$$

Plus Q est élevé, plus la résonance est étroite.

Par ailleurs, l'angle de phase, pour ce circuit,

$$\phi = \arctan \left[Q \left(\omega' - \frac{1}{\omega'} \right) \right]$$

varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$.

Chapitre 20

Champs magnétiques : énergie magnétique et forces magnétiques macroscopiques

Ce chapitre est le dernier portant spécifiquement sur les champs magnétiques. On y trouvera plusieurs expressions pour l'énergie magnétique emmagasinée dans un champ, puis on en déduira les forces exercées sur un corps parcouru par un courant et situé dans un champ magnétique d'origine extérieure. On suppose que les courants sont produits par le mouvement de charges libres et à basse fréquence.

20.1 EMMAGASINEMENT D'ÉNERGIE DANS UN CIRCUIT INDUCTIF

Le circuit de la Fig. 20.1 illustre l'emmagasinement d'énergie magnétique dans un circuit inductif. Le fil a une section uniforme $\mathcal{A}$ et une conductivité uniforme σ . Il n'y a pas de matériau ferromagnétique dans le champ, et le circuit est rigide et stationnaire. On suppose que $\epsilon_r = 1$ dans le fil.

- 1) Le courant est constant. À l'intérieur du fil, la densité volumique de charge est nulle et

$$E = |\text{grad } V| = \frac{J}{\sigma} \quad (20.1)$$

Les lignes de E , à l'intérieur, suivent le fil parallèlement à son axe.

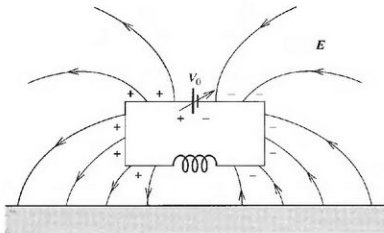


Figure 20.1 Bobine alimentée par une pile.

À la surface du fil, $\mathbf{E}$ a une composante normale et une composante tangentielle. Si le fil est situé dans le vide, la densité surfacique de charge libre est $\epsilon_0 E_n$, où E_n est la composante normale de $\mathbf{E}$ juste à l'extérieur. S'il se trouve dans un diélectrique, alors la densité surfacique de charge libre est $D_n = \epsilon_r \epsilon_0 E_n$.

En tout point de l'espace, $\mathbf{E}$ est proportionnel à V_0 . Bien entendu, $\mathbf{E}$ dépend aussi de la géométrie du circuit et des objets environnants.

En principe, on pourrait calculer V et $\mathbf{E}$ partout à partir de la densité surfacique de charge tout autour du circuit, générateur compris, et sur les corps environnants.

Si l est la longueur du fil, $\mathcal{A}$ sa section et R sa résistance $l/(\sigma \mathcal{A})$, alors

$$l |\mathbf{grad} V| = lE = \frac{lJ}{\sigma} = \frac{lI}{\mathcal{A}\sigma} = IR = V_0 \quad (20.2)$$

Une partie de la puissance fournie par le générateur sert à établir le champ magnétique, et le reste est dissipé en chaleur.

- 2) Mettons maintenant la tension V_0 du générateur à zéro et faisons-la croître doucement. Alors

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (20.3)$$

Le fil est maintenant plongé dans son propre champ $-\partial \mathbf{A}/\partial t$.

La relation $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ est encore valable, et J comme E sont uniformes partout dans le fil, comme auparavant. Cela signifie que les charges de surface se distribuent afin de maintenir un E uniforme à l'intérieur, malgré la présence du terme $\partial \mathbf{A}/\partial t$.

À l'intérieur des fils qui vont du générateur à la bobine, $\mathbf{A}$ est faible et

$$\mathbf{E} \approx -\mathbf{grad} V.$$

À l'intérieur du fil de la bobine, on a le même $\mathbf{E}$, mais il provient en partie de $-\mathbf{grad} V$, qui est orienté en direction de $\mathbf{J}$, et en partie de $-\partial \mathbf{A}/\partial t$, qui est orienté dans la direction opposée car $\mathbf{A}$ est orienté en direction de $\mathbf{J}$ et augmente.

Or, nous venons de voir que $IE = IR$. En intégrant E à l'intérieur du fil de la borne positive à la borne négative du générateur,

$$\int_+^- \left(-\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} = IR, \quad (20.4)$$

$$- \int_+^- \text{grad } V \cdot d\mathbf{l} - \int_+^- \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = IR \quad (20.5)$$

Puisque la première intégrale dans la dernière équation est égale à V_0 ,

$$V_0 = IR + \int_+^- \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = IR + \frac{d}{dt} \int_+^- \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = IR + \frac{d\Lambda}{dt} \quad (20.6)$$

On a utilisé le fait que l'intégrale curviligne de $\mathbf{A}$ est égale au flux total Λ (Partie 15.1).

À chaque instant la puissance fournie par le générateur est

$$IV_0 = I^2 R + I \frac{d\Lambda}{dt} \quad (20.7)$$

Le premier terme de droite est la puissance dissipée en chaleur, et le deuxième est le taux de croissance de l'énergie magnétique.

Donc, si $\mathcal{E}_m$ est l'énergie magnétique emmagasinée à un instant donné,

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = I \frac{d\Lambda}{dt} = I \frac{d(LI)}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{dI^2}{dt} \quad (20.8)$$

L'inductance L est une constante car on a supposé que le circuit est rigide et qu'il n'y a pas de matériau ferromagnétique à proximité. Évidemment, $\mathcal{E}_m = 0$ quand $I = 0$. Alors

$$\mathcal{E}_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Lambda}{2} \quad (20.9)$$

Si on a deux circuits a et b , alors

$$\mathcal{E}_{ma} + \mathcal{E}_{mb} = \frac{1}{2} (I_a \Lambda_a + I_b \Lambda_b) \quad (20.10)$$

$$= \frac{1}{2} [I_a (L_a I_a + M I_b) + I_b (I_a I_b + M I_a)] \quad (20.11)$$

$$= \frac{1}{2} L_a I_a^2 + \frac{1}{2} L_b I_b^2 + M I_a I_b \quad (20.12)$$

Exemple : Le solénoïde long

L'énergie magnétique emmagasinée dans un long solénoïde se déduit de la valeur de l'inductance propre que nous avons trouvée dans le premier exemple de la partie 19.2 :

$$\mathcal{E}_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\pi \mu_0 N^2 R^2 I^2}{2l} \quad (20.13)$$

Cf. exercices : 20.1 ; 20.2.

20.2 DENSITÉ D'ÉNERGIE MAGNÉTIQUE

On peut réécrire la dérivée temporelle de $\mathcal{E}_m$ de la façon suivante. L'inductance propre L est constante. Puisque $\Lambda = LI$,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= \frac{1}{2} \left(I \frac{d\Lambda}{dt} + \Lambda \frac{dI}{dt} \right) = I \frac{d\Lambda}{dt} = I \oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}\end{aligned}\quad (20.14)$$

$$= \int_V \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dV \quad (20.15)$$

où A est l'aire de la section du fil, C est la courbe définie par le fil et V est le volume du fil. Le volume V est fini.

Notons au passage que $\mathbf{J} \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) dV$ est le travail effectué en déplaçant les charges de conduction situées dans l'élément de volume dV contre le champ électrique $-\partial \mathbf{A} / \partial t$ pendant une seconde.

Considérons maintenant l'identité

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV = \int_V \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} dV \quad (20.16)$$

La première intégrale à droite est égale à $I d\Lambda/dt$, d'après l'Éq. 20.15, et à $d\mathcal{E}_m/dt$, aussi selon l'Éq. 20.15. De même, la deuxième intégrale est égale à $\Lambda dI/dt$, qui est identique à $I d\Lambda/dt$ si l'inductance est constante. Ainsi le membre de gauche est égal à $2I d\Lambda/dt$,

$$2 \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (20.17)$$

et

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (20.18)$$

où, encore, V est le volume du conducteur. Cette équation est valable seulement si la source est de taille finie.

S'il y a plusieurs circuits, alors l'intégrale est calculée sur tous et le potentiel vecteur dans un circuit est la somme des $\mathbf{A}$ de tous les circuits. On peut ajouter à $\mathbf{A}$ n'importe quelle quantité dont le rotationnel est nul sans affecter cette intégrale.

La densité d'énergie magnétique en un point peut donc être écrite

$$\mathcal{E}'_m = \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \quad (20.19)$$

Pour exprimer l'énergie magnétique en termes de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{B}$, on utilise l'Éq. 20.9 et on l'applique à la boucle de la Fig. 20.2. La spire se trouve dans un milieu magnétique homogène, isotrope, linéaire et statique (HILS). Cela exclut les milieux ferromagnétiques. D'après le théorème de la circulation d'Ampère,

$$I = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (20.20)$$

où C' est une ligne de $\mathbf{H}$ quelconque.

Par ailleurs, soit $\mathcal{A}$ l'aire d'une surface ouverte quelconque délimitée par la spire C et orthogonale aux lignes de champ de $\mathbf{H}$ et de $\mathbf{B}$. Alors

$$\Lambda = \Phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (20.21)$$

et, d'après l'Éq. 20.9,

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} I \Lambda = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (20.22)$$

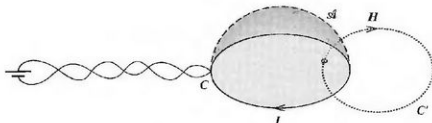


Figure 20.2 Boucle de fil C à une spire, parcourue par un courant I . La ligne pointillée est une ligne typique de $\mathbf{H}$. La surface ouverte d'aire $\mathcal{A}$, délimitée par C , est partout orthogonale à $\mathbf{H}$.

Or, les lignes de champ de $\mathbf{H}$ et l'ensemble des surfaces ouvertes définissent un système de coordonnées dans lequel $d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{A}$ est un élément de volume où $d\mathbf{l}$ et $d\mathbf{A}$ sont tous deux parallèles à $\mathbf{H}$. Aussi, pour chaque déplacement élémentaire $d\mathbf{l}$ le long de la ligne de $\mathbf{H}$ choisie, on intègre sur toute la surface correspondante. Puisque le champ s'étend à l'infini, cette intégrale double est l'intégrale de volume de $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ sur tout l'espace et

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (20.23)$$

La densité d'énergie magnétique dans des milieux non ferromagnétiques est donc

$$\mathcal{E}'_m = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (20.24)$$

La densité d'énergie magnétique varie comme B^2 . Donc, après avoir superposé plusieurs champs, l'énergie totale du champ n'est pas égale à la somme des énergies individuelles. Voir l'Éq. 20.12.

On peut comparer cette partie avec la partie 6.2.

Exemple : Le solénoïde long

En négligeant les effets de bord, on trouve que l'énergie magnétique emmagasinée dans le champ d'un long solénoïde dans l'air est

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 N' I)^2 \pi R^2 l = \frac{\pi R^2 \mu_0 N'^2 I^2}{2l} \quad (20.25)$$

comme dans l'exemple de la partie 20.1.

Cf. exercice 20.3.

20.3 INDUCTANCE PROPRE D'UNE DISTRIBUTION VOLUMIQUE DE COURANT

On a vu dans la partie 19.2 que l'inductance propre d'un circuit contenant des fils infiniment fins est infinie. Un circuit *réel* contient des conducteurs de section finie et son inductance propre L , par définition, est proportionnelle à l'énergie emmagasinée :

$$\frac{1}{2} L I^2 = \mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\infty} B^2 dV \quad (20.26)$$

Donc

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int_{\infty} B^2 dV \quad (20.27)$$

Exemple : Le câble coaxial

Supposons que la fréquence est assez basse pour que le courant se répartisse uniformément sur toute la section des conducteurs, et négligeons les effets de bord.

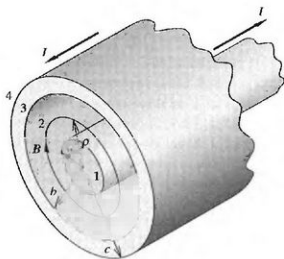


Figure 20.3 Un câble coaxial.

On calcule successivement les énergies magnétiques linéiques du câble dans les régions 1, 2, 3, 4 comme en Fig. 20.3, puis on écrit que la somme est égale à $L'I^2/2$, où L' est l'inductance propre par mètre. Les lignes de $\mathbf{B}$ sont des cercles centrés sur l'axe.

- 1) Région 1. D'après le théorème de la circulation d'Ampère (Parties 15.4 et 16.3), au rayon $\rho \leq a$

$$2\pi\rho B_1 = \mu_0 I \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} \quad (20.28)$$

et l'énergie magnétique par unité de longueur est

$$\mathcal{E}'_{m1} = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^a \left(\frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2 \quad (20.29)$$

2) Région 2, où $a \leq \rho \leq b$. Ici

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}, \quad \mathcal{E}'_{m2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (20.30)$$

3) Région 3. On a besoin du courant net qui s'écoule dans un chemin circulaire avec $b \leq \rho \leq c$. C'est I moins la partie du courant dans le conducteur externe qui s'écoule entre les rayons b et ρ . Donc

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \left(1 - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \quad (20.31)$$

$$\mathcal{E}'_{m3} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \quad (20.32)$$

4) Région 4. D'après le théorème de la circulation d'Ampère, le champ est nul dans cette région.

Finalement, l'inductance propre par unité de longueur du câble coaxial est

$$L' = \mu_0 \left\{ \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \right\} \quad (20.33)$$

Le deuxième terme entre les accolades provient de $\mathcal{E}'_{m2}$ et est en général prédominant.

Cf. exercice 20.4.

20.4 FORCE ET COUPLE ENTRE DEUX CIRCUITS PARCOURUS PAR DU COURANT

Dans un circuit unique isolé, on a des forces magnétiques car le courant dans une partie du circuit s'écoule dans le champ magnétique du reste du circuit. Par exemple, si le circuit est une simple spire alors la force magnétique sur le fil tend à dilater la spire.

On a trouvé une intégrale pour la force entre deux circuits parcourus par du courant dans la partie 17.3. Cependant, comme nous l'avons remarqué à ce moment-là, l'intégrale est difficile à calculer.

Ici on exprime la force et le couple entre deux circuits en termes de leur inductance mutuelle. L'inductance mutuelle est aussi difficile à calculer que la force, mais elle est facile à mesurer, bien plus que la force elle-même. Ce faisant, on trouvera que chaque fois qu'on modifie la géométrie d'un circuit ou d'une paire de circuits, exactement la moitié de l'énergie fournie par le générateur, en dehors des pertes Joule et des autres pertes, est convertie en énergie magnétique tandis que l'autre moitié fournit le travail mécanique.

On considère deux circuits parcourus par des courants I_a et I_b dans la même direction, comme en Fig. 20.4. La force magnétique est telle que les spires tendent à se rapprocher

l'une de l'autre. Elles sont fixées en position par des forces mécaniques de maintien. Tous les matériaux sont non-magnétiques.

Supposons maintenant une petite translation virtuelle (Partie 6.8) d'un circuit, sans rotation. Puisqu'il y a conservation de l'énergie, l'énergie dépensée par les générateurs est égale à la croissance de l'énergie magnétique plus le travail mécanique effectué. Le déplacement s'effectue lentement, ce qui évite d'avoir à prendre en considération l'énergie cinétique.

Pour simplifier le calcul, on suppose que les courants sont constants. Cette hypothèse n'affecte pas le résultat. On a rencontré une situation similaire en électrostatique.

La spire b se déplace d'une distance dr vers la spire a . Seule M change et, d'après l'Éq. 20.12, l'énergie magnétique croît de

$$d\mathcal{E}_m = I_a I_b dM = I_a d\Lambda_{ba} = I_b d\Lambda_{ab}, \quad (20.34)$$

Λ_{ba} étant le flux engendré par b à travers a , et inversement pour Λ_{ab} . Puisque M est positive (Partie 19.1) et augmente, $d\mathcal{E}_m$ est positive.

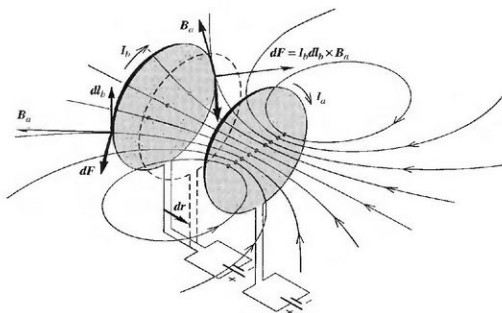


Figure 20.4 Deux spires parallèles.

Ces spires portent des courants I_a et I_b avec des lignes de champ $\mathbf{B}$ typiques provenant de la spire a . La force élémentaire $d\mathbf{F}$ possède une composante en direction de a et $\mathbf{F}$ est attractive.

Considérons maintenant l'énergie supplémentaire fournie par les générateurs. Dans la spire b , le flux croît et la force électromotrice induite tend à engendrer un champ magnétique qui s'oppose à cette croissance. Par conséquent la force électromotrice induite dans b tend à s'opposer à I_b . Pour maintenir ce courant constant, sa source fournit la tension supplémentaire $d\Lambda_{ab}/dt$ et l'énergie supplémentaire

$$d\mathcal{E}_{sb} = I_b \frac{d\Lambda_{ab}}{dt} dt = I_b d\Lambda_{ab} = I_b I_a dM \quad (20.35)$$

Par symétrie, $d\mathcal{E}_{su}$ est identique, et l'énergie supplémentaire fournie par les deux générateurs est

$$d\mathcal{E}_s = 2I_a I_b dM \quad (20.36)$$

qui est exactement deux fois l'augmentation d'énergie magnétique. Le reste a été converti en travail mécanique. En d'autres termes, l'énergie fournie par les générateurs se partage également entre énergie mécanique et énergie magnétique. Voir l'exemple dans la partie 6.8.

Si $\mathbf{F}_{ab}$ est la force que la spire a exerce sur la spire b , alors le travail mécanique effectué est

$$\mathbf{F}_{ab} \cdot d\mathbf{r} = I_a I_b dM \quad (20.37)$$

Comme la quantité à droite est positive, $\mathbf{F}_{ab}$ est orienté vers la spire a , comme $d\mathbf{r}$, ce qui est juste.

La composante x de la force est

$$F_{abx} = I_a I_b \frac{\partial M}{\partial x} \quad (20.38)$$

où dx est la composante x de $d\mathbf{r}$. Cette équation s'applique à une paire de circuits quelconque.

C'est une expression alternative pour la force que nous avons trouvée en partie 17.3. On peut montrer que les deux expressions sont égales de la façon suivante. Déplaçons le circuit b globalement, sans rotation, parallèlement à l'axe x . Alors

$$F_{abx} = -I_a I_b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r} \right) \quad (20.39)$$

où r est la distance de $d\mathbf{l}_a$ à $d\mathbf{l}_b$. La dérivée par rapport à x n'agit que sur le terme $1/r$ dans l'intégrale, car les vecteurs $d\mathbf{l}$ ne sont pas affectés par une translation du circuit b . Donc

$$F_{abx} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r^3} \quad (20.40)$$

et, plus généralement,

$$\mathbf{F}_{ab} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \mathbf{r} \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \mathbf{r} \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r^2} \quad (20.41)$$

comme dans la partie 17.3.

Comme le terme de droite de l'Éq. 20.37 est l'augmentation de l'énergie magnétique, on peut aussi écrire que

$$\mathbf{F}_{ab} \cdot d\mathbf{r} = d\mathcal{E}_m \quad (20.42)$$

en se rappelant que la force s'exerce dans la direction qui *augmente* l'énergie magnétique. De même,

$$F_{abx} = \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial x} \quad (20.43)$$

Par analogie un circuit a qui forme un angle θ avec un autre circuit b exerce sur b un couple

$$C = I_a I_b \frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta} \quad (20.44)$$

Le couple tend à *augmenter* à la fois l'inductance mutuelle M et l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m$.

Exemple : La force entre deux solénoïdes coaxiaux

La figure 20.5 représente deux solénoïdes coaxiaux, l'un d'eux s'étendant sur une distance l à l'intérieur de l'autre. L'inductance mutuelle est positive. La force nette est axiale et attractive, comme on peut le voir sur la Fig. 20.6. Rappelons que la force entre deux courants parallèles qui s'écoulent dans la même direction est attractive.

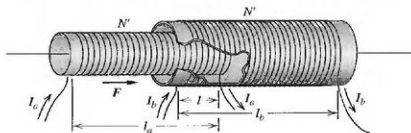


Figure 20.5 Deux solénoïdes coaxiaux de diamètres approximativement égaux. La force F est attractive quand les courants s'écoulent dans la même direction. Les solénoïdes ont le même nombre de spires par mètre N' .

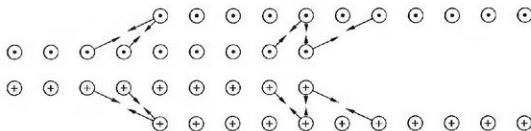


Figure 20.6 Coupe d'une partie des solénoïdes de la Fig. 20.5. Il y a une force attractive aux extrémités des solénoïdes.

Nous ne pouvons pas effectuer un calcul rigoureux de la force, car elle dépend évidemment des effets de bord que nous avons négligés jusqu'à maintenant. Cependant, on peut en trouver une expression approchée en appliquant les formules trouvées ci-dessus.

On suppose que le champ d'un solénoïde s'arrête brusquement à l'extrémité. Alors

$$M = \frac{N' l \Phi_{ba}}{I_b} = \frac{N' l \Phi_{ab}}{I_a} \quad (20.45)$$

Pour une section d'aire $\mathcal{A}$,

$$M = \frac{(N'I)(\mu_0 N' I_b \mathcal{A})}{I_b} = \mu_0 N'^2 \mathcal{A} l \quad (20.46)$$

$$F = I_a I_b \frac{\partial M}{\partial l} = \mu_0 N'^2 \mathcal{A} I_a I_b \quad (20.47)$$

La force est attractive car M augmente avec l .

Calculons maintenant la force à partir de $\partial \mathcal{E}_m / \partial l$:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\infty} B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} [B_a^2(l_a - l) + B_b^2(l_b - l) + (B_a + B_b)^2 l] \mathcal{A} \quad (20.48)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} (B_a^2 l_a + B_b^2 l_b + 2B_a B_b l) \mathcal{A} \quad (20.49)$$

où $B_a = \mu_0 N' I_a$ est engendré par le solénoïde a , et de même pour b . Alors

$$F = \frac{d\mathcal{E}_m}{dl} = \frac{B_a B_b \mathcal{A}}{\mu_0} = \mu_0 N'^2 \mathcal{A} I_a I_b \quad (20.50)$$

Observons que la force serait nulle si $\mathcal{E}_m$ était proportionnelle à B .

Exemple : Couple magnétique sur une spire de courant

Une spire rectangulaire b parcourue par un courant I_b se trouve dans un champ $\mathbf{B}$ uniforme dans l'air, comme en Fig. 20.7. On calcule le couple à l'angle θ .

- 1) La procédure la plus simple ici est de calculer le couple à partir de la force magnétique $I_b d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ sur l'élément de fil $d\mathbf{l}$ comme dans la partie 17.2 :

$$T = 2(a/2) \sin \theta B I_b b = B I_b \mathcal{A} \sin \theta \quad (20.51)$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire de la spire. Le couple agit dans la direction des θ positifs.

- 2) Utilisons maintenant l'Éq. 20.44. Soit I_a le courant inconnu qui fournit le champ $\mathbf{B}$. Alors

$$M = -\frac{B \mathcal{A} \cos \theta}{I_a} \quad (20.52)$$

On a besoin ici d'un signe négatif car le flux $B \mathcal{A} \cos \theta$ traverse la spire dans la direction opposée à celle du flux d'un courant I_b s'écoulant dans la spire comme sur la figure. Alors

$$C = I_a I_b \frac{\partial M}{\partial \theta} = -I_b \frac{d}{d\theta} (B \mathcal{A} \cos \theta) = B I_b \mathcal{A} \sin \theta \quad (20.53)$$

Le signe positif signifie que le couple tend à augmenter θ et donc à augmenter M .

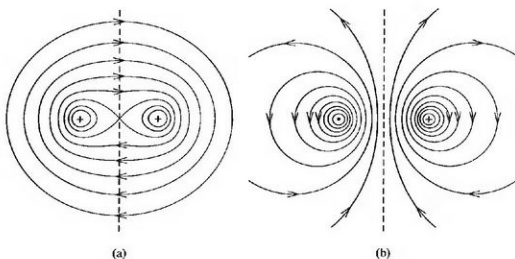


Figure 20.7 Spire parcourue par un courant I_b dans un $\mathbf{B}$ constant. Le couple magnétique tend à faire tourner la spire dans la direction de la flèche de θ .

Cf. exercice 8.5.

20.5 PRESSION MAGNÉTIQUE

Nous revenons au concept de *pression magnétique* discuté au paragraphe 17.4, en utilisant maintenant une approche différente.

Si le courant s'écoule à travers une plaque conductrice, alors il est approprié de penser en termes de *pression magnétique*. Imaginons une plaque conductrice, dans l'air, portant α A/m et située dans un champ magnétique tangentiel uniforme $\mathbf{B}/2$ engendré par des courants qui s'écoulent ailleurs, comme en Fig. 20.8(a), avec α normal à $\mathbf{B}$. La force par unité de surface est $\alpha \times \mathbf{B}/2$.

Augmentons maintenant α jusqu'à ce que son champ annule le champ ambiant d'un côté et le double de l'autre côté, comme en Fig. 20.8(b). Alors, d'après le problème 15.4, $\alpha' = B/\mu_0$ et la force par unité de surface, ou la pression, vaut

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (20.54)$$

Cela est valable pour toute surface de courant avec un $\mathbf{B}$ nul d'un côté.

La pression est égale à la densité d'énergie, comme pour les champs électriques (Partie 6.7). Cette pression tend à *éloigner* la surface de courant du champ. Du côté du champ, les lignes de $\mathbf{B}$ sont parallèles à la surface et se repoussent latéralement.

Au contraire, la « pression » électrique pousse une surface chargée *vers* le champ car les lignes de champ électrique « sont sous tension ». Par exemple, les plaques d'un condensateur à faces planes et parallèles isolé avec un diélectrique compriment le diélectrique. Voir les parties 6.7 et 6.8.

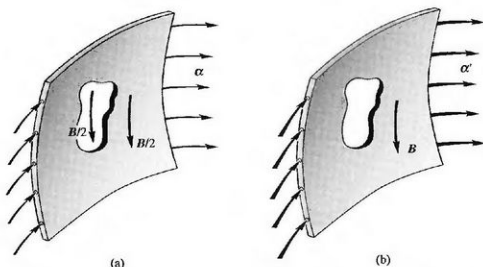


Figure 20.8 (a) Une plaque conductrice portant une densité surfacique de courant négligeable α A/m se trouve dans un champ magnétique uniforme $B/2$ qui provient d'ailleurs. (b) La densité surfacique de courant α' est maintenant telle que le B total sur la face antérieure a doublé, tandis que le B total sur la face postérieure est nul.

Exemple : Pression magnétique dans un long solénoïde

La figure 20.9 montre une vue de l'extrémité d'un solénoïde. On utilise la méthode du travail virtuel (Partie 6.8) pour montrer que la pression magnétique vaut $B^2/(2\mu_0)$. Imaginons que le courant reste constant, tandis que la pression magnétique augmente le rayon de R à $R + dR$. Alors, pour un solénoïde de longueur l , l'énergie magnétique augmente de

$$d\mathcal{E}_m = \frac{B^2}{2\mu_0} l 2\pi R dR \quad (20.55)$$

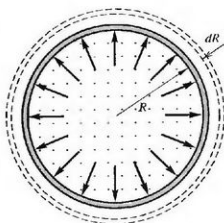


Figure 20.9 Vue de l'extrémité d'un solénoïde.

Les points représentent les lignes de champ de B , normales au plan de la feuille. Les flèches indiquent comment la pression magnétique tend à éloigner le bobinage du champ.

Cette grandeur est égale au travail mécanique effectué par la pression magnétique p sur une aire $2\pi Rl$ pour un déplacement dR , et

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (20.56)$$

Cf. exercices : 20.6 ; 20.7 ; 20.8 ; 20.9 ; 20.10 ; 20.11 ; 20.12 ; 20.13 ; 20.14 ; 20.15 ; 20.16.

20.6 FORCES MAGNÉTIQUES SUR DES CONDUCTEURS EN MOUVEMENT DANS DES CHAMPS MAGNÉTIQUES

La densité de force magnétique en un point à l'intérieur d'un conducteur qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ est

$$\mathbf{F}'_{\text{magn}} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \times \mathbf{B} \quad (20.57)$$

$$= \sigma [\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \quad (20.58)$$

$$= \sigma (\mathbf{E} \times \mathbf{B} - B^2 \mathbf{v}_{\perp}) \quad (20.59)$$

où $\mathbf{v}_{\perp}$ est la composante de la vitesse du conducteur en mouvement qui est perpendiculaire au $\mathbf{B}$ local. Nous avons utilisé la loi d'Ohm pour les conducteurs en mouvement de la partie 17.5.

La densité de force magnétique sur un conducteur en mouvement a donc deux composantes. La première composante est perpendiculaire à $\mathbf{B}$, et peut être orientée dans n'importe quelle direction par rapport à la vitesse locale $\mathbf{v}$ du fluide. La deuxième composante est proportionnelle à $-\mathbf{v}_{\perp}$, elle est analogue à une force visqueuse de freinage : elle essaye d'annuler la composante de la vitesse qui est perpendiculaire à $\mathbf{B}$. Cette deuxième composante est proportionnelle au B local au carré.

Dans un fluide conducteur en convection, comme la partie liquide du noyau terrestre, les forces magnétiques dépendent de l'énergie en perturbant la structure de l'écoulement. Elles n'affectent pas seulement la vitesse $\mathbf{v}$, mais aussi $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, et donc la densité de charge électrique ρ de la partie 17.6. En conséquence elles modifient le potentiel électrique V et son gradient $\text{grad } V$, qui à son tour altère la densité de courant $\mathbf{J}$, et donc $\mathbf{B}$. En outre, un changement de $\mathbf{J}$ modifie l'énergie magnétique emmagasinée et les pertes Joule ! Ainsi toutes ces variables sont intimement liées les unes aux autres.

En l'absence de champ électrique, la force magnétique se réduit au terme « visqueux ».

20.7 RÉSUMÉ

Quand un courant I s'écoule dans un circuit d'inductance propre L , l'énergie magnétique emmagasinée dans le champ peut être exprimée de plusieurs façons :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (20.9, 20.23)$$

où Λ est le flux magnétique total et où l'intégration est effectuée sur tout l'espace. Par ailleurs, pour une distribution de courant finie,

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (20.18)$$

où V est le volume occupé par le courant.

La densité d'énergie peut donc s'écrire comme

$$\mathcal{E}'_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (20.24)$$

On définit l'inductance propre d'un circuit réel contenant des courants distribués sur un volume fini en termes de l'énergie magnétique emmagasinée dans le champ :

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int_{\infty} B^2 dV \quad (20.27)$$

La composante x de la force exercée sur un circuit b située dans le champ d'un autre circuit a est

$$F_{abx} = I_a I_b \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial x} \quad (20.38, 20.43)$$

La force pousse dans la direction qui augmente à la fois M et l'énergie magnétique.

De même, le couple est donné par

$$C = I_a I_b \frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta} \quad (20.45)$$

Si le courant qui s'écoule à travers une plaque conductrice située dans un champ magnétique est tel que l'induction magnétique vaille $\mathbf{B}$ d'un côté et zéro de l'autre, alors la pression magnétique sur la plaque vaut $B^2/(2\mu_0)$. La pression tend à éloigner la plaque du champ.

La densité de force magnétique sur un conducteur qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ est

$$\mathbf{F}'_{\text{magn}} = \sigma (\mathbf{E} \times \mathbf{B} - B^2 \mathbf{v}_{\perp}) \quad (20.60)$$

EXERCICES

20.1 Énergie moyenne emmagasinée dans des condensateurs et dans des inductances

Les énergies moyennes emmagasinées dans des condensateurs et des inductances sont respectivement $CV^2/2$ et $LI^2/2$, où V et I sont des grandeurs efficaces.

Montrer que, pour une pulsation $\omega = 2\pi f$,

$$\mathcal{E}_{C,\text{moy}} = \frac{I^2}{2\omega^2 C}, \quad \mathcal{E}_{L,\text{moy}} = \frac{V^2}{2\omega^2 L}$$

Ⓡ 20.2 Champs magnétiques pulsés

Des champs magnétiques extrêmement élevés peuvent être obtenus en déchargeant un condensateur à travers une bobine de faible inductance. Les bornes du condensateur doivent bien entendu avoir une inductance faible. De tels condensateurs rapides coûtent environ 5 Euros par joule d'énergie potentiellement emmagasinée.

- Estimer le coût d'un condensateur qui pourrait emmagasiner une énergie égale à celle d'un champ magnétique de 100 T dans un volume de 1 l.
- Estimer le coût de l'électricité nécessaire pour charger les condensateurs.

20.3 Stockage d'énergie

Comparer les énergies par unité de volume dans (a) un champ magnétique de 1,0 T et (b) un champ électrostatique de 10^6 V/m.

20.4 L'inductance d'un câble coaxial dépend légèrement de la fréquence

Les courants à haute fréquence ne pénètrent pas dans un conducteur comme des courants de basse fréquence. C'est l'effet de peau (Partie 22.6). L'inductance propre d'un câble coaxial augmente-t-elle ou décroît-elle avec la fréquence ?

Ⓡ 20.5 Trains à lévitation magnétique

La suspension et la propulsion des trains devient un problème important à des vitesses supérieures à 300 km/h. Les roues sont alors mal adaptées car les vibrations du véhicule, l'endommagement des voies et les pertes de puissance deviennent excessives. La force de traction se détériore également quand la vitesse augmente.

Un coussin d'air fournit une suspension satisfaisante à grande vitesse mais consomme énormément de puissance. La propulsion nécessite alors soit un propulseur soit un moteur électrique linéaire, avec le stator dans la voie.

Il est aussi possible de soulever un véhicule grâce aux forces magnétiques, et plusieurs méthodes ont été développées. Dans l'une d'elles, des bobines supraconductrices dans le véhicule engendrent un champ magnétique qui s'étend jusque dans la voie, qui est une plaque d'aluminium. Au repos et à basse vitesse, le véhicule utilise des roues. Quand la vitesse augmente, les courants de Foucault induits dans la voie par le champ magnétique en mouvement exercent une force de répulsion sur les courants dans les bobines du véhicule, et le véhicule vole à environ 10 cm au-dessus de la voie. Il y a, bien entendu, des problèmes de stabilité. La suspension n'est pas non plus exempte de pertes car il y a des pertes Joule dans la voie.

On considère une forme simplifiée de lévitation. Une paire de bobines parallèles et coaxiales de rayon R à N spires sont séparées par une distance D . La bobine inférieure simule la voie. Pour $D \approx 0, 1R$, l'inductance mutuelle est donnée par $N^2 \{2, 154 - 12, 04 [(D/R) - 0, 1]\} R \mu\text{H}$.

- Calculer le nombre d'ampères-spires nécessaire dans chaque bobine pour soulever une masse d'une tonne quand $R = 1$ m.
- Schématiser les deux bobines et les lignes de $\mathbf{B}$. Expliquer qualitativement la force de répulsion.

20.6 Force entre deux barres de commutation parallèles de section finie

Deux barres de commutation parallèles, de même section circulaire, sont parcourues par un même courant I . Le courant est uniformément distribué sur la section.

Montrer, sans aucun calcul, que la force est la même que si les barres étaient des fils fins.

20.7 Ligne de transport d'électricité supraconductrice

Quelqu'un a proposé une ligne de transport d'électricité supraconductrice qui délivrerait 100 GW de puissance continue à 200 kV sur 1 000 km. Les conducteurs auraient un diamètre de 25 mm et leurs centres seraient distants de 50 mm.

- Calculer la force magnétique par mètre. Voir le problème précédent. Il est évidemment préférable d'utiliser un câble coaxial.
- Calculer l'énergie emmagasinée en kilowatt-heure. L'inductance propre par mètre vaut $[\mu_0/(4\pi)] [1 + 4 \ln(D/R)]$.

R 20.8 Stockage d'énergie à grande échelle dans des inductances et dans des condensateurs

Beaucoup de travail a été effectué sur le stockage d'énergie à grande échelle dans des inductances pour les services publics. Un auteur propose une gigantesque inductance souterraine refroidie, qui fonctionnerait à un champ de 14 T.

- Calculer la densité d'énergie en kW.h/m^3 .
- Calculer la pression magnétique en atmosphère ($1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$).
- Il semble plus raisonnable de stocker l'énergie dans un condensateur, car celui-ci n'a pas besoin d'être refroidi et car la force est orientée vers l'intérieur, pas vers l'extérieur comme dans une inductance. Calculer la densité d'énergie en kW.h/m^3 si $\epsilon_r = 3$ et si la rigidité du diélectrique vaut $1,5 \times 10^8 \text{ V/m}$.

L'essence peut contenir plus de 100 kW.h/m^3 , et les volants d'inertie plus de 200.

20.9 Travail mécanique effectué par des forces mécaniques sur un circuit déformable, actif et isolé

On a montré dans la partie 20.4 que, si un circuit actif se déplace par rapport à un autre, le travail mécanique effectué par les générateurs est égal à l'augmentation de l'énergie magnétique si les courants sont maintenus constants. En conséquence, la force entre deux circuits actifs est donnée par le taux d'augmentation de l'énergie magnétique.

Montrer que, si la géométrie d'un circuit actif isolé change, l'énergie fournie par les générateurs se partage de la même façon. On supposera encore que le courant est constant. Avec cette hypothèse, il vient que la force sur un élément de circuit actif est égale au taux d'augmentation de l'énergie magnétique.

20.10 Force de compression axiale sur un solénoïde

- Montrer qualitativement, de deux façons différentes, que les spires d'un solénoïde tendent à se comprimer longitudinalement.
- Calculer la force de compression axiale sur un solénoïde long.

20.11 Pression magnétique

- Montrer que la pression magnétique vaut environ $4B^2 \text{ atm}$. Une atmosphère correspond approximativement à 10^5 Pa . L'induction magnétique dépasse rarement 1 T.
- Trouver l'expression correspondante pour un champ électrique. Le champ électrique maximal qui peut être maintenu dans l'air à température et pression normales est d'environ $3 \times 10^6 \text{ V/m}$.
- Discuter les ressemblances et les différences entre la pression magnétique et la force électrique par unité de surface.

20.12 Pression magnétique

Il est possible d'arriver à des pressions très élevées en déchargeant un grand condensateur à travers un fil creux.

(a) Montrer que, pour un tube fin de rayon R parcouru par un courant I , la pression magnétique vers l'intérieur s'écrit

$$p_m = \mu_0 I^2 / (8\pi^2 R^2)$$

(b) Calculer la pression pour un courant de 30 kA dans un tube d'un millimètre de diamètre. Une atmosphère vaut approximativement 10^5 Pa.

20.13 Obturateur magnétique

Les champs magnétiques peuvent effectuer des tâches mécaniques qui demandent un niveau de puissance élevé pendant un temps très bref. Par exemple, la pression magnétique peut déformer un tube léger en aluminium qui agit comme un obturateur afin d'éteindre un faisceau de lumière ou de rayons X mous. Le tube est placé dans une bobine, parallèlement à l'axe. Quand la bobine est connectée brusquement à un grand condensateur, la variation du flux induit un courant élevé dans le tube, qui s'écrase sous l'effet de la pression magnétique.

On veut calculer la pression. Si le courant I dans le solénoïde augmente graduellement de zéro à une valeur élevée, le courant induit est petit et la pression magnétique est négligeable. On suppose que dI/dt dans la bobine est tellement grand que le courant induit dans le tube maintient un champ nul à l'intérieur. Il n'y a alors de champ magnétique B que dans la région annulaire entre le solénoïde et le tube conducteur.

(a) Calculer la pression sur le tube en atmosphères à 1 T.

(b) Quelle serait la pression si le tube conducteur était parallèle à l'axe mais décalé ?

20.14 Compression du flux

La compression du flux est une méthode pour obtenir des champs magnétiques élevés. Par exemple, on peut insérer un tube conducteur léger dans le champ B_0 d'un solénoïde puis faire imploser le tube grâce à une charge explosive annulaire située entre le tube et le solénoïde. Des courants circulent dans le tube et la pression magnétique augmente jusqu'à devenir égale à la pression externe du gaz. Le solénoïde est alimenté par un générateur de courant constant.

On négligera les énergies mécaniques, thermiques et acoustiques ainsi que les effets de bord. Soit a le rayon initial et b le rayon final du tube.

(a) Montrer que, si le rayon du tube diminue très rapidement, B à l'intérieur augmente jusqu'à approximativement $B_0(a^2/b^2)$. Par exemple, si $B_0 = 10$ T et si $a/b = 10$, alors $B = 1\,000$ T.

(b) Calculer la densité surfacique de courant sur le tube tout à la fin de la compression.

(c) Calculer l'augmentation de l'énergie magnétique, l'énergie apportée au générateur pendant la compression et l'énergie de l'explosif nécessaire. Le tube fait 200 mm de long et son rayon initial est de 50 mm.

20.15 Couple sur une bobine parcourue par un courant

(a) Montrer qu'une bobine parcourue par un courant tend à s'orienter dans un champ magnétique de façon à maximiser le flux magnétique total qui la traverse.

(b) Montrer que le couple qui s'exerce sur la bobine est $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$, où $\mathbf{m}$ est le moment magnétique de la bobine et $\mathbf{B}$ est l'induction magnétique quand le courant dans la bobine est nul.

Un aimant permanent cylindrique se comporte de la même manière.

20.16 Séparation par un gradient magnétique élevé

On peut séparer des particules magnétiques en suspension dans un fluide en faisant passer le mélange à travers de la laine d'acier soumise à un champ magnétique élevé. Les particules magnétiques se collent aux fils d'acier où le gradient du champ est grand. On peut aussi utiliser un quadrillage de fils d'acier fins perpendiculaires à $\mathbf{B}$.

Avec un champ de l'ordre de plusieurs tesla fourni par des bobines supraconductrices, la séparation se fait même avec des matériaux qui ne sont que légèrement magnétiques. La méthode est aussi applicable dans l'air pour enlever des particules magnétiques, par exemple dans du charbon pulvérisé.

Voyons comment un petit dipôle magnétique se comporte dans un $\mathbf{B}$ non uniforme. Le dipôle s'oriente d'abord. Ensuite, comme on va le voir, il tend à se déplacer dans la direction dans laquelle le champ appliqué $\mathbf{B}$ augmente.

La figure 20.10 montre une petite spire de courant de rayon R qui est déjà orientée dans un champ $\mathbf{B}$ qui augmente symétriquement autour de la direction positive de l'axe z .

- Montrer, sans aucun calcul, que la force magnétique est orientée vers la droite. On notera que cette force tend à *augmenter* le flux à travers la spire.
- Montrer que $F = 2\pi RIB_p$, où B_p est la composante de $\mathbf{B}$ qui est normale à l'axe z .
- On considère maintenant un petit volume d'épaisseur Δz , comme sur la figure. Utiliser le fait que le flux sortant net de $\mathbf{B}$ est nul pour trouver B_p et F .
- Calculer la force à partir du taux d'augmentation de l'énergie magnétique.

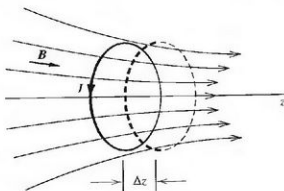


Figure 20.10

Chapitre 21

Les équations de Maxwell

Ce chapitre concerne les quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme, qui portent le nom de James Clerk Maxwell (1831-1879), mais auxquelles il aurait plutôt fallu donner le nom de Heaviside (1850-1925); voir l'annexe C.

21.1 L'ÉQUATION POUR LE ROTATIONNEL DE **B**

Dans la partie 15.4 on a trouvé que, en un point donné de l'espace où la densité de courant est **J**,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (21.1)$$

Cependant, nous avons prévenu le lecteur que la relation n'est valable que pour des champs statiques. Il doit donc manquer un terme dans cette équation.

Rappelons-nous maintenant la partie 13.2, où nous avons trouvé les champs **E** et **B** en un point *P* proche d'une charge *Q* en mouvement à la vitesse **V**, comme sur la Fig. 13.2. En *P*, il y a à la fois un champ **E** et un champ **B** :

$$\mathbf{E} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (21.2)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q \mathbf{V} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (21.3)$$

Le vecteur **E** est orienté vers l'extérieur dans la direction du vecteur unitaire $\hat{\mathbf{r}}$, tandis que **B** est azimutal, comme sur les Figs. 13.2 et 13.3.

Évidemment, les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ ci-dessus sont étroitement liés mathématiquement. En effet, on montre dans le problème 21.1 que, dans ce cas spécifique,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (21.4)$$

Les équations 21.1 et 21.4 sont complémentaires, et l'équation de Maxwell complète possède deux termes à droite :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (21.5)$$

Le terme $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ est la *densité de courant de déplacement* au point P , dans le vide. Voir aussi la partie 7.10.

Voir Bork [4] pour l'histoire de $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$.

Cf. exercices : 21.1 ; 21.2.

21.2 LES ÉQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME LOCALE

Groupons les quatre équations de Maxwell ensemble. Nous les avons trouvées successivement dans les parties 3.7, 18.2, 14.3 et 21.1 ci-dessus :

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (21.6)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (21.7)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (21.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (21.9)$$

Nous avons écrit les termes concernant les champs à gauche et ceux concernant les sources à droite, mais cela est trompeur car $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, ρ et $\mathbf{J}$ sont tous intimement liés.

Les équations ci-dessus sont générales dans la mesure où le milieu peut être inhomogène, non linéaire et anisotrope. Cependant, elles ne s'appliquent qu'à des milieux stationnaires par rapport aux axes des coordonnées. Pour une discussion complète des milieux en mouvement, voir Penfield et Haus [45]. Par ailleurs, les axes des coordonnées ne doivent subir ni accélération ni rotation.

Ces équations sont les quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme. Elles forment un ensemble d'équations différentielles partielles, reliant certaines *dérivées* spatiales et temporelles en un point aux densités de charge et de courant en ce point.

L'équation 21.8 est valable à condition que les monopôles magnétiques (Partie 14.1) n'existent pas.

Comme d'habitude,

- $\mathbf{E}$ est le champ électrique, en volt par mètre (V/m) ;
- $\rho = \rho_l + \rho_p$ est la densité volumique de charge électrique totale, en coulomb par mètre cube (C/m³) ;

- ρ_l est la densité volumique de charge libre ;
- $\rho_p = -\text{div } \mathbf{P}$ est la densité volumique de charge liée ;
- $\mathbf{P}$ est la polarisation électrique, en coulomb par mètre carré (C/m^2) ;
- $\mathbf{B}$ est l'induction magnétique, en tesla (T) ;
- $\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \partial \mathbf{P} / \partial t + \text{rot } \mathbf{M}$ est la densité de courant totale, en ampère par mètre carré (A/m^2)⁽¹⁾ ;
- $\mathbf{J}_l$ est la densité de courant provenant du mouvement des charges libres ;
- $\partial \mathbf{P} / \partial t$ est la densité de courant de polarisation dans un diélectrique ;
- $\text{rot } \mathbf{M}$ est la densité de courant équivalent dans la matière aimantée ;
- $\mathbf{M}$ est l'aimantation, en ampère par mètre (A/m) ;
- ϵ_0 est la permittivité du vide, et vaut environ $8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$;
- $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ est la perméabilité du vide.

Notons que les équations de Maxwell 21.6 à 21.9 sont *linéaires* : elles ne contiennent ni produit ni puissance des variables ou de leurs dérivées. Il s'ensuit que, si le champ $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ satisfait les équations de Maxwell quand $\rho = \rho_1$ et $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1$ et que le champ $\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$ correspond de même à $\rho = \rho_2$ et $\mathbf{J} = \mathbf{J}_2$, alors le champ total est $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ quand $\rho = \rho_1 + \rho_2, \mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$. C'est le *principe de superposition* sous sa forme générale (Parties 3.3 et 14.2). En d'autres termes, chaque distribution de charge ρ et chaque distribution de courant $\mathbf{J}$ agit indépendamment de toutes les autres.

On peut trouver des formes alternatives des équations de Maxwell dans l'annexe E.

Dans les milieux linéaires, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{M}$ sont proportionnelles, respectivement, à $\mathbf{E}$ et à $\mathbf{B}$, et le principe de superposition s'applique.

Dans les milieux non linéaires, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{M}$ sont des fonctions compliquées de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ et le principe de superposition ne s'applique pas à ρ_l et $\mathbf{J}_l$. Mais il continue d'être valable pour ρ et $\mathbf{J}$.

Tous les matériaux deviennent non linéaires à forts champs.

Cf. exercices : 21.3 ; 21.4 ; 21.5 ; 21.6 ; 21.7 ; 21.8 ; 21.9.

21.3 LES ÉQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME INTÉGRALE

Nous déduisons maintenant la forme intégrale des équations de Maxwell.

En intégrant l'Éq. 21.6 sur un volume fini $\mathcal{V}$, puis en appliquant le théorème de la divergence, on trouve la forme intégrale du théorème de Gauss (Partie 7.5) :

$$\int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (21.10)$$

où A est l'aire de la surface qui délimite le volume $\mathcal{V}$, et Q est la charge totale contenue dans $\mathcal{V}$. Voir la Fig. 21.1.

(1) Jusqu'à maintenant nous étions seulement concernés par des densités de courant libre, et nous avons utilisé $\mathbf{J}$ à la place de $\mathbf{J}_l$ pour simplifier la notation.

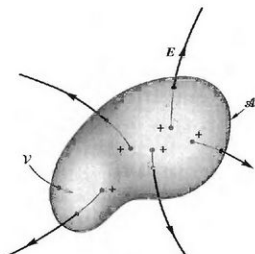


Figure 21.1 Lignes de champ de E sortant d'un volume qui contient une charge nette Q .
Le flux sortant de E est égal à Q/ϵ_0 .

L'équation 21.7 est la forme différentielle de la loi de l'induction de Faraday pour des champs magnétiques variables. L'intégration sur une surface ouverte d'aire A délimitée par une courbe C donne la forme intégrale, comme dans la partie 18.2 :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (21.11)$$

où Φ est le flux total à travers C , comme en Fig. 21.2. La force électromotrice induite autour d'une courbe fermée C est l'opposée de la dérivée temporelle du flux. Les directions positives pour Φ et sur C satisfont la règle du tire-bouchon.

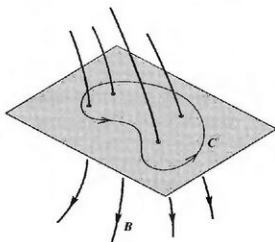


Figure 21.2 Si le flux magnétique à travers C augmente, cela induit une force électromotrice dans C , dans la direction de la flèche.

La force électromotrice est dans la même direction si B est orienté vers le haut et décroît.

L'équation 21.8 stipule que le flux sortant net de $\mathbf{B}$ à travers toute surface fermée est nul, comme en Fig. 21.3 :

$$\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (21.12)$$

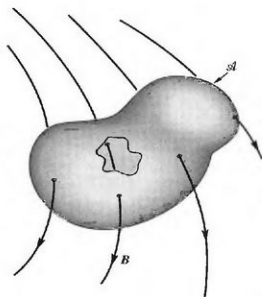


Figure 21.3 Lignes de B passant à travers une surface fermée. Le flux sortant net de B est nul.

Enfin, l'intégration de l'Éq. 21.9 sur une courbe fermée C donne

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_A \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (21.13)$$

On a trouvé deux formes moins générales de cette loi dans les parties 15.4 et 16.3. La courbe fermée C délimite une surface ouverte d'aire A à travers laquelle s'écoule un courant de densité $\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, comme en Fig. 21.4.

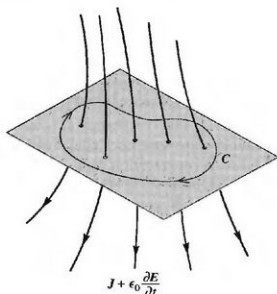


Figure 21.4 L'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ autour de C .

Elle est positive si l'intégration est effectuée dans la direction des flèches avec une densité de courant $\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ orientée vers le bas.

Cf. exercice 23.10.

21.4 LA LOI DE CONSERVATION DE LA CHARGE

Dans la partie 4.2 nous avons vu qu'il y a conservation de la charge *libre*. À ce moment-là nous avons noté $\mathbf{J}$ la densité de courant des charges libres, au lieu de $\mathbf{J}_l$. Existe-t-il une loi plus générale ? Nous avons besoin de la divergence de $\mathbf{J}$, définie dans la partie 21.2, pour la section suivante. D'abord,

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \left(\mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M} \right) = \operatorname{div} \mathbf{J}_l + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{P}) \quad (21.14)$$

puisque la divergence d'un rotationnel est nulle. Donc

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_l}{\partial t} - \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho_l + \rho_p)}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (21.15)$$

C'est une forme plus générale de la *loi de conservation de la charge*.

21.5 LES ÉQUATIONS DE MAXWELL SONT REDONDANTES !

Surprise ! Il n'y a en réalité que deux équations de Maxwell indépendantes, pas quatre !

Les équations pour $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ et $\operatorname{div} \mathbf{B}$ constituent la première paire d'équations de Maxwell, et celles pour $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ et $\operatorname{div} \mathbf{E}$, la deuxième.

Les équations de la première paire sont liées de la façon suivante. Prenons la divergence de l'Éq. 21.7, en se rappelant que la divergence d'un rotationnel est nulle. Alors

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (21.16)$$

Ainsi, en tout point de l'espace, $\operatorname{div} \mathbf{B}$ est constant. On peut alors prendre $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ partout et à chaque instant *si on suppose* que, en chaque point de l'espace, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ à un instant passé, présent ou futur. Avec cette hypothèse, l'Éq. 21.8 se déduit de l'Éq. 21.7.

Les équations de la deuxième paire sont liées également. Prenons la divergence de l'Éq. 21.9 et appliquons la loi de la conservation de la charge (Éq. 21.15) :

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (21.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + C \quad (21.18)$$

La constante d'intégration C peut être fonction des coordonnées. *Si maintenant on suppose* que, en chaque point de l'espace, à un instant, $\operatorname{div} \mathbf{E}$ et ρ sont simultanément nulles, alors $C = 0$ et on retrouve l'Éq. 21.6.

Ainsi les équations pour $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ et pour $\operatorname{div} \mathbf{E}$ sont liées aussi, et les quatre équations de Maxwell sont équivalentes à seulement deux équations indépendantes.



Figure 21.5 Paire de champs duaux.
Les lignes de $\mathbf{E}$ sont en trait plein, et les lignes de $\mathbf{H}$ en pointillés.

21.6 LA DUALITÉ

Cette partie permet une approche heuristique : si on est familier avec un champ, alors on peut en deviner un autre possible.

Imaginons un champ $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ qui satisfasse les équations de Maxwell, avec $\rho_l = 0$, $\mathbf{J}_l = 0$ dans une région donnée. Le milieu est homogène, isotrope, linéaire et stationnaire (HILS). Imaginons maintenant un autre champ

$$\mathbf{E}' = -K\mathbf{B} = -K\mu\mathbf{H} \quad (21.19)$$

$$\mathbf{H}' = +K\mathbf{D} = +K\epsilon\mathbf{E} \quad (21.20)$$

où la constante K a la dimension d'une vitesse, et est indépendante des coordonnées spatiales et temporelle. Cet autre champ satisfait *aussi* les équations de Maxwell, comme on peut le vérifier par substitution.

La figure 21.5 illustre cette propriété de dualité des champs électromagnétiques. Un champ est dit le *dual*, ou le *champ dual*, de l'autre. Si un champ peut exister, alors son champ dual peut aussi exister.

Même si les deux champs sont fortement liés à travers les équations ci-dessus et même s'ils satisfont tous deux les équations de Maxwell, ils sont entièrement différents. Par exemple, la force de Lorentz de la partie 17.1 pour un champ n'a aucune relation avec la force de Lorentz pour l'autre.

Exemple : Les champs de dipôles électriques et magnétiques

Dans la partie 5.1 on a trouvé que, dans le champ d'un dipôle électrique de moment $\mathbf{p}$,

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (21.21)$$

en coordonnées sphériques.

Plus tard, dans le troisième exemple de la partie 14.4, on a montré que, dans le champ d'un dipôle magnétique de moment $\mathbf{m}$, toujours en coordonnées sphériques,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (21.22)$$

ou

$$\mathbf{H} = \frac{m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (21.23)$$

On a pris $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$. Si le champ du dipôle électrique est le champ sans prime et celui du dipôle magnétique le champ primé, alors $K = m/p$.

21.7 LA CONDITION DE LORENTZ

La relation nommée *condition de Lorentz* fait le lien entre le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et le potentiel électrique V :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (21.24)$$

avec

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{r} dV' \quad (21.25)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{r} dV' \quad (21.26)$$

comme au paragraphe 3.4.1 et dans la partie 14.4. Ce sont les potentiels au point champ $P(x, y, z)$; $\rho = \rho_l + \rho_p$ est la densité volumique de charge totale au point source $P'(x', y', z')$; dV' est l'élément de volume $dx' dy' dz'$ en P' ; r est la distance entre P et P' ; et $\mathbf{J}$, définie comme dans la partie 21.2, est la densité de courant totale en P' . Le volume V' contient toutes les charges et tous les courants.

La condition de Lorentz dérive de la loi de conservation de la charge (Partie 21.4), qui relie ρ à $\mathbf{J}$ [22, 32].

Cette relation est-elle importante? Oui! Pensons à une antenne qui rayonne une onde électromagnétique. On voudrait calculer ses champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. On a donc besoin de connaître six quantités : les trois composantes de $\mathbf{E}$ et les trois composantes de $\mathbf{B}$. Mais réfléchissons un instant : dans les parties 18.3 et 14.4, on a trouvé que

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (21.27)$$

Ainsi on a vraiment besoin de seulement quatre quantités, les trois composantes de $\mathbf{A}$ et la composante unique de V , pour trouver $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.

La condition de Lorentz 21.24 est une simplification supplémentaire. Si le champ est une fonction sinusoïdale du temps, alors $\partial V / \partial t$ est un simple multiple de V : $\partial V / \partial t = j\omega V$. Ainsi, si on peut trouver les trois composantes de $\mathbf{A}$, la condition de Lorentz donne V et on peut en déduire les six composantes de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$!

Évidemment, il est toujours facile de calculer le gradient, la divergence ou le rotationnel d'une fonction connue.

Cf. exercice 21.11.

21.8 RÉSUMÉ

Les équations de Maxwell, sous forme locale, sont les suivantes :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (21.6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (21.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (21.8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (21.9)$$

Les différents termes sont définis dans la partie 21.2, et les autres formes des équations de Maxwell sont données dans l'annexe E. La forme intégrale est plus facile à interpréter intuitivement, mais moins utile de manière générale.

L'équation pour la divergence de $\mathbf{B}$ se déduit de celle pour le rotationnel de $\mathbf{E}$. De même, l'équation pour la divergence de $\mathbf{E}$ dérive de celle pour le rotationnel de $\mathbf{B}$.

D'après la loi de conservation de la charge,

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (21.15)$$

Si

$$\mathbf{E}' = -K\mathbf{B} = -K\mu\mathbf{H} \quad (21.19)$$

$$\mathbf{H}' = +K\mathbf{D} = +K\epsilon\mathbf{E} \quad (21.20)$$

où K a la dimension d'une vitesse et est indépendant des coordonnées spatiales et temporelle, les champs avec et sans prime sont appelés champs *duaux*. Les deux champs satisfont les équations de Maxwell. Les champs des dipôles électrique et magnétique sont des exemples de tels champs duaux.

La condition de Lorentz

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (21.24)$$

dérive de la conservation de la charge, avec

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{r} dV', \quad (21.25)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{r} dV' \quad (21.26)$$

Grâce à cette relation, on peut calculer les six composantes de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, pour une distribution de charge et de courant donnée, à partir des seules trois composantes de $\mathbf{A}$.

EXERCICES

21.1 L'équation de Maxwell pour le rotationnel de $\mathbf{B}$

Montrer que l'Éq. 21.4 s'applique aux champs des Éqs. 21.2 et 21.3.

(a) Traiter d'abord le cas non relativiste, avec $\beta = 0$, $\gamma = 1$.

On négligera les facteurs $Q/(4\pi\epsilon_0)$ pour $\mathbf{E}$ et $\mu_0 Q/(4\pi)$ pour $\mathbf{B}$, et on appellera les nouveaux champs $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{B}'$. On doit trouver après simplification que

$$(\text{rot } \mathbf{B}')_\rho = \frac{\partial E'_\phi}{\partial t} = \frac{3V\rho(z - Vt)}{(\rho^2 + z^2 - 2zVt + V^2t^2)^{5/2}}$$

$$(\text{rot } \mathbf{B}')_z = \frac{\partial E'_z}{\partial t} = \frac{V(-\rho^2 + 2z^2 - 4zVt + 2V^2t^2)}{(\rho^2 + z^2 - 2zVt + V^2t^2)^{5/2}}$$

(b) Pour le lecteur qui a étudié les chapitres 11 à 13 sur la relativité, traiter le cas relativiste, avec $\gamma = 2$, $\beta = 0,75$. On utilisera les coordonnées *cylindriques* en se référant à la Fig. 21.6. Un logiciel de mathématiques sera utile ici. On doit trouver que

$$(\text{rot } \mathbf{B}')_\rho = \frac{\partial E'_\phi}{\partial t} = \frac{96V\rho(z - Vt)}{(\rho^2 + 4z^2 - 8zVt + 4V^2t^2)^{5/2}}$$

$$(\text{rot } \mathbf{B}')_z = \frac{\partial E'_z}{\partial t} = \frac{8V(-\rho^2 + 8z^2 - 16zVt + 8V^2t^2)}{(\rho^2 + 4z^2 - 8zVt + 4V^2t^2)^{5/2}}$$

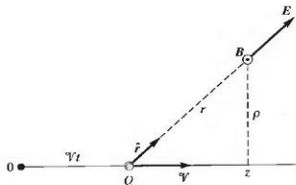


Figure 21.6

Ⓡ 21.2 Champ magnétique d'une charge ponctuelle se déplaçant à vitesse constante

La figure 21.7 montre une charge ponctuelle Q en mouvement le long de l'axe x à la vitesse $V\hat{x}$. Sa position à l'instant t est $(Vt, 0, 0)$.

(a) Trouver $\mathbf{B}$ en un point $P(X, Y, 0)$ distinct de l'origine, à l'instant où la charge passe par l'origine. La particule voyage dans le vide et $V^2 \ll c^2$, où c est la célérité de la lumière.

(b) Pour le lecteur qui a étudié le chapitre 13, comparer ce résultat avec celui de la partie 13.2.

(c) Tracer la valeur de

$$\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire d'un segment sphérique de rayon Y , en fonction de $\mathcal{V}t$. Quand la charge est juste à gauche de $\mathcal{V}t = X$, le flux de $\mathbf{D}$ à travers $\mathcal{A}$ est orienté vers la droite et vaut $+Q/2$. Immédiatement après, le flux est orienté vers la gauche et vaut $-Q/2$, si bien qu'il y a une discontinuité dans cette courbe.

(d) L'intégrale de $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ sur le cercle représenté sur la figure est égale à $2\pi YB/\mu_0$. Calculer l'intégrale de cette quantité sur le temps, de moins l'infini à plus l'infini. On prendra $X = 0$ pour simplifier le calcul. Expliquer le résultat.

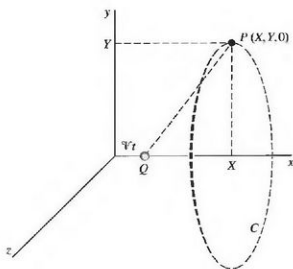


Figure 21.7

21.3 Exprimer les unités suivantes en termes des kilogramme, mètre, seconde et ampère :

joule, watt,
coulomb, volt, ohm, siemens, farad,
weber, tesla, henry.

21.4 Monopôles magnétiques

Si les monopôles existent, alors les équations de Maxwell doivent contenir deux termes supplémentaires pour prendre en compte les charges et courants magnétiques. On écrit habituellement les équations sous la forme suivante :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}^*, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \rho^*, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

où ρ^* est la densité de charge magnétique, exprimée en webers par mètre cube, et $\mathbf{J}^*$ la densité de courant magnétique, en weber par seconde et par mètre carré.

(a) Montrer que

$$\operatorname{div} \mathbf{J}^* = -\frac{\partial \rho^*}{\partial t}$$

C'est l'équation de conservation des monopôles magnétiques.

(b) Montrer que, par analogie avec les champs électriques, près d'une charge magnétique ponctuelle Q^* ,

$$\mathbf{B} = \frac{Q^*}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{H} = \frac{Q^*}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

(c) Calculer l'énergie acquise par un monopôle magnétique qui accélère sur une distance de 1 000 km dans le champ magnétique terrestre ($\approx 10^{-5}$ T).

(d) Des monopôles magnétiques passent à travers une spire de fil de cuivre. Montrer que la force électromotrice induite est égale à moins le courant magnétique, avec la règle du tire-bouchon. C'est une méthode pour détecter les monopôles magnétiques.

21.5 Une transformation qui laisse les équations de Maxwell inchangées

Montrer que les équations de Maxwell pour le vide sont inchangées par la transformation

$$\mathbf{E}' = a\mathbf{E} + bc\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = -\left(\frac{b}{c}\right)\mathbf{E} + a\mathbf{B}$$

où a et b sont des constantes et c est la célérité de la lumière.

21.6 Une autre transformation qui laisse les équations de Maxwell inchangées

Montrer que les équations de Maxwell pour le vide sont inchangées par la transformation

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cos \theta + c\mathbf{B} \sin \theta, \quad \mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{E}}{c} \sin \theta + \mathbf{B} \cos \theta$$

La transformation $\mathbf{E}' = -c\mathbf{B}$, $\mathbf{H}' = K\mathbf{D}$ de la partie 21.6 et la transformation $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$, $\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$ sont des cas particuliers correspondant respectivement à $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi$.

21.7 L'effet de peau

Comme on le verra dans les parties 22.6 et 23.4, un champ à haute fréquence ne pénètre pas significativement dans l'épaisseur d'un bon conducteur. Par ailleurs, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ à l'intérieur sont approximativement tangents à la surface. On prend l'axe z normal à la surface, orienté vers l'extérieur, avec $\mathbf{E}$ en direction de l'axe x et $\mathbf{B}$ en direction de l'axe y . On prend $\partial/\partial x = 0$, $\partial/\partial y = 0$.

(a) Montrer que, à l'intérieur, $\partial\mathbf{E}/\partial z = -\partial\mathbf{B}/\partial t$.

(b) Montrer que, juste à l'extérieur du conducteur, $\mathbf{B}$ est tangent ou presque.

(c) Soit α A/m la densité de courant près de la surface. Montrer que, juste à l'extérieur du conducteur, $\mathbf{B} = \mu_0 \alpha \times \hat{\mathbf{z}}$.

(d) Ce dernier résultat dépend-il de la façon dont le courant varie avec la profondeur à l'intérieur du conducteur ?

Ⓡ 21.8 Condensateur à faces planes et parallèles alimenté à une extrémité par un générateur dépendant du temps

La figure 21.8 représente un condensateur à faces planes et parallèles connecté par une de ses extrémités à un générateur dont la tension augmente lentement et linéairement avec le temps : $dV_0/dt = k$. Les effets de bord sont négligeables : $a \gg s$, $b \gg s$.

(a) Trouver le courant I en fonction de x .

(b) Trouver $\mathbf{B}$ à l'intérieur de deux façons différentes. Trouver $\mathbf{A}$ à l'intérieur.

(c) Trouver $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ à l'extérieur. Les faces du condensateur sont fines.

(d) Dessiner une grande section du condensateur dans le plan médiateur parallèle au plan xz , en représentant I et les vecteurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\text{rot } \mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\partial \mathbf{E} / \partial t$ près des deux extrémités. On utilisera des flèches de taille différente pour indiquer qualitativement la variation de ces vecteurs avec x et z .

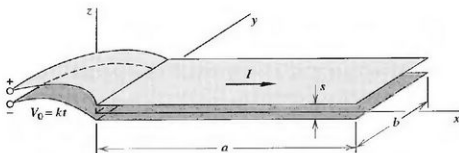


Figure 21.8

21.9 Supraconductivité

Un supraconducteur offre une résistance nulle au mouvement des porteurs de charge supraconducteurs. Ces derniers sont des paires d'électrons qui se déplacent ensemble.

(a) S'il y a N tels porteurs par mètre cube, de masse m' et charge e' , montrer que

$$\mathbf{E} = \frac{m'}{Ne'^2} \frac{d\mathbf{J}}{dt}$$

C'est la *première équation de London*. On notera que $\mathbf{E}$ n'est nul que si $\mathbf{J}$ est constante.

(b) On pose $K = m' / (Ne'^2)$. Montrer que dans un champ alternatif

$$\sigma = \frac{1}{j\omega K} = -\frac{j}{\omega K}$$

(c) Montrer que

$$\text{rot} \left(K \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

L'équation

$$\text{rot} (K\mathbf{J}) = -\mathbf{B}$$

est la *seconde équation de London*. Elle ne dérive pas mathématiquement de la première.

(d) Montrer qu'en régime stationnaire

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{K} \mathbf{B}$$

À une dimension, cela signifie que

$$\frac{d^2 \mathbf{B}}{dx^2} = \frac{\mu_0}{K} \mathbf{B}$$

ou que

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp \left[-\left(\frac{\mu_0}{K} \right)^{1/2} x \right]$$

où $(K/\mu_0)^{1/2}$ est la *profondeur de pénétration* du champ.

(e) Calculer la valeur de la profondeur de pénétration en prenant m' égale à deux fois la masse d'un électron, $e' = 2e$ et $N = 10^{29} \text{ m}^{-3}$. La profondeur de pénétration est, en réalité, quelques fois plus grande.

(f) Bien au-delà de la profondeur de pénétration $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{J} = 0$, $\mathbf{B} = 0$.

Montrer que juste à l'extérieur d'un supraconducteur, $\mathbf{B}$ est tangent à la surface et $\mathbf{H}$ est égal en module à la densité surfacique de courant.

Ⓡ 21.10 Champ magnétique d'un condensateur avec pertes

Un condensateur chargé dont les électrodes sont parallèles et circulaires se trouve dans un grand volume de diélectrique légèrement conducteur, comme en Fig. 21.9. Le condensateur se décharge.

(a) Calculer la valeur du rapport $J_t/(\partial D/\partial t)$ en un point quelconque du diélectrique en fonction de la résistance et de la capacité.

(b) Montrer que ce rapport est égal à -1 à la surface d'une électrode.

(c) Montrer que $\mathbf{B}$ est nul partout dans le diélectrique. Cela signifie que le champ magnétique des courants de conduction et de polarisation (*pas* de déplacement) sur les bords annule exactement le champ magnétique des courants de conduction et de polarisation dans la région entre les plaques.

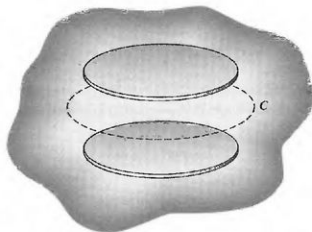


Figure 21.9

(d) Montrer que $\mathbf{B}$ est nul aussi pour des électrodes de n'importe quelle forme.

Si le diélectrique n'occupe qu'une partie du champ d'un condensateur, par exemple la région entre les plaques d'un condensateur à faces planes et parallèles, alors la valeur du rapport calculé en (a) est valable. Cependant, à la surface d'une électrode, ce rapport n'est pas égal à -1 car la charge migre de la surface externe d'une électrode à la surface interne, d'où elle fuit. Alors, dans le diélectrique, $|\mathbf{J}_t| > |\partial \mathbf{D}/\partial t|$, $\mathbf{J}_t - \partial \mathbf{D}/\partial t$ est orienté dans la direction de $\mathbf{J}_t$, et donc de $\mathbf{E}$, et il y a un champ magnétique azimutal.

21.11 Théorie de la création continue et équations de Maxwell

Imaginons un univers à symétrie sphérique en expansion dans lequel il y a une création continue de charge à un taux de $q \text{ C}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$. La création de charge électrique se produit via la création d'atomes d'hydrogène qui portent un faible excès de charge y_e , comme dans le problème 3.22.

Le taux de création de masse Q est proportionnel à q : $Q = [m/(ye)] q$, où m est la masse du proton, l'univers étant principalement composé d'hydrogène.

(a) Par symétrie, le potentiel vecteur ne peut être que radial.

Montrer qu'en régime stationnaire la densité de courant $\mathbf{J}$ est partout nulle, d'après les équations de Maxwell.

Lyttleton et Bondi (voir le problème 3.22) ont suggéré que, si la création continue existe réellement, alors les équations de Maxwell doivent être modifiées de la façon suivante :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \left[\frac{1}{l^2} \mathbf{A} \right], \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \left[\frac{1}{l^2} V \right]$$

où les nouveaux termes sont entre crochets. Les grandeurs V et $\mathbf{A}$ sont les potentiels scalaire et vecteur habituels :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

Les deux autres équations de Maxwell pour $\text{rot } \mathbf{E}$ et $\text{div } \mathbf{B}$ restent inchangées. Lyttleton et Bondi ont suggéré que la constante l , qui a la dimension d'une longueur, serait de l'ordre du rayon de l'univers. Les nouveaux termes seraient donc négligeables dans tous les problèmes autres que cosmologiques.

(b) Si ces équations de Maxwell modifiées sont correctes, V et $\mathbf{A}$ sont-ils mesurables en principe ? On se rappellera que, avec les équations ci-dessus pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en termes de V et $\mathbf{A}$, seules les variations spatio-temporelles de V et $\mathbf{A}$ déterminent $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.

(c) Écrire l'équation de conservation de la charge totale (Partie 21.4).

(d) La condition de Lorentz serait-elle encore valide ?

(e) On pose maintenant $\mathbf{A} = A' \mathbf{r}$, où A' est une constante, et on suppose que V est constante. Montrer que $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{J} = (q/3) \mathbf{r}$, $\rho = \epsilon_0 V/l^2$.

En supposant que la vitesse du flux de matière sortant est la même que celle de la charge, c'est-à-dire $\mathbf{J}/\rho$, il vient que la vitesse radiale est proportionnelle à $\mathbf{r}$, ce qui est en accord avec la relation vitesse-distance linéaire observée par les astronomes : $v = r/T$, où $T \approx 3 \times 10^{17}$ s est la *constante de Hubble*.

(f) Montrer que $\rho = qT/3$.

(g) Maintenant la densité de charge spatiale ρ est $\eta ye/m$, où η , la densité de masse de l'Univers, vaut environ 10^{-26} kg/m³.

Montrer que, si la théorie est correcte, alors $Q \approx 1/(2 \times 10^{16})$ atomes d'hydrogène par mètre cube et par seconde.

Chapitre 22

Ondes électromagnétiques : dans le vide, les isolants et les conducteurs

Dans ce chapitre on étudie la propagation des ondes électromagnétiques planes dans le vide, dans les isolants et dans les conducteurs. Nous étudierons la réflexion et la réfraction au chapitre 23, puis les ondes guidées au chapitre 24, et le rayonnement d'ondes électromagnétiques au chapitre 25.

Le lecteur qui n'est pas familier avec la représentation complexe doit lire auparavant le chapitre 2.

22.1 LE SPECTRE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Les équations de Maxwell n'imposent aucune limite à la fréquence des ondes électromagnétiques. Le spectre connu s'étend continûment des grandes ondes radio aux rayons gamma de très haute énergie du rayonnement cosmique, comme en Fig. 22.1. Pour les premières, les fréquences sont de l'ordre de 100 Hz et les longueurs d'onde d'environ 3 000 km ; pour les dernières, les fréquences sont de l'ordre de 10^{24} Hz et les longueurs d'onde de moins d'un femtomètre (10^{-15} m).

Les fréquences et les longueurs d'onde connues couvrent donc un intervalle d'environ 22 ordres de grandeurs. Les ondes radio, les ondes de chaleur, la lumière, les rayons X et les rayons gamma sont tous des ondes électromagnétiques, bien que les sources et les détecteurs, ainsi que les modes d'interaction avec la matière, varient largement quand la fréquence change de plusieurs ordres de grandeurs.

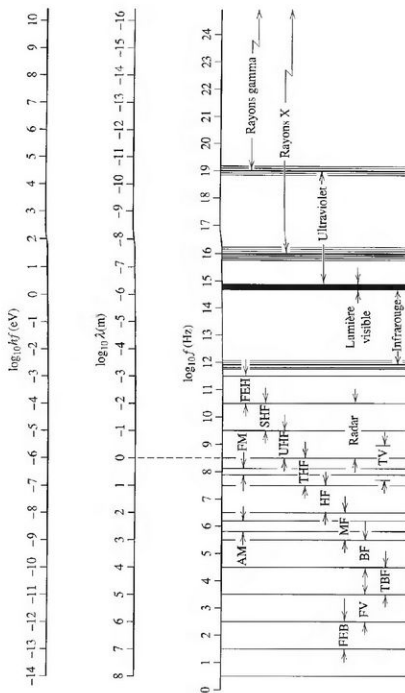


Figure 22.1 Le spectre des ondes électromagnétiques.

Les abréviations FEB, FV, TBF, ... signifient respectivement Fréquence Extrêmement Basse, Fréquence Vocale, Très Basse Fréquence, Basse Fréquence, Moyenne Fréquence, Haute Fréquence, Très Haute Fréquence, Ultra Haute Fréquence, Super Haute Fréquence et Fréquence Extrêmement Haute. Les limites indiquées par les régions hachurées sont approximatives. L'énergie hf , où h est la constante de Planck (6.63×10^{-34} J.s) et f est la fréquence, est celle d'un photon, ou quantum de rayonnement.

Beaucoup d'expériences démontrent l'identité profonde de toutes ces ondes. Dans le vide, elles sont toutes transverses et voyagent à la même vitesse. Par exemple, des observations radio et optiques simultanées des étoiles montrent que la vitesse de propagation est la même, aux erreurs de mesure près, pour des longueurs d'onde qui diffèrent de plus de six ordres de grandeur.

Avant d'aborder les ondes électromagnétiques, nous étudions d'abord brièvement les ondes.

22.2 LES ONDES

Une perturbation peut se propager comme une onde. Par exemple, si on siffle, la pression de l'air entre les lèvres fluctue et la perturbation voyage vers l'extérieur dans toutes les directions.

Considérons maintenant une onde sonore et appelons p la pression de l'air. Dans le cas le plus simple, l'onde voyage le long de l'axe z , la pression est indépendante des coordonnées x et y et il n'y a pas d'atténuation. En $z = 0$, on pose

$$p = p_m \cos \omega t \quad (22.1)$$

Alors la phase de la perturbation en $z = 0$ est ωt . Quelle est la phase en z ? En z , la phase retarde du temps qu'il faut à l'onde pour voyager sur la distance z à la vitesse constante v , soit z/v . Ainsi, en z , la perturbation est la même qu'à la source à l'instant antérieur $t - (z/v)$:

$$p = p_m \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad (22.2)$$

Cette équation définit une *onde plane sinusoïdale non atténuée*. Ici les *fronts d'onde* sont normaux à l'axe z . La figure 22.2 montre p en fonction de t en un z donné, et p en fonction de z à t donné. La *longueur d'onde* λ est la distance sur laquelle la phase varie de 2π , la *période* T est le temps qu'il faut à la phase pour changer de 2π , et la *fréquence* $f = 1/T$. Alors $\lambda = v/f$.

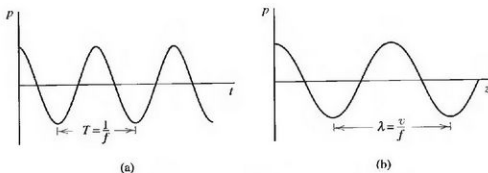


Figure 22.2 La quantité $p = p_m \cos [\omega (t - z/v)]$
(a) en fonction de t en un z donné, et (b) en fonction de z à un t donné.

Il est en général plus commode d'écrire

$$p = p_m \cos(\omega t - kz) \quad (22.3)$$

où

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \quad (22.4)$$

est le *nombre d'onde*. (Cette grandeur devrait plutôt être appelée *vecteur d'onde* ou *nombre d'onde circulaire*, car elle est 2π fois plus grande que le nombre d'onde utilisé en optique.) La quantité $\bar{\lambda}$ (prononcée « lambda barre ») est la *longueur d'onde réduite*, ou la distance sur laquelle la phase change d'un radian.

En représentation complexe (Chap. 2),

$$p = p_m \exp j(\omega t - kz) \quad (22.5)$$

On peut vérifier que l'équation différentielle qui correspond aux deux équations 22.3 et 22.5 est

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (22.6)$$

Pour une onde non atténuée à trois dimensions, le premier terme de gauche dans l'Éq. 22.6 doit être remplacé par trois dérivées secondes partielles, par rapport à x , y , z , et devient un Laplacien :

$$\Delta p - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (22.7)$$

Si une onde plane se propage dans une direction arbitraire, alors le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est orienté dans la direction de propagation et

$$p = p_m \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (22.8)$$

Ici la pression de l'air est une quantité scalaire, comme la densité de masse : en un point donné, elle n'a pas de direction spécifique. Et si la quantité propagée dans l'onde est une quantité vectorielle, comme un champ électrique $\mathbf{E}$, par exemple ? Alors, en coordonnées cartésiennes, on a trois équations similaires, une pour la composante selon x , E_x , une pour E_y et une pour E_z :

$$\Delta E_x - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (22.9)$$

$$\Delta E_y - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (22.10)$$

$$\Delta E_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (22.11)$$

Si maintenant on multiplie la première équation par $\hat{\mathbf{x}}$, la deuxième par $\hat{\mathbf{y}}$ et la troisième par $\hat{\mathbf{z}}$, puis on ajoute les trois équations, on trouve que

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (22.12)$$

C'est l'équation d'onde pour $\mathbf{E}$ à trois dimensions, en supposant qu'il n'y a pas d'atténuation.

22.3 LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

Par définition, le *vide* est une région infinie dépourvue de matière.

L'équation d'onde ci-dessus est-elle compatible avec les équations de Maxwell ? Reportons-nous à la partie 21.2. Dans le vide, la densité volumique de charge ρ et la densité de courant $\mathbf{J}$ sont toutes deux nulles, si bien que les équations de Maxwell se réduisent à :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (22.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (22.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (22.15)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (22.16)$$

Prenons maintenant le rotationnel de l'Éq. 22.14 et utilisons la relation 5 de la liste des définitions, identités et théorèmes vectoriels, en annexe E :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\Delta \mathbf{E} + \operatorname{div}(\operatorname{div} \mathbf{E}) \quad (22.17)$$

Le dernier terme de droite est nul. Alors

$$-\Delta \mathbf{E} + \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (22.18)$$

Invertissons maintenant l'ordre du rotationnel et de la dérivée temporelle dans le dernier terme :

$$-\Delta \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 \quad (22.19)$$

Finalement, en y substituant l'Éq. 22.16 :

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (22.20)$$

C'est l'équation d'onde pour $\mathbf{E}$ dans le vide. En comparant maintenant avec l'Éq. 22.12, on voit que la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique plane dans le vide est donnée par

$$c = \frac{1}{(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}} \quad (22.21)$$

Cette équation est remarquable car elle relie trois constantes fondamentales de l'électromagnétisme : la célérité c de la lumière, la permittivité du vide ϵ_0 , de la loi de Coulomb, et la perméabilité du vide μ_0 , de la loi de la force magnétique.

Puisque, par définition, $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, la valeur de ϵ_0 se déduit de la valeur expérimentale de c , comme au paragraphe 17.3 :

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (22.22)$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85418782 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (22.23)$$

Existe-t-il une équation d'onde correspondante pour l'induction magnétique $\mathbf{B}$? En effet, et elle lui est mathématiquement identique :

$$\Delta \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (22.24)$$

Jusqu'à maintenant nous n'avons utilisé le champ magnétique $\mathbf{H}$ que pour discuter des matériaux magnétiques au chapitre 16. Mais pour l'étude des ondes électromagnétiques il vaudrait mieux utiliser $\mathbf{H}$ que $\mathbf{B}$ pour deux raisons : comme on va le voir, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est la densité de puissance dans une onde électromagnétique, et E/H est l'impédance caractéristique du milieu de propagation. Ces deux concepts ont une grande importance pratique.

L'équation d'onde pour $\mathbf{H}$ dans le vide se déduit immédiatement de l'Éq. 22.24 en remplaçant $\mathbf{B}$ par $\mu_0 \mathbf{H}$. Ainsi, dans le vide,

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (22.25)$$

Considérons maintenant une onde plane sinusoïdale se propageant dans la direction positive de l'axe z . Supposons aussi que les vecteurs $\mathbf{E}$ sont tous parallèles à une direction donnée : l'onde est *linéairement polarisée*. Par définition, le *plan de polarisation* est parallèle à $\mathbf{E}$. Si l'onde n'est pas linéairement polarisée, alors elle est la somme d'ondes linéairement polarisées.

Dans une onde polarisée linéairement qui se propage dans la direction positive de l'axe z , $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont de la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \exp j(\omega t - kz), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m \exp j(\omega t - kz) \quad (22.26)$$

où $\mathbf{E}_m$ et $\mathbf{H}_m$ sont des vecteurs indépendants du temps et des coordonnées. Dans le vide, $k = k_0$, avec

$$k_0 = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} = \omega(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2} \quad (22.27)$$

Pour ce champ particulier, en représentation complexe,

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \quad \text{et} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} = -jk \hat{\mathbf{z}} \quad (22.28)$$

Alors les équations de Maxwell 22.13 à 22.16, avec $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, se réduisent à

$$-jk_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad -jk_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (22.29)$$

$$-jk_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad -jk_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (22.30)$$

puis à

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = \frac{k_0}{\omega \mu_0} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = \frac{\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}}{\omega \mu_0}, \quad (22.31)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{k}_0 \times \mathbf{H}}{\omega \varepsilon_0} \quad (22.32)$$

Les équations $\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E}$ et $\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H}$ montrent que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation $\hat{\mathbf{z}}$, ou transverses. En outre, à cause des équations pour $\mathbf{H}$ et $\mathbf{E}$, les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont orthogonaux entre eux, comme en Fig. 22.3.

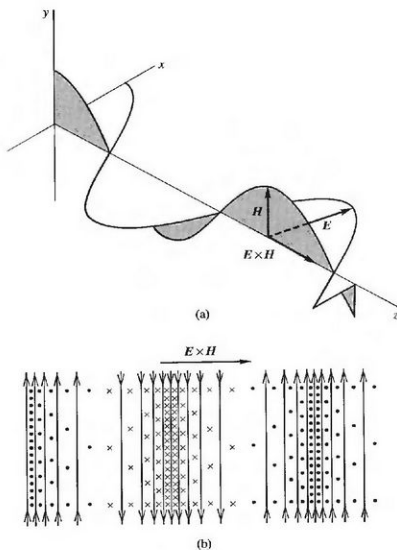


Figure 22.3 Vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ pour une onde électromagnétique plane qui se propage dans le vide en direction positive le long l'axe z .

(a) Champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ en fonction de z à un instant donné. Les deux vecteurs sont orthogonaux et en phase. (b) Lignes de $\mathbf{E}$ (flèches) projetées dans le plan xz depuis le haut. Les points représentent les lignes de $\mathbf{H}$ sortant de la feuille, et les croix, les lignes rentrantes. Le vecteur $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est orienté partout dans la direction de propagation.

Le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est important : il est orienté dans la direction de propagation, et on verra dans la prochaine partie qu'il donne la densité de puissance dans l'onde.

Le rapport E/H est l'impédance caractéristique⁽¹⁾ du milieu de propagation :

$$Z_0 = \frac{E}{H} = \frac{k_0}{\omega \epsilon_0} = \frac{\omega \mu_0}{k_0} \quad (22.33)$$

Alors

$$Z_0 = \frac{E}{H} = \frac{\omega \mu_0}{k_0} = \frac{\mu_0}{(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}} = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (22.34)$$

$$= 3,767303 \times 10^2 \approx 377 \, \Omega \quad (22.35)$$

Puisque le rapport E/H est réel, les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont en phase.

Par ailleurs, puisque $B = \mu_0 H$ dans le vide,

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}} = c, \quad \text{ou} \quad E = Bc, \quad (22.36)$$

une relation simple à retenir.

Les densités d'énergie électrique et magnétique sont égales :

$$\frac{\epsilon_0 E^2/2}{\mu_0 H^2/2} = \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right) = 1 \quad (22.37)$$

À tout instant la densité d'énergie totale fluctue avec z comme en Fig. 22.4, et sa moyenne temporelle en un point quelconque est

$$\mathcal{E}'_{\text{moy}} = \frac{\epsilon_0 E_{\text{eff}}^2}{2} + \frac{\mu_0 H_{\text{eff}}^2}{2} = \epsilon_0 E_{\text{eff}}^2 = \mu_0 H_{\text{eff}}^2 \quad (22.38)$$

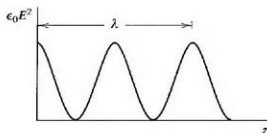


Figure 22.4 La densité d'énergie totale $\epsilon_0 E^2$, ou $\mu_0 H^2$, en fonction de z , à $t = 0$, pour une onde plane se propageant dans le vide le long de l'axe z .

Sans la représentation complexe,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kz), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t - kz) \quad (22.39)$$

avec

$$E_m/H_m \approx 377 \, \Omega \quad (22.40)$$

Cf. exercice 8.1.

(1) Le rapport E/H a-t-il réellement la dimension d'une impédance V/I ? Voyons, E a la dimension V/L , où L est une longueur, et d'après l'Éq. 16.16, H/L a la dimension de J , ou de I/L^2 , si bien que H a la dimension de I/L , et E/H a vraiment la même dimension que V/I .

22.4 LE THÉORÈME DE POYNTING

Dans la partie 22.3 on a trouvé que le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est orienté dans la direction de propagation. Nous montrons maintenant que, plus généralement, le vecteur de Poynting donne la densité de puissance dans un champ électromagnétique. Il a donc une grande importance pratique. Voir Lorrain [24, 25, 27].

Tout d'abord, on a l'identité vectorielle

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \quad (22.41)$$

Dans le vide, les Éqs. 22.13 à 22.16 s'appliquent et

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (22.42)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) \quad (22.43)$$

Intégrons maintenant sur un volume fini $\mathcal{V}$ d'aire $\mathcal{A}$, puis appliquons à gauche le théorème de la divergence :

$$\int_{\mathcal{A}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) d\mathcal{V} \quad (22.44)$$

Le terme de droite, avec son signe négatif, donne la décroissance de l'énergie électromagnétique totale dans le volume $\mathcal{V}$, par unité de temps. Alors l'intégrale de gauche doit donner le taux auquel l'énergie électromagnétique *sort* de $\mathcal{V}$. C'est le *théorème de Poynting* ; c'est simplement l'énoncé de la conservation de l'énergie dans un champ électromagnétique.

Ainsi le vecteur de Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (22.45)$$

donne la puissance qui s'écoule dans l'onde par unité de surface.

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting est (Partie 2.4)

$$\mathbf{S}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (22.46)$$

et, pour une onde plane qui se propage dans le vide dans la direction $\hat{\mathbf{z}}$, avec $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ comme dans l'Éq. 22.26, la moyenne temporelle de la densité de puissance est

$$\mathbf{S}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} E_m H_m \hat{\mathbf{z}} \quad (22.47)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} E_m^2 \hat{\mathbf{z}} = c \epsilon_0 E_{\text{eff}}^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (22.48)$$

Ainsi $\mathbf{S}_{\text{moy}}$ est la moyenne temporelle de la densité d'énergie totale $\epsilon_0 E_{\text{eff}}^2$, multipliée par la célérité c de la lumière. En outre,

$$\mathbf{S}_{\text{moy}} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{Z_0} \hat{\mathbf{z}} \approx \frac{E_{\text{eff}}^2}{377} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{W/m}^2 \quad (22.49)$$

En abandonnant la représentation complexe pour un instant,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - k_0 z), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t - k_0 z) \quad (22.50)$$

et le module du vecteur de Poynting vaut

$$|\mathcal{S}| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = E_m H_m \cos^2(\omega t - k_0 z) \quad (22.51)$$

L'énergie électromagnétique voyage par paquets d'une demi-longueur d'onde de longueur, comme en Fig. 22.4.

Exemple : Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dans un faisceau laser dans l'air

La plupart des lasers fonctionnent à des puissances de l'ordre du milliwatt. Mais certains lasers sont beaucoup plus puissants. L'un d'eux fournit un faisceau en impulsions, focalisé, dont la puissance crête, au foyer, vaut 10^{24} W/m² ! Donc

$$S = 10^{24} \text{ W/m}^2 \quad (22.52)$$

$$E_{\text{eff}} = (377 \times 10^{24})^{1/2} = 2 \times 10^{13} \text{ V/m} \quad (22.53)$$

Ce E est énorme : 2 000 V sur le diamètre d'un atome ($\approx 10^{-10}$ m) ! L'air claque à des champs d'environ 3×10^6 V/m. En outre,

$$B_{\text{eff}} = E_{\text{eff}}/c = 6,5 \times 10^4 \text{ T} \quad (22.54)$$

soit environ 65 000 fois le champ entre les pôles d'un électroaimant puissant.

Cf. exercices : 22.2 ; 22.3 ; 22.4 ; 22.5 ; 22.6 ; 22.7 ; 22.8 ; 22.9 ; 22.10 ; 22.11.

22.5 LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES ISOLANTS

Pour les isolants, $\epsilon_r \neq 1$, $\mu_r \neq 1$, et notre discussion des ondes électromagnétiques dans le vide reste adéquate si on remplace simplement ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ et μ_0 par $\mu = \mu_r \mu_0$. On exclut les matériaux ferromagnétiques, pour lesquels μ_r n'est pas défini.

Tout d'abord, au lieu de l'Éq. 22.20 on a

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (22.55)$$

et

$$v = \frac{1}{(\epsilon \mu)^{1/2}} = \frac{c}{(\epsilon_r \mu_r)^{1/2}} = \frac{c}{n}, \quad n = (\epsilon_r \mu_r)^{1/2} \quad (22.56)$$

où n est l'indice de réfraction. Ainsi la vitesse de propagation v d'une onde électromagnétique dans un isolant est plus basse que dans le vide d'un facteur n .⁽¹⁾ Les verres ont un indice de réfraction d'environ 1,5.

(1) Est-ce en contradiction avec la partie 12.6, où on a écrit que les photons voyagent toujours à la vitesse c de la lumière ? Non. La propagation de la lumière dans la matière est plus complexe qu'il n'y paraît car l'onde qu'on observe provient de la superposition de l'onde directe venant de la source et du très grand nombre d'ondes provenant des dipôles individuels qui oscillent dans le milieu. Ces ondes sont toutes associées à des photons qui voyagent à la vitesse c . On a la chance qu'un phénomène aussi complexe puisse être analysé simplement en termes d'un indice de réfraction.

De manière générale, les tables de n s'appliquent aux fréquences optiques ($\approx 10^{15}$ Hz) alors que les tables de ϵ_r et μ_r s'appliquent à des fréquences beaucoup plus petites, au mieux jusqu'à environ 10^{10} Hz. Comme ϵ_r , μ_r et n dépendent tous de la fréquence, les valeurs tirées de telles tables ne satisfont pas la relation ci-dessus.

Par ailleurs, d'après l'Éq. 22.33,

$$k = \frac{1}{\lambda} = \omega(\epsilon\mu)^{1/2}, \quad (22.57)$$

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{k}{\omega\epsilon} = \frac{\omega\mu}{k} = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{\mu_r}{\epsilon_r}\right)^{1/2} 377 \, \Omega \quad (22.58)$$

L'impédance caractéristique Z est encore réelle, et les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont en phase.

Les densités d'énergie électrique et magnétique sont encore égales :

$$\frac{\epsilon E^2/2}{\mu H^2/2} = \frac{\epsilon}{\mu} \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right) = 1 \quad (22.59)$$

et la densité d'énergie totale fluctue encore comme en Fig. 22.4.

Le vecteur de Poynting est encore orienté dans la direction de propagation et

$$\mathbf{S}_{\text{moy}} = \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_{\text{eff}}^2 \hat{\mathbf{z}} = v\epsilon E_{\text{eff}}^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (22.60)$$

$$= \left(\frac{\epsilon_r}{\mu_r}\right)^{1/2} \frac{E_{\text{eff}}^2}{377} \hat{\mathbf{z}} \, \text{W/m}^2 \quad (22.61)$$

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting est encore égale à la vitesse de l'onde multipliée par la moyenne temporelle de la densité d'énergie totale.

Exemple : Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ d'un faisceau laser dans le verre

On ne peut pas ici considérer le faisceau laser de la partie 22.4, car un tel faisceau vaporiserait instantanément le verre. Disons que nous avons un faisceau de 1,0 mW, de diamètre 1,0 mm, dans du verre dont l'indice de réfraction est 1,5. Alors

$$S = \frac{10^{-3}}{\pi \times (5 \times 10^{-4})^2} = 1,3 \times 10^3 \, \text{W/m}^2 \quad (22.62)$$

$$E_{\text{eff}} = \left[\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} S \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{4\pi \times 10^{-7}}{1,5^2 \times 8,85 \times 10^{-12}} \right)^{1/2} \times 1,3 \times 10^3 \right]^{1/2} \quad (22.63)$$

$$= 5,7 \times 10^2 \, \text{V/m} \quad (22.64)$$

$$B_{\text{eff}} = \mu_0 H_{\text{eff}} = \mu_0 \left(\frac{\epsilon}{\mu_0}\right)^{1/2} E_{\text{eff}} = (\epsilon\mu_0)^{1/2} E_{\text{eff}} \quad (22.65)$$

$$= (1,5^2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7})^{1/2} \times 5,7 \times 10^2 \quad (22.66)$$

$$= 2,9 \times 10^{-6} \, \text{T} \quad (22.67)$$

22.6 LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES CONDUCTEURS

La propagation dans les conducteurs stationnaires est plus complexe. Référons-nous aux équations de Maxwell de la partie 21.2. On peut prendre $\rho = 0$ mais, maintenant, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, où σ est la conductivité. On remplace aussi ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, où ϵ_r est sans doute de l'ordre de 3 dans les conducteurs. On prend $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, où $\mu = \mu_r \mu_0$. On exclut les matériaux ferromagnétiques. Alors

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (22.68)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (22.69)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (22.70)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} \quad (22.71)$$

Rappelons-nous maintenant que d'après l'Éq. 22.28, en représentation complexe,

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega, \quad \text{et} \quad \nabla = -jk\hat{\mathbf{z}} \quad (22.72)$$

Ainsi, les équations de Maxwell deviennent

$$-jk\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad -jk\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad (22.73)$$

$$-jk\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad -jk\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (22.74)$$

ou

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}, \quad (22.75)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{E} = -\frac{k}{\omega\epsilon - j\sigma} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} \quad (22.76)$$

Comme dans les non conducteurs, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont transverses et orthogonaux, et $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est orienté dans la direction de propagation.

L'impédance caractéristique est maintenant complexe :

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{k}{\omega\epsilon - j\sigma} = \frac{\omega\mu}{k} \quad (22.77)$$

si bien que E et H ne sont *pas* en phase. Nous reviendrons plus loin sur l'impédance caractéristique et les phases relatives de E et H .

Calculons k :

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j\omega\sigma\mu = \omega^2 \epsilon \mu \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \quad (22.78)$$

Le terme en σ rend compte des pertes Joule et de l'atténuation.

Dans un bon conducteur, par définition, $\sigma/(\omega\epsilon) \gg 1$. La densité de courant de conduction $\sigma\mathbf{E}$ est donc beaucoup plus grande que la densité de courant de déplacement de la partie 7.10 :

$$\sigma\mathbf{E} \gg j\omega\epsilon\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \quad (22.79)$$

Notons que σ et ϵ_r sont toutes deux fonctions de la fréquence, spécialement aux fréquences optiques et des rayons X, de sorte que le rapport $\sigma/(\omega\epsilon)$ ne décroît pas indéfiniment quand la fréquence augmente.

Nous avons besoin de la valeur de k , donc de la racine carrée d'un nombre complexe. Dans le cas général cela demande un peu d'algèbre, mais ici les choses sont faciles car la partie imaginaire de k^2 est beaucoup plus grande que un. Ainsi

$$k \approx \left[\omega^2 \epsilon \mu \frac{\sigma}{\omega\epsilon} (-j) \right]^{1/2} = [\omega \mu \sigma (-j)]^{1/2} \quad (22.80)$$

Mais que vaut la racine carrée de $-j$? Dans le plan complexe, $-j$ est de module 1 et d'argument $-\pi/2$, donc sous forme polaire

$$-j = \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{et} \quad (-j)^{1/2} = \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \quad (22.81)$$

Ainsi

$$k = (\omega \sigma \mu)^{1/2} \exp(-j\pi/4) \quad (22.82)$$

L'équation 22.77 nous dit maintenant que $\mathbf{E}$ précède $\mathbf{H}$ de 45 degrés :

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{\omega \mu}{k} = \frac{\omega \mu}{(\omega \sigma \mu)^{1/2} \exp(-j\pi/4)} = \left(\frac{\omega \mu}{\sigma}\right)^{1/2} \exp(j\pi/4) \quad (22.83)$$

L'impédance caractéristique d'un bon conducteur est proportionnelle à $(f/\sigma)^{1/2}$; rappelons que, dans les isolants, Z est indépendante de la fréquence.

Il est d'usage de poser

$$k = \beta - j\alpha \quad (22.84)$$

Ici,

$$\alpha = \beta = \left(\frac{\omega \mu \sigma}{2}\right)^{1/2} \quad (22.85)$$

α et β sont tous deux positifs. Alors

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \exp(-\alpha z) \exp j(\omega t - \beta z) \quad (22.86)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \exp(-\alpha z) \exp j(\omega t - \beta z) \quad (22.87)$$

Notons que

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{et que} \quad \alpha = \frac{1}{\delta}, \quad \lambda = 2\pi\delta \quad (22.88)$$

où δ est la *profondeur de peau*, ou la *distance d'atténuation*, distance sur laquelle l'amplitude de l'onde décroît d'un facteur $e = 2,71828$. C'est l'*effet de peau*.

En prenant maintenant en compte la différence de phase entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$,

$$E = E_m \exp \left[j \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) - \frac{z}{\delta} \right] \quad (22.89)$$

$$H = \left(\frac{\sigma}{\omega \mu} \right)^{1/2} E_m \exp \left[j \left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{z}{\delta} \right] \quad (22.90)$$

L'onde se propage dans la direction positive de l'axe z . Si $\mathbf{E}$ est parallèle à l'axe x , alors $\mathbf{H}$ est parallèle à l'axe y et

$$\mathbf{E} = E_m \exp \left[j \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) - \frac{z}{\delta} \right] \hat{\mathbf{x}} \quad (22.91)$$

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\sigma}{\omega \mu} \right)^{1/2} E_m \exp \left[j \left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{z}{\delta} \right] \hat{\mathbf{y}} \quad (22.92)$$

$$|Z| = \left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \left(\frac{\omega \mu}{\sigma} \right)^{1/2} \quad (22.93)$$

Quelle est la vitesse de propagation v ? La valeur de β ci-dessus fournit la réponse car $\beta = \omega/v$:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \omega \left(\frac{2}{\omega \mu \sigma} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\omega}{\mu \sigma} \right)^{1/2} \quad (22.94)$$

La propagation d'une onde électromagnétique dans un bon conducteur est particulière en ceci que l'amplitude de l'onde décroît d'un facteur e en une seule longueur d'onde réduite $\lambda = \lambda/(2\pi)$, et d'un facteur $e^{2\pi} \approx 500$ sur une longueur d'onde ! L'atténuation est tellement grande que l'onde est à peine discernable. Voir la Fig. 22.5.

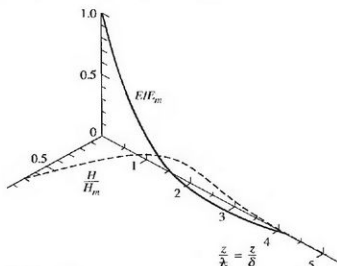


Figure 22.5 Rapports E/E_m et H/H_m à $t = 0$ en fonction de z/λ pour une onde plane électromagnétique qui se propage dans un bon conducteur.

Les bons conducteurs sont donc opaques à la lumière, sauf sous forme de films extrêmement minces. On ne peut en déduire, cependant, que les matériaux qui ne sont pas conducteurs à basse fréquence sont transparents aux fréquences optiques.

On peut montrer que la densité d'énergie est principalement magnétique.

Nous laissons le calcul du vecteur de Poynting dans un conducteur comme problème à la fin de ce chapitre. Notons que E et H sont tous deux proportionnels à $\exp(-\alpha z)$, si bien que S est proportionnel à $\exp(-2\alpha z)$ et que la densité de puissance décroît *très* rapidement avec la distance.

Le vecteur de Poynting est encore égal à la moyenne temporelle de la densité d'énergie totale multipliée par la vitesse de l'onde.

Exemple : La propagation dans le cuivre à 1 MHz

La conductivité du cuivre vaut $5,8 \times 10^7$ S/m. Alors à 1 MHz,

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \approx \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \frac{5,80 \times 10^7}{2\pi \times 10^6 \times 8,85 \times 10^{-12}} \approx 10^{12} \quad (22.95)$$

et la profondeur de peau vaut

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{2}{5,8 \times 10^7 \times 2\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}} \right)^{1/2} \quad (22.96)$$

$$= 66 \mu\text{m} \quad (22.97)$$

Une onde électromagnétique à un mégahertz dans l'air a une longueur d'onde de $c/f = 3 \times 10^8 / 10^6 = 300$ m. Quelle est la longueur d'onde dans le cuivre ? D'après l'Éq. 22.88, $\lambda = 2\pi\delta$ et la longueur d'onde vaut environ 0,4 mm, soit presque un million de fois moins. La vitesse de l'onde dans le cuivre est également basse :

$$v = \omega\lambda = 415 \text{ m/s} \quad (22.98)$$

ce qui fait environ 10 fois *moins* que la vitesse du son dans le cuivre ($3,6 \times 10^3$ m/s).

L'impédance caractéristique du cuivre à un mégahertz est

$$|Z| = \left(\frac{\mu_0 \omega}{\sigma} \right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2\pi \times 10^6}{5,8 \times 10^7} \right)^{1/2} = 3,7 \times 10^{-4} \Omega \quad (22.99)$$

soit environ un million de fois moins que l'impédance caractéristique du vide, qui vaut 377 Ω .

Cf. exercice 22.12.

22.7 RÉSUMÉ

Le spectre électromagnétique connu s'étend d'environ 100 Hz ($\lambda = 3 \times 10^6$ m) à 10^{24} Hz ($\lambda = 3 \times 10^{-16}$ m).

L'équation d'onde pour une quantité vectorielle E qui se propage sans atténuation à la vitesse v est

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (22.12)$$

Dans l'étude des ondes, on utilise les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ plutôt que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, à cause de l'importance de l'impédance caractéristique $Z = E/H$ et du vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$.

Dans le cas d'une onde plane qui se propage dans la direction positive de l'axe z , en représentation complexe,

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega, \quad \text{et} \quad \nabla = -jk\hat{z} \quad (22.28)$$

Les ondes électromagnétiques planes, polarisées linéairement, qui se propagent soit dans le vide, soit dans un milieu homogène, isotrope, linéaire et stationnaire, conducteur ou non, ont les propriétés suivantes.

- 1) Les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont *transverses* et *orthogonaux*.
- 2) Le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est orienté dans la direction de propagation.
- 3) Son module, moyenné sur le temps, est égal à la densité de puissance se propageant dans l'onde :

$$S_{\text{moy}} = \frac{1}{2} |\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)| \text{ W/m}^2 \quad (22.46)$$

- 4) Le module du vecteur de Poynting correspond aussi à la moyenne temporelle de la densité d'énergie totale multipliée par la vitesse de l'onde.
- 5) L'impédance caractéristique du milieu de propagation est

$$Z = E/H \quad (22.34)$$

- 6) Le *théorème de Poynting* stipule qu'il y a conservation de l'énergie dans un champ électromagnétique, la densité de puissance dans l'onde étant donnée par le vecteur de Poynting.

Dans le vide,

$$c = \frac{1}{(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (22.21, 22.22)$$

$$Z_0 \approx 377 \Omega \quad (22.35)$$

$$E = Bc \quad (22.36)$$

Les densités d'énergie électrique et magnétique sont égales et

$$S_{\text{moy}} \approx \frac{E_{\text{eff}}^2}{377} \hat{z} \text{ W/m}^2 \quad (22.49)$$

Dans les *isolants*,

$$v = \frac{c}{(\epsilon_r \mu_r)^{1/2}} = \frac{c}{n} \text{ m/s} \quad (22.56)$$

où n est l'*indice de réfraction*, et

$$Z \approx \left(\frac{\mu_r}{\epsilon_r} \right)^{1/2} 377 \Omega \quad (22.58)$$

Les densités d'énergie électrique et magnétique sont encore une fois égales et

$$\mathcal{S}_{\text{moy}} \approx \left(\frac{\varepsilon_r}{\mu_r} \right)^{1/2} \frac{E_{\text{eff}}^2}{377} \hat{z} \text{ W/m}^2 \quad (22.61)$$

Dans les *conducteurs*, la vitesse de l'onde

$$v = \left(\frac{2\omega}{\mu\sigma} \right)^{1/2} \quad (22.94)$$

est très basse, ainsi que l'impédance caractéristique

$$Z = \left(\frac{\omega\mu}{\sigma} \right)^{1/2} \exp(j\pi/4) \quad (22.83)$$

L'onde est fortement atténuée : l'amplitude de E et H décroît d'un facteur e sur une longueur d'onde réduite $\lambda = \lambda/(2\pi)$, ce qui correspond à la *distance d'atténuation* ou *profondeur de peau* δ . La plus grande partie de l'énergie du champ est magnétique.

EXERCICES

22.1 Antenne-cadre

Une onde plane électromagnétique de fréquence 30 MHz se propage dans le vide, et son champ E crête vaut 100 mV/m.

Calculer la tension maximale induite dans un cadre récepteur de 1,00 m², comportant 10 spires, et orienté de telle sorte que son plan fasse un angle de 60° avec le vecteur magnétique.

22.2 La Terre, une planète habitable

La densité de puissance de la radiation solaire vaut environ 1 kW/m² à la surface de la Terre et 1,4 kW/m² au-dessus de l'atmosphère. On sent donc la chaleur quand on se promène au soleil, même s'il est à 150 millions de kilomètres !

- Calculer le module du vecteur de Poynting à la surface du Soleil.
- Quelle aire sur la surface du Soleil rayonne un gigawatt ? C'est la puissance électrique produite par une grande centrale nucléaire.
- Calculer E_{eff} et H_{eff} à la surface du Soleil.
- Il est intéressant de réfléchir au fait que les conditions à la surface de la Terre sont juste celles nécessaires pour que la vie s'y développe.

Comme on l'a vu dans le troisième exemple de la partie 17.5, le champ magnétique terrestre nous protège de la plupart des particules chargées issues du rayonnement cosmique. Ce champ magnétique est engendré par les mouvements de convection dans le noyau externe, liquide, de la Terre. S'il était solide, comme la Lune, la Terre n'aurait pas de champ magnétique ; le rayonnement cosmique serait alors beaucoup plus intense et les êtres vivants seraient soumis à beaucoup plus de mutations.

Revenons au rayonnement solaire. Si la Terre était plus proche ou plus lointaine, la température serait soit trop élevée soit trop basse. Ou encore, si l'orbite de la Terre était beaucoup plus elliptique qu'elle ne l'est, avec la même distance moyenne, alors la température serait trop élevée pendant une partie de l'année et trop faible pendant le reste du temps. L'orbite est en fait un cercle presque parfait, le rapport entre la distance maximale et la distance minimale valant 1,0001395.

Quelle variation du rayon de l'orbite terrestre pourrait-on tolérer, en pourcentage, si la puissance radiative incidente pouvait varier de 20 % sans trop de dégâts ?

(e) La rotation de la Terre autour de son propre axe est importante. Si la Terre tournait autour du Soleil de la même façon que la Lune autour de la Terre, en gardant toujours la même hémisphère face au Soleil, alors la puissance moyenne arrivant sur cette moitié serait double et la température à la surface serait insoutenable. L'autre hémisphère serait froide et pas plus habitable que la Lune. Grâce à la rotation, la Vie peut se développer sur presque tout le globe terrestre.

Mais la vitesse angulaire doit être assez grande ! Que se passerait-il si les jours étaient beaucoup plus longs ?

(f) Si la Terre tournait à deux fois sa vitesse actuelle, combien pèserait-on ?

Et si elle tournait de plus en plus vite ? Cela nécessiterait un couple de torsion appliqué de l'extérieur !

(g) Il y a aussi le problème de l'angle entre l'axe de rotation terrestre et l'écliptique (le plan de l'orbite). Cet angle vaut $66,5^\circ$. C'est parce que cet angle ne vaut pas 90° qu'il y a des saisons.

Que se passerait-il si l'angle était de 0° ? L'orientation de l'axe de rotation terrestre reste essentiellement fixe dans l'espace au cours des ans.

(h) La force d'attraction gravitationnelle entre le Soleil et la Terre est proportionnelle à $1/r^2$. Que se passerait-il si la force n'était pas exactement proportionnelle à $1/r^2$?

(i) Comment varie la constante gravitationnelle g à la surface en fonction du rayon terrestre, pour une densité moyenne donnée ?

Si le rayon de la Terre était deux fois plus grand, avec la même densité, de quel facteur votre poids changerait-il ?

La valeur de g est importante : si g était, disons, 10 fois plus élevée qu'elle ne l'est, tous les êtres vivants devraient être structurés différemment, ou la vie serait impossible.

(j) Supposons une atmosphère d'oxygène à une température de zéro degré. Pour quelle valeur minimale de g une molécule d'oxygène restera-t-elle au voisinage de la Terre ? On suppose que toutes les molécules ont la même vitesse.

On peut probablement penser à beaucoup d'autres paramètres qui doivent avoir juste la bonne valeur pour rendre notre planète habitable.

Jusqu'à présent (2000), les astronomes n'ont pas trouvé d'autre système planétaire où puisse exister la vie. Voir *Physics World*, Mai 1999, p. 46, l'ouvrage de Jakosky [19], Ward et Brownlee [55] et *Physics Today*, Octobre 1999, p. 367, et Septembre 2000, p. 62.

22.3 Le vecteur de Poynting dans une onde

Une onde polarisée circulairement résulte de la superposition de deux ondes qui sont (a) de fréquence et d'amplitude identiques, (b) linéairement polarisées dans des directions perpendiculaires, et (c) déphasées de 90° .

Montrer que la valeur moyenne du vecteur de Poynting pour une telle onde est égale à la somme des valeurs moyennes des vecteurs de Poynting des deux composantes.

22.4 Le vecteur de Poynting dans une onde

Dans une onde électromagnétique dans l'air, $E_{\text{eff}} = 20 \text{ V/m}$. L'onde est absorbée par une plaque conductrice qui a une densité surfacique de masse de 10^{-3} kg/m^2 et une chaleur spécifique de 400 J/(kg.K) .

Calculer le taux auquel la température monte, en supposant qu'il n'y a ni perte de chaleur ni émission radiative secondaire.

22.5 Énergie solaire

Calculer l'aire nécessaire pour produire, à la surface de la Terre, un mégawatt de puissance électrique à partir de l'énergie solaire, en supposant une efficacité moyenne sur un an de 2%. L'efficacité des cellules photovoltaïques est d'environ 15% à incidence normale.

22.6 Le vecteur de Poynting dans le champ d'un fil résistif parcouru par un courant

Un fil long et rectiligne de rayon a et de résistance $R' \text{ } \Omega/\text{m}$ est parcouru par un courant I .

- Calculer le vecteur de Poynting à la surface, et expliquer.
- Calculer le vecteur de Poynting à l'extérieur et à l'intérieur du fil. Expliquer.

22.7 Le vecteur de Poynting dans un condensateur

Un condensateur mince à faces planes et parallèles, isolé par de l'air, a des plaques circulaires de rayon R , séparées par une distance s . Un courant constant I charge les plaques par des fils fins le long de l'axe de symétrie.

- Trouver la valeur de E entre les plaques en fonction du temps. On supposera un E uniforme. Indiquer la direction de E sur une figure.
- Le champ magnétique est la somme de deux termes, H_f , lié au courant dans le fil, et H_p , lié au courant dans les plaques. Ce dernier courant dépose des charges sur les surfaces internes des plaques.

Trouver H_f , H_p et H . On utilisera les coordonnées cylindriques, avec l'axe z le long du fil et dans la direction du courant. Pour calculer H_p , on appliquera le théorème de la circulation d'Ampère à chaque plaque. On doit trouver que les champs magnétiques tendent vers l'infini quand $p \rightarrow 0$. Cela est simplement dû au fait que l'on a supposé les fils et les plaques infiniment fins. Indiquer la direction de H_f , H_p et H sur la figure.

- Les champs E et H satisfont-ils les équations de Maxwell ? On trouve normalement que l'une des hypothèses est incorrecte.

(d) Trouver $E \times H$.

(e) Trouver les énergies électrique et magnétique à l'intérieur d'un rayon p .

On doit trouver que l'énergie magnétique est négligeable si $p^2/r^2 \ll c^2$. Cette condition est valable car on a supposé que le condensateur se charge lentement. S'il se chargeait très rapidement, alors il y aurait une onde de E et H dans le condensateur, E ne serait pas uniforme et le calcul ci-dessus serait invalide.

- Établir alors le lien entre le vecteur de Poynting en p et l'énergie électrique à l'intérieur de p .
- Tracer un schéma indiquant les vecteurs E , H et $E \times H$ en différents points à l'intérieur et autour du condensateur.

22.8 Le vecteur de Poynting dans un solénoïde

Un long solénoïde est parcouru par un courant I .

- (a) Le courant augmente. Dessiner une coupe longitudinale indiquant la direction du courant, ainsi que $\mathbf{A}$, $-\partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Pourquoi le vecteur de Poynting est-il orienté de cette façon ?
- (b) Mêmes questions, avec un courant décroissant.

22.9 Le vecteur de Poynting dans un moteur à induction

Dans un moteur à induction, le stator engendre un champ magnétique perpendiculaire à l'axe de symétrie et qui tourne autour de lui. Le rotor est un cylindre de fer laminé, avec des barres de cuivre parallèles à l'axe et insérées dans des rainures sur la surface du cylindre. Des anneaux de cuivre à chaque extrémité du rotor connectent toutes les barres de cuivre. Le rotor n'est pas connecté au générateur qui alimente le moteur.

Comme on va le voir, le rotor tend à suivre le champ magnétique tournant $\mathbf{B}$. La figure 22.6 indique le principe de fonctionnement. Pour simplifier l'analyse, on supposera que le rotor est immobile et qu'un électroaimant tournant, représenté ici par ses pôles N et S , fournit le champ magnétique tournant.

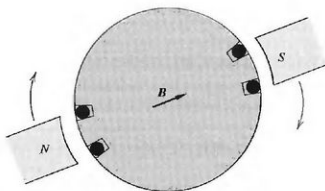


Figure 22.6

- (a) Tracer une figure plus grande avec de grands interstices d'air, montrant la direction des courants induits dans les barres et la direction de $\mathbf{E}$ dans les interstices.
- (b) Le courant dans le rotor engendre un champ magnétique. Ajouter des flèches montrant la direction de $\mathbf{H}$, à l'intérieur du rotor et dans les interstices d'air.
- (c) Représenter maintenant le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ dans les interstices d'air. Le champ injecte de la puissance dans le rotor.
- (d) Dessiner maintenant une autre figure indiquant les courants dans les barres et une ligne de $\mathbf{B}$ pour la somme des deux champs magnétiques.
- (e) Montrer la direction des forces magnétiques sur les barres.

22.10 Le vecteur de Poynting dans un transformateur

La figure 22.7 représente, sous forme simplifiée, une section du secondaire d'un transformateur. Le champ $\mathbf{B}$ à l'intérieur du noyau N , et le champ de fuite $\mathbf{H}_f$ à l'extérieur, proviennent tous les deux des courants dans les enroulements et des courants équivalents dans le noyau. L'enroulement secondaire est ES . On supposera que $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}_f$ augmentent. Voir Lorrain [25].

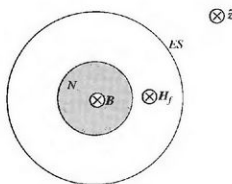


Figure 22.7

- (a) Dessiner une figure plus grande et indiquer, en un point entre N et ES , les vecteurs $\mathbf{A}$, $\partial \mathbf{A} / \partial t$ et $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$, en négligeant le courant dans ES . Représenter un vecteur $\mathbf{E}$ en un point extérieur à ES .
- (b) On suppose que l'impédance du secondaire est une résistance pure R . Indiquer la direction du courant I en ES .
- (c) Montrer la direction de son champ $\mathbf{H}$ en des points entre N et ES , et à l'extérieur de ES .
- (d) Représenter le vecteur $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$.
- (e) Comment la direction du vecteur $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ serait-elle affectée si $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}_f$ diminuaient ?
- (f) Quelle est la moyenne temporelle d'un vecteur $\mathbf{E} \times \mathbf{H}_f$?
- (g) Calculer maintenant l'écoulement de puissance dans le secondaire. On suppose que le secondaire est un long solénoïde de N spires et de longueur L . On néglige $\mathbf{H}_f$ et on prend $\Phi = \Phi_m \exp j\omega t$ dans le noyau. Intégrer le vecteur de Poynting sur une surface cylindrique située entre le noyau et l'enroulement, et montrer que la puissance qui s'écoule dans l'enroulement est $(N\omega\Phi_{\text{eff}})^2/R = V_{\text{eff}}^2/R$, où V est la tension induite dans l'enroulement secondaire.

22.11 Énergie et puissance dans un faisceau de protons

La figure 22.8 montre un diagramme très simplifié d'un accélérateur de protons. Une décharge électrique dans la source S ionise le gaz d'hydrogène pour produire des protons. Certains protons sortent à travers un trou et sont focalisés en un faisceau F de rayon R_1 à l'intérieur d'un tube conducteur T de rayon R_2 . La source est à un potentiel V , et la cible est connectée à la terre.

Pour éviter des complications inutiles, on suppose que la densité de charge dans le faisceau est uniforme. On suppose aussi que la vitesse des protons est très inférieure à c : $v^2 \ll c^2$.

Calculer, en fonction du courant I et de la vitesse v :

- (a) l'énergie électrique par mètre $\mathcal{E}'_e$ à l'intérieur du tube ;
- (b) l'énergie magnétique par mètre $\mathcal{E}'_m$;
- (c) le flux d'énergie associé au vecteur de Poynting P_P ;
- (d) la puissance cinétique P_c , soit le flux d'énergie cinétique, en négligeant P_P .

L'existence de ce vecteur de Poynting est intéressante. À cause du $\mathbf{E}$ radial, la tension à l'intérieur du faisceau est légèrement positive. Ainsi, les protons ne sont pas accélérés à la tension totale V , et l'énergie cinétique dans le faisceau est légèrement plus faible que VI . La plus grande partie de

la puissance s'écoule dans le tube sous forme d'énergie cinétique, et le reste sous forme d'énergie électromagnétique. La puissance totale en tout point le long du tube et sur la cible est VI .

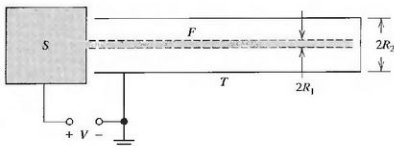


Figure 22.8

(e) Trouver les valeurs numériques de ces grandeurs pour un faisceau de protons de 1,00 mA et 1,00 MeV, avec $R_1 = 1,00$ mm et $R_2 = 50,00$ mm.

22.12 Chauffage par induction

Il est courant de chauffer des conducteurs en les soumettant à un champ magnétique alternatif. Le flux variable induit des *courants de Foucault* qui chauffent le conducteur par effet Joule (Partie 18.3). La méthode est appelée *chauffage par induction*. Elle est très utilisée pour fondre des métaux et pour durcir et forger l'acier.

La puissance utilisée varie des watt aux mégawatt, et les fréquences de 60 Hz à plusieurs centaines de kilohertz.

Les avantages du chauffage par induction sont la commodité et l'absence de contamination des métaux par des gaz de combustion. Il permet même de chauffer un conducteur enfermé dans une enceinte à vide. Le chauffage par induction a un autre avantage majeur. À haute fréquence, les courants s'écoulent près de la surface du conducteur. C'est l'*effet de peau*. Ainsi, en choisissant judicieusement la fréquence, on peut appliquer un bref traitement thermique jusqu'à une profondeur connue. Cela est particulièrement important, car pour de nombreuses applications on a besoin de pièces d'acier avec une surface dure et un cœur mou : la surface dure résiste à l'abrasion et le noyau tendre réduit les ruptures. Les socs de charrue sont traités thermiquement de cette façon.

Des *fours à induction* sont utilisés pour fondre les métaux. Ils consistent en de grands creusets d'une capacité allant jusqu'à 30 tonnes, thermiquement isolés et entourés de bobines parcourues par du courant. L'opération commence habituellement avec une partie de la charge déjà fondue.

Considérons la Fig. 22.9(a), où une barre de rayon a , de longueur L et de conductivité σ est placée à l'intérieur d'un solénoïde ayant N' spires par mètre et parcourue par un courant alternatif

$$I = I_0 \cos \omega t$$

Comme d'habitude, on négligera les effets de bord.

On suppose aussi que la fréquence est suffisamment basse pour éviter les complications dues à l'effet de peau. Cette hypothèse est bien satisfaite à 60 Hz avec une barre de graphite ($\sigma = 1,0 \times 10^5$ S/m) de rayon 60 mm. En d'autres termes, l'induction magnétique liée aux courants induits est négligeable. On suppose aussi que le conducteur est amagnétique.

Cela est bien entendu une illustration très simplifiée du chauffage par induction. En outre, la puissance dissipée dans le graphite est seulement de quelques watts, ce qui est ridiculement petit pour une si grande pièce. Ce problème reste malgré tout un exercice utile sur les courants induits. On considère un anneau de rayon r , d'épaisseur dr et de longueur L à l'intérieur du conducteur, comme en Fig. 22.9(b).

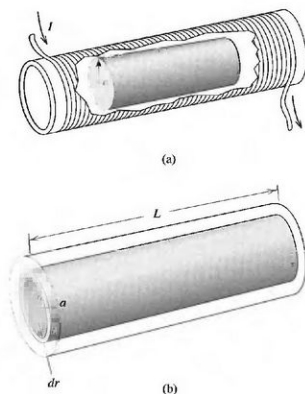


Figure 22.9 (a) Chauffage d'un cylindre conducteur par induction. (b) Anneau à l'intérieur du cylindre de la figure (a).

- (a) Montrer que la force électromotrice induite dans l'anneau est

$$\mu_0 \pi r^2 \omega N' I_0 \sin \omega t$$

- (b) Montrer que, pour un courant qui s'écoule en direction azimutale, l'anneau a une résistance

$$R = 2\pi r / (\sigma L dr)$$

- (c) Montrer que la puissance moyenne dissipée dans l'anneau est

$$\frac{1}{4} (\mu_0 \omega N' I_0)^2 \pi \sigma L r^3 dr$$

- (d) Montrer que la puissance totale dissipée en moyenne dans le cylindre est

$$\frac{1}{16} (\mu_0 \omega N' I_0)^2 \pi \sigma L a^4$$

- (e) Calculer la puissance dissipée dans la barre de graphite, en prenant $L = 1$ m, $I_0 = 20$ A, $N' = 5\,000$ spires/m.

Chapitre 23

Ondes électromagnétiques : réflexion et réfraction

En général, une onde qui rencontre une discontinuité dans son milieu de propagation donne naissance à la fois à une onde réfléchie et à une onde transmise, ou réfractée. Par exemple, une onde sonore incidente sur un mur donne une onde qui revient en arrière dans la pièce et une autre qui pénètre dans le mur.

Au chapitre 22 on a étudié la propagation des ondes électromagnétiques dans des milieux illimités. Nous nous intéressons maintenant au comportement d'une onde incidente sur l'interface entre deux milieux, comme en Fig. 23.1. Comme on le verra, il y a des cas où il n'y a *pas d'onde réfléchie* (Paragraphe 23.3.1 sur l'angle de Brewster) et des cas où il n'y a *pas d'onde transmise* (Paragraphe 23.3.2 sur la réflexion totale).

23.1 LES LOIS DE DESCARTES POUR LA RÉFLEXION ET LA RÉFRACTION

Les lois de la réflexion et de la réfraction sont généralement enseignées à un niveau élémentaire. Notre but dans cette partie est de les déduire de la théorie des ondes.

Les ondes incidente et réfléchie sont dans le milieu 1 et l'onde transmise est dans le milieu 2, comme en Fig. 23.1. Le milieu 1 est soit le vide soit un isolant, et le milieu 2, le vide, un isolant ou un conducteur.

Les hypothèses suivantes simplifieront nos calculs. (a) Les deux milieux sont homogènes, isotropes, linéaires et stationnaires (HILS). (b) Ils s'étendent à l'infini des deux côtés de l'interface ; cela exclut des réflexions multiples. (c) L'interface est fine et plane.

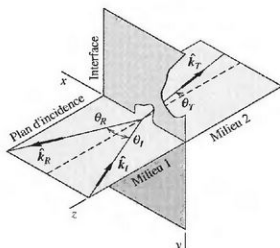


Figure 23.1 Une onde électromagnétique incidente sur l'interface entre le milieu 1 et le milieu 2 donne à la fois une onde réfléchie et une onde transmise.

Les vecteurs $\hat{k}$ sont orthogonaux à leurs fronts d'onde respectifs et sont orientés dans la direction de propagation. Les angles θ_i , θ_r , θ_t sont, respectivement, les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction.

(d) L'onde incidente est plane. (e) L'origine se trouve sur l'interface, comme sur la figure.

L'onde incidente est donc de la forme

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_{Im} \exp j(\omega t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r}) \quad (23.1)$$

où $\mathbf{E}_{Im}$ est réel, par hypothèse, et où le vecteur d'onde $\mathbf{k}_I$ est orienté le long d'un rayon dans l'onde incidente. Cette expression décrit une onde plane qui se propage sans atténuation à travers tout le temps et tout l'espace, mais elle est valable seulement dans le milieu 1.

Le module de $\mathbf{k}_I$ est $k_I = n_1 k_0 = n_1 / \lambda_0$, n_1 étant l'indice de réfraction du milieu 1 et λ_0 étant la longueur d'onde réduite d'une onde de même fréquence dans le vide.

On peut attendre des ondes réfléchie et transmise de la forme

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{Rm} \exp j(\omega t - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}) \quad (23.2)$$

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{Tm} \exp j(\omega t - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}) \quad (23.3)$$

Les trois ondes sont de même fréquence, et doivent être des fonctions identiques de la position sur l'interface.

Soit maintenant $\mathbf{r}_{int}$ un point sur l'interface. L'origine se trouve aussi sur l'interface. Prenons $\mathbf{k}_I$ dans le plan $y = 0$, comme sur la figure. Les trois ondes doivent être des fonctions identiques de la position sur l'interface, si bien que

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r}_{int} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}_{int} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}_{int} \quad (23.4)$$

Les projections des trois $\mathbf{k}$ sur l'interface doivent donc être égales. Puisque la composante y de $\mathbf{k}_I$ est nulle, $\mathbf{k}_R$ et $\mathbf{k}_T$ ont aussi des composantes nulles selon y , et les trois rayons dessinés en Fig. 23.1 sont *coplanaires*. Le plan défini par les trois rayons indiqués sur la figure est le *plan d'incidence*.

En outre, les composantes x de $\mathbf{k}_I$ et de $\mathbf{k}_R$ sont égales :

$$k_1 \sin \theta_I = k_1 \sin \theta_R \quad (23.5)$$

et $\theta_R = \theta_I$: l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

C'est la *première loi de Descartes*, concernant la réflexion : le rayon incident et le rayon réfléchi sont coplanaires et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Par ailleurs, on a aussi que

$$k_1 \sin \theta_I = k_2 \sin \theta_T \quad (23.6)$$

Alors

$$n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T \quad (23.7)$$

qui est la *deuxième loi de Descartes* : quand une onde électromagnétique traverse une interface, il y a conservation du produit $n \sin \theta$.

Les lois de Descartes sont générales. Elles sont valables pour tout milieu HILS, qu'il soit conducteur ou non.

Mais il est concevable que $(n_1/n_2) \sin \theta_I$ soit plus grand que un. Alors $\sin \theta_T > 1$! Cela semble absurde, mais ne l'est pas : voir le paragraphe 23.3.2 sur la réflexion totale.

23.2 LES ÉQUATIONS DE FRESNEL

Il nous faut maintenant des relations entre $\mathbf{E}_{Im}$, $\mathbf{E}_{Rm}$ et $\mathbf{E}_{Tm}$ qui assureront la continuité des composantes tangentielles de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{H}$ à l'interface. Supposons que les ondes soient polarisées linéairement. Le vecteur $\mathbf{E}$ de l'onde incidente peut être orienté dans n'importe quelle direction perpendiculaire à $\mathbf{k}_I$.

Alors, à l'interface,

$$E_{Ix} + E_{Rx} = E_{Tx}, \quad E_{Iy} + E_{Ry} = E_{Ty} \quad (23.8)$$

$$H_{Ix} + H_{Rx} = H_{Tx}, \quad H_{Iy} + H_{Ry} = H_{Ty} \quad (23.9)$$

On considère successivement des ondes incidentes polarisées avec leur vecteur $\mathbf{E}$ normal, puis parallèle, au plan d'incidence. Voir les Figs. 23.2 et 23.3. Observons que les deux figures coïncident à incidence normale. Nous utilisons la continuité de E_y et H_x en Fig. 23.2 et celle de E_x et H_y en Fig. 23.3.

Avec $\mathbf{E}$ normal au plan d'incidence, les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ de l'onde incidente sont orientés comme en Fig. 23.2. Puisque les deux milieux sont isotropes, les vecteurs $\mathbf{E}$ des deux autres ondes sont aussi normaux au plan d'incidence. La raison en est que les électrons dans les deux milieux oscillent dans la direction normale au plan d'incidence, et rayonnent des ondes polarisées avec $\mathbf{E}$ normal au plan d'incidence.

Avec les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ orientés comme en Fig. 23.2, le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est orienté dans la direction de propagation, ou dans la direction des vecteurs $\mathbf{k}$.

À cause de la continuité de la composante tangentielle de $\mathbf{E}$ à l'interface,

$$E_{Im} + E_{Rm} = E_{Tm} \quad (23.10)$$

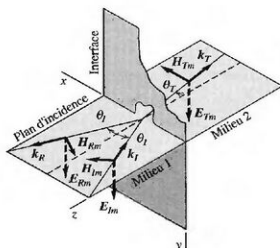


Figure 23.2 Ondes incidente, réfléchie et transmise pour une onde incidente polarisée avec son champ $\mathbf{E}$ normal au plan d'incidence.

Les flèches indiquent les directions dans lesquelles les vecteurs sont définis comme positifs à l'interface. Le vecteur $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est orienté partout dans la direction de propagation, c'est-à-dire dans la direction du vecteur $\mathbf{k}$.

De même, à cause de la continuité de la composante tangentielle de $\mathbf{H}$,

$$H_{Im} \cos \theta_I - H_{Rm} \cos \theta_R = H_{Tm} \cos \theta_T \quad (23.11)$$

ou, d'après les parties 22.5 et 22.6,

$$\frac{(E_{Im} - E_{Rm}) \cos \theta_I}{Z_1} = \frac{E_{Tm} \cos \theta_T}{Z_2} \quad (23.12)$$

En résolvant,

$$\left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_I - Z_1 \cos \theta_T}{Z_2 \cos \theta_I + Z_1 \cos \theta_T} \quad (23.13)$$

$$\left(\frac{E_{Tm}}{E_{Im}} \right)_{\perp} = \frac{2Z_2 \cos \theta_I}{Z_2 \cos \theta_I + Z_1 \cos \theta_T} \quad (23.14)$$

L'indice $\perp$ indique que les vecteurs $\mathbf{E}$ sont perpendiculaires au plan d'incidence. Ce sont deux des *équations de Fresnel*.

De même, avec $\mathbf{E}$ parallèle au plan d'incidence comme en Fig. 23.3, on trouve les deux autres équations de Fresnel :

$$\left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_{\parallel} = \frac{Z_2 \cos \theta_T - Z_1 \cos \theta_I}{Z_2 \cos \theta_T + Z_1 \cos \theta_I} \quad (23.15)$$

$$\left(\frac{E_{Tm}}{E_{Im}} \right)_{\parallel} = \frac{2Z_2 \cos \theta_I}{Z_2 \cos \theta_T + Z_1 \cos \theta_I} \quad (23.16)$$

Voir Lorrain [26].

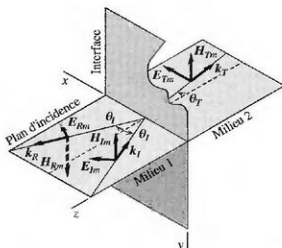


Figure 23.3 Cette figure est similaire à la Fig. 23.2, sauf qu'ici les champs E sont tous *parallèles* au plan d'incidence.

23.3 RÉFLEXION ET RÉFRACTION À L'INTERFACE ENTRE DEUX ISOLANTS

Les indices $\perp$ et $\parallel$ font référence à l'orientation du vecteur E de l'onde incidente par rapport au plan d'incidence.

Avec des isolants des deux côtés de l'interface, les lois de Descartes de la partie 23.1 sont valables et

$$Z_1 = c\mu_0/n_1, \quad Z_2 = c\mu_0/n_2, \quad (23.17)$$

$$\left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_{\perp} = \frac{(n_1/n_2) \cos \theta_I - \cos \theta_T}{(n_1/n_2) \cos \theta_I + \cos \theta_T} \quad (23.18)$$

$$\left(\frac{E_{Tm}}{E_{Im}} \right)_{\perp} = \frac{2(n_1/n_2) \cos \theta_I}{(n_1/n_2) \cos \theta_I + \cos \theta_T} \quad (23.19)$$

Puisque

$$n_1/n_2 = \sin \theta_T / \sin \theta_I, \quad (23.20)$$

on peut montrer que le premier rapport (Éq. 23.18) est proportionnel à $\sin(\theta_T - \theta_I)$. Donc ce rapport peut être positif ou négatif, mais ne peut pas être nul. Le second rapport (Éq. 23.19) est toujours positif. Voir les Figs. 23.4a, 23.4b et 23.5.

De plus,

$$\left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_{\parallel} = \frac{-\cos \theta_I + (n_1/n_2) \cos \theta_T}{\cos \theta_I + (n_1/n_2) \cos \theta_T} \quad (23.21)$$

$$\left(\frac{E_{Tm}}{E_{Im}} \right)_{\parallel} = \frac{2(n_1/n_2) \cos \theta_I}{\cos \theta_I + (n_1/n_2) \cos \theta_T} \quad (23.22)$$

Dans ce cas le premier rapport peut être positif, négatif ou nul, mais le deuxième rapport est toujours positif. Voir la Fig. 23.6.

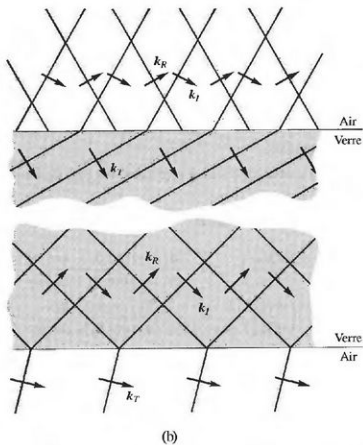
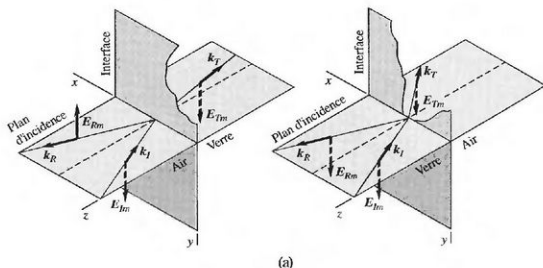


Figure 23.4a (a) Phases relatives, à l'interface, des E des ondes réfléchi et transmise pour $n_1 < n_2$ et pour $n_1 > n_2$, avec E_{im} normal au plan d'incidence. À gauche, l'onde réfléchi est déphasée de π rad par rapport à l'onde incidente. L'onde transmise est en phase, dans les deux cas.
 (b) Crêtes du champ E à un instant donné. Les crêtes sont séparées d'une longueur d'onde et se propagent dans la direction des flèches. Notons le déphasage de π après une réflexion sur la surface du verre. Remarquons aussi la figure d'interférence provenant de la superposition des ondes incidente et réfléchi.

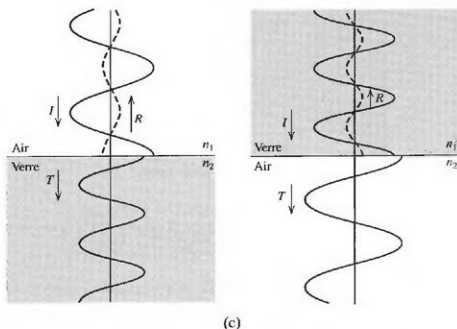


Figure 23.4b (c) Les vecteurs E à un instant donné dans les ondes incidente, réfléchi et transmise à incidence normale sur une interface verre-air. À droite, E_{Tm} est plus grand que E_{Im} . Pourtant, la conservation de l'énergie est toujours vérifiée.

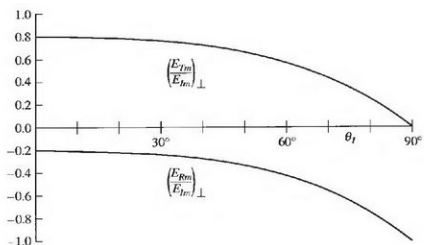


Figure 23.5 Réflexion et réfraction quand $n_1/n_2 = 1/1,5$. Par exemple quand la lumière tombe sur du verre d'indice $n = 1,5$. Le champ E est normal au plan d'incidence.

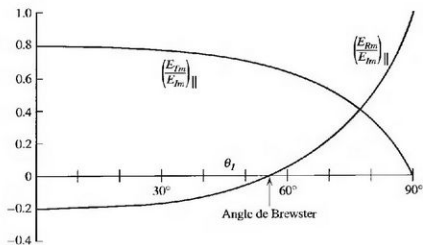


Figure 23.6 Réflexion et réfraction quand $n_1/n_2 = 1/1,5$. Comme en Fig. 23.5, mais avec E parallèle au plan d'incidence.

23.3.1 L'angle de Brewster

L'angle de Brewster est l'angle d'incidence pour lequel le membre de droite de l'Éq. 23.21 est nul. Pour cet angle d'incidence particulier il n'y a pas d'onde réfléchie ! Notons qu'il n'existe d'angle de Brewster que si l'onde incidente est polarisée avec son vecteur E parallèle au plan d'incidence. Alors

$$\cos \theta_I = (n_1/n_2) \cos \theta_T \quad (23.23)$$

En appliquant encore la seconde loi de Descartes,

$$\sin \theta_I \cos \theta_I = \sin \theta_T \cos \theta_T, \quad \text{ou} \quad \sin(2\theta_I) = \sin(2\theta_T) \quad (23.24)$$

La première solution qui vient à l'esprit est $\theta_I = \theta_T$, mais elle est interdite par la seconde loi de Descartes car $n_1 \neq n_2$. L'autre solution est

$$2\theta_T = \pi - 2\theta_{IB}, \quad \text{ou} \quad \theta_{IB} + \theta_T = \pi/2 \quad (23.25)$$

Les rayons incident et transmis sont perpendiculaires. Alors

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_{IB}} = \frac{\sin(\pi/2 - \theta_{IB})}{\sin \theta_{IB}} = \cotan \theta_{IB} \quad (23.26)$$

C'est la condition qui définit l'angle de Brewster (voir Fig. 23.7). Pour de la lumière se propageant dans l'air et tombant sur du verre dont l'indice de réfraction est 1,5, $\theta_{IB} = 56,3^\circ$.

L'angle de Brewster est communément utilisé pour mesurer l'indice de réfraction d'une substance par réflexion d'un rayon de lumière sur sa surface. La mesure peut être précise à cinq chiffres significatifs.

Une onde plane incidente sur une lame de verre à l'angle de Brewster rencontre la seconde interface aussi à l'angle de Brewster. Ainsi, il n'y a pas de réflexion, ni sur la première ni sur la seconde interface.

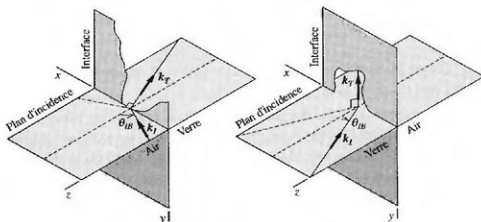


Figure 23.7 Si l'angle d'incidence est égal à l'angle de Brewster et si E se trouve dans le plan d'incidence, il n'y a pas d'onde réfléchi. Le rayon réfléchi manquant est à 90° du rayon transmis.

Exemple : Le laser Hélium-Néon (He-Ne)

Il existe plusieurs types de lasers à gaz, mais le laser He-Ne est de loin le plus commun (Waynant et Ediger [56]). Voir la Fig. 23.8. Le générateur, de tension $V \approx 1\,000$ V, excite une décharge à travers le gaz dans le tube de verre, de diamètre interne de 1 à 2 mm et de longueur jusqu'à un mètre. Le gaz est un mélange de 85 % d'hélium et de 15 % de néon, à une pression totale d'environ 130 Pa (1 mm de mercure), et la longueur d'onde vaut 632,8 nm (rouge). La puissance du faisceau est de l'ordre du milliwatt.

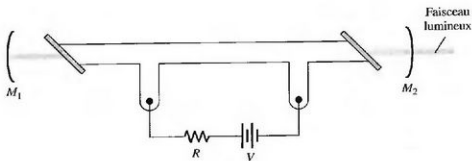


Figure 23.8 Schéma d'un laser He-Ne.
Remarquons les deux fenêtres à l'angle de Brewster.

Voyons comment le laser engendre un faisceau de lumière, ou *lase*. Oublions les fenêtres à l'angle de Brewster pour le moment. Les miroirs M_1 et M_2 sont légèrement concaves, et la lumière oscille entre eux. La décharge réalise une *inversion de population* dans le gaz, rendant la population des états d'énergie supérieure plus grande que celle des états d'énergie inférieure. Cela permet l'*émission stimulée*, par laquelle un photon incident stimule la désexcitation d'un état excité vers un état de plus basse énergie, avec émission d'un deuxième photon de même énergie et de même impulsion. Il y a amplification et le gaz agit comme un *résonateur*; l'intensité lumineuse

augmente jusqu'à une valeur stable. Le faisceau lumineux sort à travers M_2 , qui est semi-transparent.

Si le faisceau laser n'a pas besoin d'être polarisé, alors les miroirs sont collés directement aux extrémités du tube.

Mais, pour obtenir un faisceau polarisé, on doit utiliser au moins une fenêtre à l'angle de Brewster. Ces fenêtres sont presque transparentes pour la lumière polarisée avec son vecteur $\mathbf{E}$ parallèle au plan d'incidence (Fig. 23.6) ou parallèle au plan du papier. Elles n'empêchent donc pas l'amplification pour cette polarisation mais sont de mauvais réflecteurs pour l'autre polarisation. Ainsi, le faisceau de lumière qui sort à travers M_2 est polarisé, avec son vecteur $\mathbf{E}$ parallèle au papier.

Exemple : Mesure de la permittivité relative de la surface de la Lune aux fréquences radio

La nature de la surface lunaire peut être déduite, dans une certaine mesure, de la valeur de sa permittivité relative $\epsilon_r = n^2$ (Partie 22.5) aux fréquences radio. L'angle de Brewster peut servir pour mesurer cette quantité, de la façon suivante.

Si une onde radio provenant d'un satellite en orbite lunaire illumine la Lune, la réflexion observée depuis la Terre est similaire à la réflexion de la lumière solaire sur la surface d'un lac : la majeure partie de la lumière provient des régions qui se trouvent correctement orientées pour une réflexion spéculaire. La surface de la Lune scintille donc sur une surface d'un diamètre de l'ordre de 100 km, l'aire dépendant de la hauteur du satellite sur la surface de la lune et de la rugosité de la surface.

Un détecteur sur Terre reçoit à la fois l'onde réfléchie et l'onde directe du satellite, mais on peut différencier les deux en utilisant le fait que l'effet Doppler rend les fréquences des deux ondes radio légèrement différentes. En traçant l'intensité de l'onde réfléchie en fonction de l'angle d'incidence quand le vecteur $\mathbf{E}$ se trouve dans le plan d'incidence, on trouve une réflexion nulle à l'angle de Brewster.

Lors d'une telle mesure, effectuée à la fréquence de 140 MHz, l'angle de Brewster était de $60 \pm 1^\circ$ dans la mer lunaire au Nord-Ouest de Hanstein. Cela donne un ϵ_r de $3,0 \pm 0,2$.

On peut effectuer des mesures similaires en d'autres points de la surface de la Lune grâce au mouvement relatif des trois corps concernés, à savoir le satellite, la Lune et la Terre.

Cf. exercice 23.3.

23.3.2 La réflexion totale

La réflexion totale est d'une grande importance pratique car, comme on le verra au prochain chapitre, c'est grâce à la réflexion totale que les fibres optiques peuvent transmettre des signaux lumineux.

Comme on l'a remarqué dans la partie 23.1, si $(n_1/n_2) \sin \theta_i > 1$, alors $\sin \theta_T > 1$! Cette inégalité dérive de la seconde loi de Descartes et s'applique quels que soient la

polarisation de l'onde incidente et l'angle d'incidence. Mais comment le sinus d'un angle peut-il être plus grand que un ? L'explication est une longue histoire : la réflexion totale est un phénomène très complexe et nous nous limitons, ici, à une courte discussion qualitative et au calcul du déphasage lors de la réflexion. Les lecteurs qui voudraient étudier plus profondément la réflexion totale peuvent consulter Lorrain, Corson et Lorrain [32].

Tout d'abord, notons que la réflexion totale se produit *seulement* si l'indice de réfraction du milieu 1 est *plus grand* que l'indice de réfraction du milieu 2 : seulement si $n_1 > n_2$. Voir la seconde partie de la Fig. 23.4a, où le rayon incident est dans le verre et le rayon transmis, dans l'air. Rappelons-nous la Fig. 23.1 pour la définition de θ_I et θ_T . Notons que, avec $n_1 > n_2$, la seconde loi de Descartes prédit que θ_T est plus grand que θ_I .

Imaginons que nous ayons un faisceau laser, et partons de $\theta_I = 0$: le faisceau est perpendiculaire à la surface. On incline lentement le laser pour augmenter θ_I . Au début, les ondes réfléchies et transmises se comportent normalement : les lois de Descartes et les équations de Fresnel s'appliquent. L'angle θ_T augmente graduellement jusqu'à atteindre 90° . On a alors atteint l'angle d'incidence critique θ_{Ic} , pour lequel

$$\sin \theta_{Ic} = n_2/n_1 \quad (23.27)$$

Pour un verre d'indice $n_1 = 1,5$ et pour $n_2 = 1$ (air), $\theta_{Ic} = 41,8^\circ$. L'angle d'incidence critique est indépendant de la polarisation du faisceau incident.

Continuons à augmenter l'angle d'incidence. Que se passe-t-il ? L'angle θ_T ne peut pas devenir plus grand que 90° ! Ce qui se produit dorénavant est que le faisceau incident est *totalelement réfléchi*. Voilà qui est important : la réflexion se fait *sans perte*.

Et voici un autre aspect remarquable : il y a un déphasage Φ lors de la réflexion. Calculons l'angle de phase $\Phi_\perp$; nous en aurons besoin dans la partie 24.3 sur les fibres optiques. L'angle Φ dépend de la polarisation.

Les équations de Fresnel des parties 23.2 et 23.3 sont générales ; elles sont valables même pour la réflexion totale. Alors, pour un vecteur $\mathbf{E}$ perpendiculaire au plan d'incidence, d'après la partie 23.3

$$\left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_\perp = \frac{(n_1/n_2) \cos \theta_I - \cos \theta_T}{(n_1/n_2) \cos \theta_I + \cos \theta_T} \quad (23.28)$$

Mais que dire de $\cos \theta_T$? Selon la seconde loi de Descartes, $\theta_T > 90^\circ$, ce qui semble absurde d'après la Fig. 23.1 ! Appliquons calmement la seconde loi de Descartes :

$$\cos \theta_T = (1 - \sin^2 \theta_T)^{1/2} = [1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_I]^{1/2} \quad (23.29)$$

$$= -j [(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_I - 1]^{1/2} \quad (23.30)$$

Ainsi $\cos \theta_T$ est imaginaire pur ! Bien entendu, il n'y a pas de problème pour $\sin \theta_I$, car θ_I est un angle ordinaire : il est réel et peut varier de 0 à 90° .

Donc

$$\left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_\perp = \frac{(n_1/n_2) \cos \theta_I + j [(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_I - 1]^{1/2}}{(n_1/n_2) \cos \theta_I - j [(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_I - 1]^{1/2}} = \exp j\Phi_\perp \quad (23.31)$$

avec

$$\Phi_{\perp} = 2 \arctan \frac{[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_I - 1]^{1/2}}{(n_1/n_2) \cos \theta_I} \quad (23.32)$$

La figure 23.9 montre les déphasages $\Phi_{\perp}$ et $\Phi_{\parallel}$ en fonction de l'angle d'incidence θ_I pour $n_1/n_2 = 1,50$. Avec le vecteur $\mathbf{E}$ de l'onde incidente perpendiculaire au plan d'incidence, l'onde réfléchie *précède* l'onde incidente d'un angle qui augmente de zéro pour l'angle d'incidence critique à 180° à un angle d'incidence de 90° .

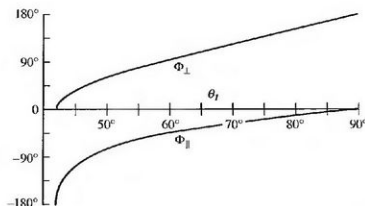


Figure 23.9 Phases $\Phi_{\perp}$ et $\Phi_{\parallel}$ de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente en un point de l'interface, pour la réflexion totale quand le $\mathbf{E}$ de l'onde incidente est respectivement normal et parallèle au plan d'incidence. Le rapport n_1/n_2 est égal à 1,50.

Exemple : Émission de lumière par un tube cathodique

Dans un tube cathodique, le faisceau d'électrons engendre de la lumière dans une couche fluorescente déposée sur l'arrière de la face du tube. Un point donné dans le matériau fluorescent rayonne dans toutes les directions, mais une fine couche d'aluminium, comme en Fig. 23.10, double la luminosité. Même ainsi, la plus grande partie de la lumière reste piégée à l'intérieur du verre par réflexion totale et retourne vers le canon à l'extrémité du tube.

Quelle fraction F de la lumière sort par la face du tube ? Cela est simple à calculer si on suppose qu'à l'intérieur du cône d'angle θ_{Ic} , toute la lumière traverse l'interface verre-air. Ce n'est pas une mauvaise approximation. Alors F est l'angle solide correspondant à θ_{Ic} , divisé par 2π (pas 4π , à cause du miroir). Puisque le cône définit un angle solide égal à l'aire du segment sphérique, indiqué en pointillés sur la figure, divisée par R^2 ,

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta_{Ic}} \frac{2\pi R \sin \theta R d\theta}{R^2} = 1 - \cos \theta_{Ic} \quad (23.33)$$

Pour un verre dont l'indice de réfraction vaut 1,5, $\theta_{Ic} = 41,8^\circ$ et $F = 0,255$. En réalité, la fraction F est encore plus petite à cause de notre approximation.

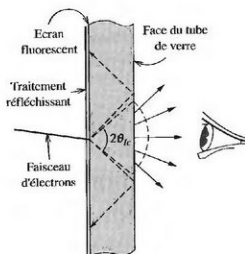


Figure 23.10 Coupe de la face d'un tube cathodique.

Exemple : Angle critique et angle de Brewster

L'angle critique est un peu plus grand que l'angle de Brewster (Paragraphe 23.3.1). Par exemple, toujours pour de la lumière qui se propage dans un verre d'indice de réfraction $n_1 = 1,5$, l'onde est totalement transmise dans l'air à une interface verre-air quand l'angle d'incidence est l'angle de Brewster, $33,7^\circ$, et elle est totalement réfléchie dans le verre au-delà de l'angle critique de $41,8^\circ$.

La figure 23.11 représente ces deux angles en fonction du rapport n_1/n_2 . Pour des valeurs élevées de n_1/n_2 , c'est-à-dire pour de la lumière incidente sur un milieu relativement « dense », θ_{lc} est presque égal à θ_{IB} . Pour deux milieux d'indices de réfraction similaires, l'angle de Brewster s'approche de 45° , tandis que l'angle critique tend vers 90° .

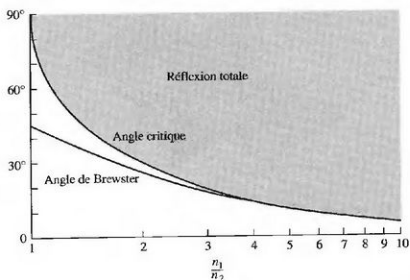


Figure 23.11 Angle critique et angle de Brewster en fonction du rapport n_1/n_2 . L'onde incidente est polarisée linéairement avec le vecteur E parallèle au plan d'incidence pour la courbe de l'angle de Brewster.

Pour une onde polarisée avec son vecteur $\mathbf{E}$ parallèle au plan d'incidence, l'amplitude de l'onde réfléchie varie rapidement quand l'angle d'incidence se trouve entre l'angle de Brewster et l'angle critique. Ce comportement particulier des ondes réfléchie et transmise peut être utile pour mesurer de petits déplacements angulaires.

Cf. exercices : 23.1 ; 23.2 ; 23.4 ; 23.5 ; 23.6 ; 23.7.

23.4 RÉFLEXION ET RÉFRACTION SUR LA SURFACE D'UN BON CONDUCTEUR

Les ondes incidente et réfléchie sont dans le milieu 1, qui n'est pas conducteur, mais maintenant le milieu 2 est un conducteur (Partie 22.6). Les lois de la partie 23.1 sont encore valables : les trois rayons sont coplanaires et, d'après la seconde loi de Descartes,

$$n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T \quad (23.34)$$

Puisque $n_2 \gg n_1$, $\sin \theta_T \approx 0$ et $\theta_T \approx 0$; l'onde transmise pénètre dans le conducteur selon la normale à l'interface, quel que soit l'angle d'incidence. L'onde transmise est fortement atténuée, comme dans la partie 22.6.

D'après les équations de Fresnel (Partie 23.2), toujours avec $n_2 \gg n_1$,

$$\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \approx -1 \quad (23.35)$$

quelle que soit la polarisation de l'onde incidente et l'angle d'incidence : la réflexion est presque parfaite, mais pas aussi bonne que la réflexion totale. Nous aurons besoin de ce résultat dans la partie 24.3 sur les lignes microrubans. Le $\mathbf{E}$ total à l'interface est quasiment nul, comme en Fig. 23.12.

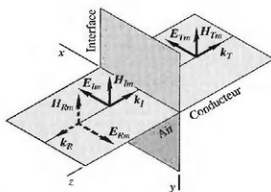


Figure 23.12 Réflexion à incidence normale sur la surface d'un bon conducteur :

$$E_{Rm} \approx -E_{Im} \text{ et } E_{Tm} \ll E_{Im}.$$

Exemple : Communiquer avec des sous-marins en mer

La communication entre la terre et un sous-marin dont l'antenne est immergée est très peu efficace, d'abord à cause du coefficient de réflexion élevé à la surface de la mer, et ensuite à cause de la forte atténuation dans l'eau de mer. L'atténuation dans

l'eau de mer est d'environ 172 dB/m à 20 MHz, 5,5 à 20 kHz et 0,33 à 75 Hz. Une solution est de travailler à basses fréquences (environ 75 Hz et entre 17 et 25 kHz) et très forte puissance, avec de grandes antennes de transmission de plusieurs kilomètres de long.

Une autre solution pour communiquer entre la terre et un sous-marin est de moduler un faisceau laser émis par un satellite, l'eau de mer étant très transparente à la lumière bleu-verte. Rappelons que notre discussion sur la propagation des ondes électromagnétiques dans des conducteurs néglige les phénomènes atomiques et moléculaires et n'est valide que jusqu'à environ 1 GHz. Les fréquences optiques sont de l'ordre de 10^{15} Hz.

La communication terre-mer à basses fréquences est impossible avec des ondes longues radio, car un sous-marin ne peut ni fournir la puissance nécessaire, ni déployer une antenne assez longue. La communication dans les deux sens peut se faire à quelques mégahertz quand l'antenne du sous-marin est émergée.

Exemple : Ondes stationnaires à incidence normale sur un bon conducteur

La figure 23.12 représente les ondes incidente, réfléchie et transmise. Comme la direction de propagation de l'onde réfléchie est opposée à celle de l'onde incidente, et puisque $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est orienté dans la direction de propagation, le $\mathbf{H}$ de l'onde réfléchie est en phase avec celui de l'onde incidente à l'interface, comme sur la figure. Sur la surface réfléchissante, le champ électrique s'annule presque et il y a un nœud de $\mathbf{E}$; les champs magnétiques s'ajoutent et on a un ventre de $\mathbf{H}$, comme en Fig. 23.13. Les nœuds de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont donc séparés d'un quart de longueur d'onde. La densité d'énergie est uniforme.

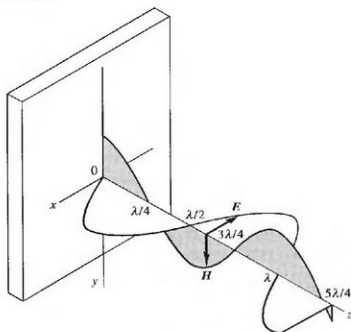


Figure 23.13 Allure d'une onde stationnaire pour une réflexion à incidence normale sur un bon conducteur, à un instant donné. Les nœuds de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{H}$ sont espacés de $\lambda/4$.

Une situation similaire existe pour la réflexion sur n'importe quelle surface. Soit le vecteur $\mathbf{E}$ soit le vecteur $\mathbf{H}$ doit changer de direction à réflexion, afin que le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ soit retourné.

Cf. exercices : 23.8 ; 23.9 ; 23.10 ; 23.11 ; 23.12.

23.5 RÉSUMÉ

À l'interface plane entre deux milieux homogènes, isotropes, linéaires et stationnaires (HILS), les rayons incident et réfléchi sont coplanaires, et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence. C'est la *première loi de Descartes*, pour la réflexion. La *seconde loi de Descartes* énonce que

$$n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T \quad (23.7)$$

où n_1 est l'indice de réfraction du premier milieu, et n_2 celui du second. Les *équations de Fresnel* sont les suivantes :

$$\left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_{\perp} = \frac{(n_1/n_2) \cos \theta_I - \cos \theta_T}{(n_1/n_2) \cos \theta_I + \cos \theta_T} \quad (23.18)$$

$$\left(\frac{E_{Tm}}{E_{Im}} \right)_{\perp} = \frac{2(n_1/n_2) \cos \theta_I}{(n_1/n_2) \cos \theta_I + \cos \theta_T} \quad (23.19)$$

$$\left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_{\parallel} = \frac{-\cos \theta_I + (n_1/n_2) \cos \theta_T}{\cos \theta_I + (n_1/n_2) \cos \theta_T} \quad (23.21)$$

$$\left(\frac{E_{Tm}}{E_{Im}} \right)_{\parallel} = \frac{2(n_1/n_2) \cos \theta_I}{\cos \theta_I + (n_1/n_2) \cos \theta_T} \quad (23.22)$$

À l'angle d'incidence de Brewster θ_{IB} ,

$$\frac{n_1}{n_2} = \cotan \theta_{IB} \quad (23.26)$$

et il n'y a pas d'onde réfléchie si $\mathbf{E}$ se trouve dans le plan d'incidence.

La *réflexion totale* sur l'interface entre deux diélectriques se produit à des angles d'incidence plus grands que l'*angle critique*

$$\sin \theta_{Ic} = n_1/n_2 \quad (23.27)$$

La réflexion se fait alors sans perte, et l'onde réfléchie est déphasée par rapport à l'onde incidente, comme en Fig. 23.9.

La réflexion à la surface d'un bon conducteur comporte de faibles pertes. L'onde transmise est faible, fortement atténuée et pénètre perpendiculairement à la surface.

EXERCICES

23.1 Réflexion et réfraction à la surface d'un milieu dense

Écrire les équations de Fresnel pour le cas où $n_2 \gg n_1$.

On trouve que, si le vecteur $\mathbf{E}$ de l'onde incidente est parallèle au plan d'incidence, alors l'amplitude de l'onde réfléchie est indépendante de l'angle d'incidence !

Pour quel éventail de valeurs de θ_i cela est-il correct ?

23.2 Une méthode pour mesurer un indice de réfraction

On prend

$$p = \left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_{\parallel}, \quad s = \left(\frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right)_{\perp}$$

Montrer qu'avec un faisceau laser incident à 45° dans l'air sur un milieu d'indice de réfraction n ,

$$n^2 = \frac{(1-p)(1-s)}{(1+p)(1+s)}$$

Ici, p et s sont tous deux négatifs, d'après la partie 23.3. En pratique, les instruments mesurent non pas p et s , mais une *puissance* de faisceau. Ainsi p et s sont égaux à *moins* la racine carrée du rapport entre la puissance réfléchie et la puissance incidente.

Voir Lorrain [26].

23.3 L'angle de Brewster

Calculer l'angle de Brewster dans chacun des cas suivants :

- (a) lumière incidente sur du verre d'indice de réfraction 1,6 ;
- (b) lumière émergant du même type de verre,
- (c) onde radio-fréquence incidente sur de l'eau ($n = 9$ aux fréquences radio).

Ce cas concerne la communication avec les sous-marins.

23.4 Réflexion à incidence normale sur la surface de l'eau

Une ampoule de 60 W est située un mètre au-dessus de la surface de l'eau.

Calculer la valeur quadratique moyenne de E et H pour les ondes incidente, réfléchie et transmise juste au-dessus de l'ampoule. On supposera que toute la puissance est dissipée sous forme de rayonnement électromagnétique. L'indice de réfraction de l'eau dans le spectre visible vaut 1,33.

23.5 Traitements antireflets pour les lentilles photographiques et les cellules photovoltaïques

Il y a des cas où la réflexion sur la surface d'un diélectrique doit être proche de zéro. Des exemples évidents sont les lentilles photographiques et les cellules photovoltaïques. Dans les instruments optiques complexes, la perte peut être importante ; en outre, les réflexions parasites réduisent le contraste de l'image.

Évidemment, on utilise les interférences pour éliminer l'onde réfléchie. En recouvrant le diélectrique d'une couche d'un autre type de diélectrique, on obtient deux ondes réfléchies, sur les deux faces de la couche, qui peuvent s'annuler. Cependant, la situation est compliquée par l'existence de réflexions multiples dans la couche. Il apparaît que, en prenant en compte les réflexions multiples, il n'y a pas d'onde réfléchie dans l'air à incidence normale ($n_1 = 1$) quand un diélectrique d'indice n_3 est recouvert d'une couche de diélectrique d'indice $n_2 = n_3^{1/2}$ et d'épaisseur un quart de longueur d'onde. Les lentilles de bonne qualité sont couvertes de fluorure de magnésium ($n = 1,38$ à 550 nm).

Une cellule photovoltaïque en silicium a un indice de réfraction de 3,9 à 600 nm. Calculer l'épaisseur et l'indice de réfraction d'une couche qui éliminerait la réflexion à cette longueur d'onde.

23.6 Détecteur de particules à scintillation

La figure 23.14 montre un type de *détecteur de particules à scintillation*. Un scintillateur S , généralement fait d'un monocristal d'iodure de sodium ou d'un plastique transparent approprié noyé dans un réflecteur R , émet de la lumière quand il est traversé par une particule ionisante comme un électron. Un photomultiplicateur PM détecte la lumière émise.

Le scintillateur, d'indice de réfraction n_1 , est fixé à la face du photomultiplicateur avec une colle C d'indice $n_2 < n_1$. La lumière est émise dans toutes les directions dans le scintillateur, mais seule une fraction F atteint le photomultiplicateur.

(a) Calculer F en fonction de n_2/n_1 , en supposant que la transmission est parfaite pour les angles d'incidence inférieurs à l'angle critique et que le scintillateur est entouré d'une substance non-réfléchissante.

(b) Tracer F pour des valeurs de n_2/n_1 allant de 0,1 à 1,0.

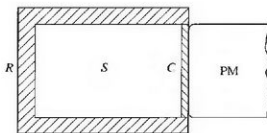


Figure 23.14

23.7 Réflexion totale dans des diodes électro-luminescentes

Dans les *diodes électro-luminescentes* (LED, de l'Anglais *Light Emitting Diodes*), le rayonnement se produit dans une jonction plane à l'intérieur d'un semi-conducteur dont l'indice de réfraction est très grand. Par exemple, dans le GaAsP, $n = 3,5$. La réflexion totale à l'interface entre le semi-conducteur et l'air limite l'efficacité des LEDs à quelques pourcents.

(a) Calculer l'angle critique.

(b) On suppose que la face du semi-conducteur est plate et parallèle à la jonction. L'indice de réfraction est n .

Calculer la fraction F de la lumière émise de la source qui arrive à la surface avec un angle inférieur à l'angle critique. Montrer que $F \approx 1/(4n^2)$.

23.8 Réflexion sur un bon conducteur

Dessiner deux schémas similaires à ceux des Figs. 23.4a et 23.4b, représentant $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ pour une onde électromagnétique incidente sur un bon conducteur. Il faut bien entendu exagérer les valeurs de E_m et de λ dans le conducteur. On prendra soin de représenter les phases correctement. Indiquer les axes x , y , z sur les deux figures pour faire le lien entre l'une et l'autre.

23.9 Réflexion sur un bon conducteur

Montrer que, pour un bon conducteur amagnétique dans l'air,

$$(a) \quad \left| \frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right|_{\perp} \approx 1 - \frac{\delta}{\kappa_0} \cos \theta_I, \quad (b) \quad \left| \frac{E_{Rm}}{E_{Im}} \right|_{\parallel} \approx 1 - \frac{\delta}{\kappa_0 \cos \theta_I}$$

Cette dernière relation n'est pas valide à incidence rasante, où $\cos \theta_I$ tend vers zéro.

Un bon conducteur est un meilleur réflecteur quand $\mathbf{E}$ est normal au plan d'incidence. Les réflecteurs métalliques de bonne qualité ont des coefficients de réflexion d'environ 90 % à incidence quasi normale dans le visible, avec de la lumière non polarisée.

23.10 Découpe d'une plaque d'acier avec un faisceau laser

La figure 23.15 montre un faisceau laser qui découpe une plaque d'acier.

(a) Pourquoi le faisceau coupe-t-il plus vite quand le vecteur $\mathbf{E}$ se trouve dans le plan du papier que quand il est perpendiculaire ?

(b) Quel pourcentage approximatif de la puissance du faisceau est utilisé pour chauffer l'acier dans le cas précédent ?

(c) Expliquer pourquoi le trait de coupe est plus fin et plus régulier quand $\mathbf{E}$ est dans le plan du papier.

Si le trait de coupe demandé n'est pas rectiligne, alors le laser doit tourner pour garder le vecteur $\mathbf{E}$ du faisceau parallèle au trait. Une solution plus simple consiste à utiliser un faisceau polarisé circulairement.

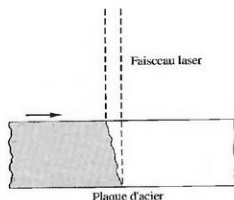


Figure 23.15

23.11 Onde stationnaire à incidence normale sur un bon conducteur

Montrer que la densité d'énergie électromagnétique dans une onde plane stationnaire à incidence normale sur un bon conducteur est uniforme.

23.12 Réflexions multiples dans une plaque de diélectrique accolée à un bon conducteur

Une onde électromagnétique tombe avec un angle θ_i sur une plaque de diélectrique accolée à un bon conducteur.

À quelle condition y a-t-il une seule onde réfléchie ?

Chapitre 24

Ondes électromagnétiques : ondes guidées

Au chapitre 22 on a étudié la propagation des ondes électromagnétiques dans des milieux illimités. Ensuite, au chapitre 23, on a considéré la réflexion et la réfraction sur l'interface entre deux milieux.

Nous étudions maintenant la manière dont les ondes électromagnétiques peuvent être guidées dans une direction imposée par des *guides d'onde*. Nous décrivons d'abord trois types de guides d'onde métalliques. Le câble à fils parallèles est le plus commun et le plus simple. Les câbles coaxial et à microruban sont similaires, en un sens, et aussi très simples. Ensuite nous étudions brièvement les guides d'onde métalliques creux, qui sont plus sophistiqués. Les fibres optiques constituent le dernier type de guide. Fibres optiques ? En fait, pas vraiment. La symétrie axiale des fibres optiques les rend relativement complexes et nous étudierons, à la place, les guides d'ondes plans, qui partagent essentiellement la même physique et qui sont utilisés dans les circuits optiques intégrés.

Ce sont les principaux types de guides d'onde qui ont survécu. Plusieurs autres ont été abandonnés il y a des années.

24.1 LES CÂBLES À FILS PARALLÈLES

Les fils parallèles, comme dans l'installation électrique d'une maison, agissent comme un guide d'onde, bien que leurs propriétés ondulatoires ne soient pas observables, du fait que la longueur d'onde à 60 ou 120 Hz est immense. (Combien de kilomètres ?) La figure 24.1 montre les champs électrique et magnétique d'une paire de fils de polarités opposées, parcourus par des courants de directions opposées. Les champs **E** et **H** sont tous deux transverses et l'onde est *Transverse Électrique et Magnétique*, ou *TEM*. La puissance s'écoule dans la direction du vecteur de Poynting, vers le papier.

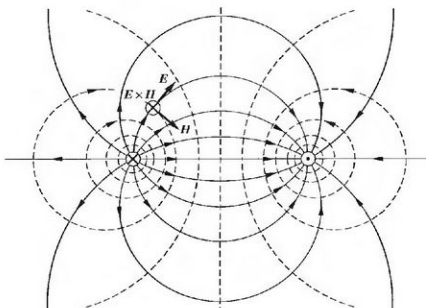


Figure 24.1 Lignes de champs électrique (trait plein) et magnétique (pointillés) pour un câble à fils parallèles.

Le fil de gauche est positif et parcouru par un courant qui s'écoule vers le papier, tandis que le fil de droite est négatif et parcouru par un courant qui sort du papier. Le câble alimente une résistance à l'extrémité. Les vecteurs E et H sont tangents à leurs lignes de champ, et le vecteur de Poynting $E \times H$ est orienté vers le papier. Ce schéma est familier : reportons-nous à la Fig. 3.11 représentant les lignes de champ et les équipotentielles près d'une paire de fils chargés (sans courant). Les lignes de champ électrique sont évidemment les mêmes sur les deux figures, mais les lignes de champ magnétique ont la même allure que les équipotentielles de la Fig. 3.11 ! Voir la Fig. 17.8.

Des *paires de câbles* ont longtemps été utilisées en téléphonie. Elles comprennent deux fils isolés, torsadés ensemble pour réduire leur champ magnétique, et en conséquence leur inductance. Le torsadage réduit aussi le chevauchement d'appels entre paires voisines. Les câbles contenaient jusqu'à 2 700 paires ! Voir la partie 24.5.

24.2 LES CÂBLES COAXIAUX

Les câbles coaxiaux sont utilisés pour l'interconnexion d'instruments électroniques et ont servi pendant de nombreuses années en téléphonie à longue distance. La figure 24.2 montre une coupe d'un câble coaxial. L'onde se propage dans la région annulaire entre les conducteurs, et le champ est nul à l'extérieur. Le milieu de propagation est soit un diélectrique à faibles pertes, en général du polyéthylène ou du Téflon, soit de l'air, le conducteur interne étant maintenu par des entretoises. Il existe une grande variété de câbles coaxiaux, des minuscules câbles flexibles avec une tresse comme conducteur extérieur aux tuyaux de cuivre de diamètre 15 ou 20 cm, capables de supporter des centaines de kW.

Un câble coaxial fonctionne parfaitement bien avec des tensions et des courants continus, et son comportement est alors trivial. Ici, nous nous intéressons à l'utilisation des câbles coaxiaux avec des tensions et des courants alternatifs. De quelle fréquence ? Notre

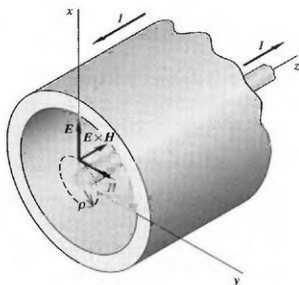


Figure 24.2 Vecteurs E , H et $E \times H$ à l'intérieur d'un câble coaxial.

analyse est valide pour n'importe quelle fréquence, tant que la longueur d'onde reste grande par rapport aux dimensions de la région annulaire. Par exemple, si la région annulaire a un diamètre externe de 1 cm, alors la longueur d'onde du signal transmis doit être beaucoup plus grande, et la fréquence beaucoup plus basse que $c/10^{-2}$, soit 30 GHz. À des fréquences plus élevées, le champ devient complexe et la vitesse de l'onde dépend fortement de sa fréquence, ce qui déforme les signaux non-sinusoidaux. Aux fréquences TV, la longueur d'onde vaut environ un mètre et les câbles à fils parallèles ainsi que les câbles coaxiaux sont parfaitement adéquats.

Considérons une onde qui se propage vers la droite en Fig. 24.2. Nous allons voir comment le câble doit être terminé à l'extrémité pour éliminer la réflexion.

Il y a des charges et des courants électriques sur la surface externe du conducteur interne et sur la surface interne du conducteur externe. Ces charges et ces courants voyagent avec l'onde. La figure 24.2 montre un vecteur E orienté vers l'extérieur, à un instant où le conducteur interne est positif par rapport au conducteur externe. Avec le vecteur H orienté comme sur la figure, le courant dans le conducteur interne s'écoule vers la droite. Un courant égal s'écoule en direction opposée dans le conducteur externe.

C'est toujours une onde Transverse Électrique et Magnétique, ou onde *TEM*.

Pour un observateur à l'extérieur du câble coaxial, il n'y a ni charge nette ni courant net, et $E = 0$, $H = 0$: il n'y a pas de champ à l'extérieur d'un câble coaxial. C'est une propriété très pratique. Mais les câbles coaxiaux flexibles avec un conducteur externe tressé peuvent avoir un champ de fuite appréciable.

Le champ électrique est radial. Ainsi, d'après le théorème de Gauss (Partie 3.6), E varie comme l'inverse du rayon ρ . Prenons

$$E = \frac{E_m}{\rho} \exp j(\omega t - kz) \hat{\rho} \quad (24.1)$$

où $k = \omega/v = 1/\lambda$, v étant la vitesse de propagation. On a supposé qu'il n'y a pas d'atténuation. Remarquons que cette équation décrit une onde : E dépend à la fois de z et de t , comme au chapitre 22.

On utilise les indices 1 et 2 pour désigner les rayons interne et externe de la région annulaire et, comme d'habitude, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$.

Si Q'_1 est la densité linéique de charge sur le conducteur interne, alors

$$E = \frac{Q'_1}{2\pi\epsilon\rho}, \quad Q'_1 = 2\pi\epsilon\rho E = 2\pi\epsilon E_m \exp j(\omega t - kz) \quad (24.2)$$

Cette charge se propage le long du guide à la vitesse v de l'onde. Alors le courant qui circule sur la surface du conducteur interne est

$$I_1 = Q'_1 v = 2\pi\epsilon E_m v \exp j(\omega t - kz) \quad (24.3)$$

Un courant égal s'écoule dans la direction opposée sur le conducteur externe. Ainsi $I_1 = I$, le courant dans le câble. C'est aussi une onde : I est fonction de z et de t .

La tension du câble est le potentiel du conducteur externe par rapport au conducteur interne :

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E \, d\rho = E_m \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \exp j(\omega t - kz) \quad (24.4)$$

Soit H le champ magnétique du courant axial dans le conducteur interne. Alors, selon le théorème d'Ampère (Partie 15.4) :

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi} = \frac{\epsilon E_m v}{\rho} \exp j(\omega t - kz) \hat{\phi} \quad (24.5)$$

Mais que vaut la vitesse v de l'onde ? C'est la vitesse d'une onde plane dans le milieu de propagation, comme dans la partie 22.5 :

$$v = 1/(\epsilon\mu_0)^{1/2} \quad (24.6)$$

On a considéré que $\mu_r = 1$: les matériaux magnétiques ne sont généralement pas utilisés dans les câbles coaxiaux car ils ont des pertes. Alors

$$\mathbf{H} = \frac{E_m}{\rho} \left(\frac{\epsilon}{\mu_0} \right)^{1/2} \exp j(\omega t - kz) \hat{\phi} \quad (24.7)$$

Donc $E/H = (\mu_0/\epsilon)^{1/2}$, comme dans la partie 22.5.

La figure 24.3 indique l'orientation relative de E et I sur 1,5 longueurs d'onde.

Et le vecteur de Poynting ? Revenons à la Fig. 24.2. Le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ de la partie 22.4 est orienté vers la droite, dans la direction de propagation de l'onde, et

$$\mathcal{S}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \left(\frac{\epsilon}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{E_m^2}{2\rho^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (24.8)$$

La puissance transmise est donc

$$P_T = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \mathcal{S}_{\text{moy}} 2\pi\rho \, d\rho = \left(\frac{\epsilon}{\mu_0} \right)^{1/2} \pi E_m^2 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (24.9)$$

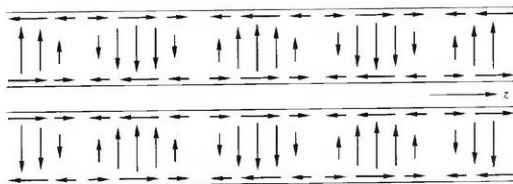


Figure 24.3 Coupe d'un câble coaxial.

Le champ électrique est représenté par des flèches verticales et le courant par des flèches horizontales sur 1,5 longueurs d'onde, à un instant donné. L'onde se propage de gauche à droite. La densité surfacique de charge est positive là où les flèches du courant sont orientées vers la droite, et négative là où elles sont orientées vers la gauche.

On vérifie facilement que cette puissance est égale à $(1/2)\text{Re}(VI^*)$.

En pratique, il y a évidemment une certaine atténuation, à cause des pertes Joule dans les conducteurs et des pertes dans le diélectrique.

On a l'habitude d'appeler le rapport V/I l'impédance caractéristique du câble :

$$Z_{\text{câble}} = \frac{V}{I} = \pi \frac{\ln(\rho_2/\rho_1)}{2\pi(\varepsilon/\mu_0)^{1/2}} \approx \frac{60}{\varepsilon_r^{1/2}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \Omega \quad (24.10)$$

Si le câble est terminé par une résistance de la valeur ci-dessus, il n'y a pas d'onde réfléchi ; sinon il y a une onde réfléchi et le champ net est la superposition d'une onde progressive et d'une onde stationnaire.

Exemple : Le câble RG-223/U

Ce câble a des conducteurs en cuivre argenté avec des diamètres respectifs 2,946 et 0,889 mm, dans une gaine en plastique. Le conducteur externe est doublement tressé et le diélectrique est en polyéthylène, avec $\varepsilon_r = 2,26$. D'après l'Éq. 24.10, $Z = 47,8 \Omega$, tandis que l'impédance nominale est 50Ω . La vitesse de l'onde est

$$v = \frac{1}{(\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}} = \frac{c}{2,26^{1/2}} = 2,00 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (24.11)$$

Cf. exercices : 24.1 ; 24.2 ; 24.3 ; 24.4.

24.3 LES LIGNES MICRORUBAN

La figure 24.4 montre une coupe d'une ligne à microruban, consistant en un plan conducteur connecté à la terre, une plaque isolante et une bande conductrice (Gardioli [11]). La figure 24.5 représente les lignes de champ. Les microrubans sont utilisés comme lignes de transmission dans les circuits imprimés, ou comme des antennes. Ils sont utilisés à des fréquences de 1 à 10 GHz ($\lambda = 300$ à 30 mm). Typiquement, la plaque isolante a une épaisseur de 1 mm, et la bande conductrice une largeur de quelques millimètres. Pour la

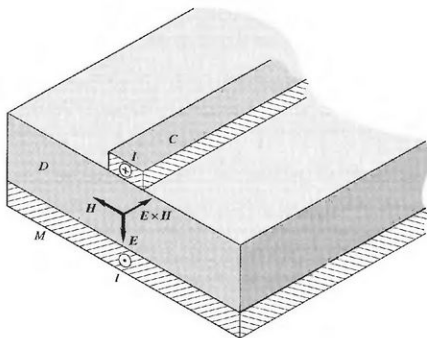


Figure 24.4 Coupe d'une ligne microruban : M , plan de masse ; D , plaque isolante ; C , bande conductrice. Ici, C est positive par rapport à M , et les courants I s'écoulent dans la direction indiquée.

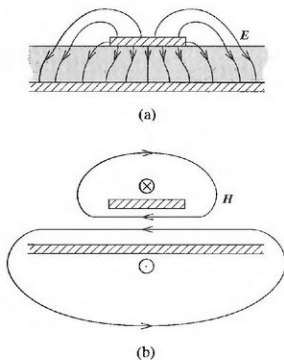


Figure 24.5 (a) Lignes de E dans un câble à microruban. (b) Lignes de H . Schéma qualitatif.

transmission de faibles puissances, les microrubans ont l'avantage d'être moins coûteux et plus compacts que les câbles coaxiaux. Les pertes sont élevées, mais acceptables, dans les circuits imprimés. Les microrubans ont aussi l'inconvénient que leur champ n'est pas strictement confiné à la région juste en dessous de la bande. Cela entraîne des pertes, et ils peuvent interagir avec les autres éléments d'un circuit, à moins qu'ils ne soient éloignés ou correctement blindés, par exemple avec un plan conducteur au-dessus. Les microrubans sont aussi utilisés comme antennes-pastilles qui peuvent être appliquées sur des surfaces courbes, par exemple sur la carlingue ou l'aile d'un avion.

En première approximation, l'onde dans un microruban est analogue à celle dans un câble coaxial : elle est TEM (Transverse Électrique et Magnétique), avec $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ orientés comme en Fig. 24.4. Le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est orienté dans la direction de propagation de l'onde. La vitesse de l'onde est c/n , où n est l'indice de réfraction du diélectrique, et la longueur d'onde est λ_0/n .

L'onde est en réalité seulement quasi-TEM, car les lignes à microruban fonctionnent par réflexions multiples sur les deux surfaces conductrices, où les ondes qui vont vers le haut et celles qui vont vers le bas interfèrent. Il en résulte que seuls certains modes spécifiques sont permis, comme dans la partie suivante. Par ailleurs, le champ est partiellement dans le diélectrique et partiellement dans l'air, au-dessus de la bande de conduction.

Cf. exercice 24.5.

24.4 LES GUIDES D'ONDE MÉTALLIQUES CREUX

Les guides d'onde métalliques creux sont utilisés à des fréquences dans les gigahertz, souvent à puissance élevée sur des distances courtes, par exemple pour connecter un amplificateur de puissance à une antenne à cornet de radar (Partie 25.2). La propagation se fait par réflexions multiples sur les parois du guide. Le type le plus commun est de section rectangulaire, avec un côté deux fois plus long que l'autre. Les sections standards varient entre $290 \times 580 \text{ mm}^2$, pour une utilisation à des longueurs d'onde d'environ 750 mm et des puissances jusqu'à 200 MW, et $0,43 \times 0,86 \text{ mm}^2$, pour des ondes de 1 mm de longueur d'onde. Les matériaux utilisés sont le laiton ou l'aluminium, et l'argent pour les plus petites dimensions. Le milieu de propagation est l'air.

La figure 24.6 montre comment de tels guides d'onde peuvent être alimentés par un câble coaxial. Le générateur produit tout un ensemble de modes, mais seul le mode permis peut se propager. Voyons pourquoi.

Voir la Fig. 24.7. L'onde électromagnétique se propage dans le guide par des réflexions multiples sur les faces étroites, et l'angle d'incidence est θ . La figure montre une onde dont le vecteur $\mathbf{E}$ est perpendiculaire au plan d'incidence. L'onde totale, qui provient des réflexions multiples sur les deux faces, a aussi un $\mathbf{E}$ transverse, mais le $\mathbf{H}$ net est parallèle au plan d'incidence, comme on le verra. C'est donc une onde Transverse Électrique, ou *TE*, et *pas* une onde TEM.

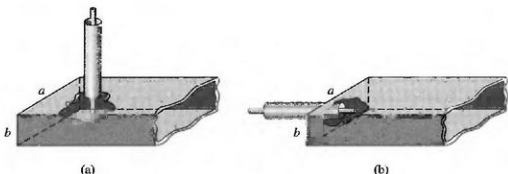


Figure 24.6 Guides d'onde métalliques rectangulaires alimentés par un câble coaxial.

Considérons maintenant la Fig. 24.8. Les lignes *A* et *C* sont *fixes* en position et parallèles aux fronts d'onde de l'onde montante. De même, la ligne *B* est fixe et parallèle aux fronts d'onde de l'onde descendante. Soit

$$E_A = E_m \exp j\omega t \quad (24.12)$$

Alors

$$E_C = E_A \exp j \frac{2\pi l}{\lambda_0} \quad (24.13)$$

L'onde *A* montante vient de la réflexion métallique de l'onde *B* descendante en *D* et

$$E_B = E_A \exp j\pi = -E_A \quad (24.14)$$

De même, l'onde *B* descendante résulte de la réflexion de l'onde *C* montante en *E*. Donc

$$E_C = E_B \exp j\pi = E_A \exp 2j\pi = +E_A \quad (24.15)$$

En égalisant maintenant nos deux valeurs de E_C ,

$$\frac{2\pi l}{\lambda_0} = 2\pi \quad (24.16)$$

Mais

$$l = 2a \cos \theta \quad (24.17)$$

Alors

$$\cos \theta = \frac{\lambda_0}{2a} \quad (24.18)$$

Cela définit la seule valeur permise pour θ . Une fois données la valeur de a en Fig. 24.8 et la longueur d'onde, l'angle d'incidence est fixé. En outre, pour une valeur de a donnée, l'angle d'incidence *décroît* avec la longueur d'onde. Mais la valeur limite de la longueur d'onde est $2a$; au-delà il n'y a plus de transmission. Donc $\lambda_0 = 2a$ est la *fréquence de coupure*.

Les figures 24.7 et 24.8 montrent comment une onde plane de vitesse c zigzague le long du guide. La vitesse v du signal est inférieure à c :

$$v = c \sin \theta = c(1 - \cos^2 \theta)^{1/2} = c \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{4a^2} \right)^{1/2} < c \quad (24.19)$$

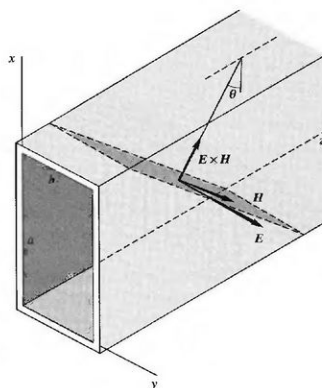


Figure 24.7 Front d'onde typique à l'intérieur d'un guide d'onde rectangulaire métallique. La réflexion se produit sur les faces étroites, et E est partout transverse.

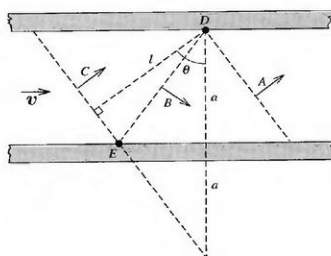


Figure 24.8 Fronts d'onde montants et descendant dans un guide d'onde rectangulaire métallique creux.

La figure 24.9 représente les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ nets.

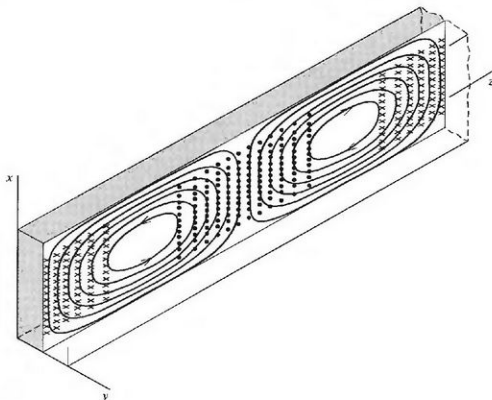


Figure 24.9 Lignes de $\mathbf{E}$ (points et croix) et de $\mathbf{H}$ (ovales) dans un guide d'onde rectangulaire métallique creux. Les réflexions ont lieu sur les faces supérieure et inférieure.

Exemple : Le guide d'onde WR(284)

Ce guide d'onde est conçu pour des longueurs d'onde entre 115,3 et 75,9 mm, soit pour des fréquences entre 2,60 et 3,95 GHz. Ses dimensions internes sont $34,04 \times 72,14 \text{ mm}^2$. Ainsi $a = 72,14 \text{ mm}$. Imaginons que le guide soit utilisé à $\lambda_0 = 100 \text{ mm}$. Alors

$$\cos \theta = 100/144,28 \simeq 0,6931; \quad \theta \simeq 0,8050 \text{ rad} \simeq 46,12^\circ \quad (24.20)$$

et

$$v = c \sin \theta \simeq 3 \times 10^8 \times 0,721 \simeq 2,163 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (24.21)$$

Ce guide a une atténuation d'environ 1 dB sur 30,5 m. Alors $20 \log_{10} [\text{Amplitude en sortie} / \text{Amplitude en entrée}] = -1$, et l'amplitude de l'onde est divisée par 1,12 sur une distance de 30,5 m.

Les guides d'onde métalliques creux ne sont pas adaptés à la transmission sur de longues distances.

Cf. exercices : 24.5.

24.5 LES GUIDES D'ONDE OPTIQUES

Les fibres optiques ont été développées après qu'il devint possible de produire des fibres de silicium à faibles pertes et à gradient d'indice de réfraction. Plusieurs autres types de guides ont été proposés. Par exemple, un seul fil à l'intérieur d'une gaine en plastique peut se comporter comme un guide d'onde. Un travail important a aussi été effectué sur la transmission de signaux optiques sur de grandes distances à travers une succession de tubes métalliques, alternativement chauds et froids, remplis de gaz. Le faisceau de lumière était alternativement focalisé et défocalisé aux joints, produisant en moyenne une focalisation. Aujourd'hui cela semble ridicule, mais c'était une tentative intéressante pour résoudre le problème des communications à longue distance.

C'est une bonne illustration de la façon dont la technologie se développe, en trébuchant, faisant beaucoup de faux pas avant de trouver une solution appropriée à un problème pratique.

La science avance de la même manière. Voir l'annexe C, qui décrit quelques travaux de Heaviside à la fin du XIX^e siècle. Pendant qu'il progressait en électromagnétisme et en mathématiques, ses contemporains étaient occupés à discuter l'action instantanée à distance et les modèles mécaniques de l'éther.

Revenons aux guides d'onde optiques. L'onde zigzague à l'intérieur d'un diélectrique entouré par un autre diélectrique d'indice de réfraction plus faible, et le guidage résulte de la réflexion totale, qui a l'avantage d'être sans pertes.

Des *barres de plastique*, soit rectilignes soit courbes, dans l'air, sont utilisées depuis de nombreuses années pour transporter la lumière d'un point à un autre. Des *tiges gainées* et des *guides de lumière* consistant en un grand nombre de fibres à l'intérieur d'une gaine flexible ont la même fonction. Les guides de lumière peuvent être utilisés pour concentrer la lumière issue de plusieurs sources. Les *faisceaux de fibres* sont des guides de lumière avec des fibres et des lentilles coordonnées aux deux extrémités pour transmettre des images. Les *fibroscopes* contiennent un guide de lumière pour l'illumination et un faisceau de fibres, et sont utilisés pour des examens médicaux. Certains oscilloscopes ont des *écrans à fibres optiques*, ou à *micro-canaux*, qui consistent en un empilement de fibres parallèles aux deux faces polies, avec une couche de phosphore sur la face interne. Les fibres transportent la lumière émise par le phosphore plus efficacement que ne le ferait une plaque de verre. Voir l'exemple au paragraphe 23.3.2. L'efficacité élevée des fibres permet l'observation de transitoires très rapides.

24.5.1 Les fibres optiques

L'utilisation des fibres de verre pour les télécommunications a été proposée pour la première fois en 1966, malgré le fait que l'atténuation du signal, à ce moment-là, était rédhibitoire. Quatre ans plus tard, des fibres à faibles pertes ont été développées, et certaines fibres modernes ont maintenant des atténuations ne dépassant pas 0,2 dB/km, voire moins (en 2000)⁽¹⁾. Les fibres optiques sont utilisées non seulement pour les

(1) $20 \log_{10} [\text{Amplitude en sortie} / \text{Amplitude en entrée}] = -0,2$, si bien que $[\text{Amplitude en sortie} / \text{Amplitude en entrée}] = 0,977$.

télécommunications, mais aussi dans des montages industriels et pour les réseaux locaux (LAN) qui connectent les ordinateurs. Voir Waynant et Ediger [56] et Physics Today, septembre 2000.

L'avantage principal des fibres optiques pour les communications est qu'elles fonctionnent à des fréquences de l'ordre de 10^{14} Hz. Un décalage minuscule de la fréquence, en termes relatifs, correspond alors à une grande largeur de bande, ce qui permet la transmission simultanée d'une grande quantité d'informations (1,6 Tbit/s dans une fibre, en 2001). La transformation d'un signal électrique en un signal optique est faite soit avec des diodes électro-luminescentes (LED) soit avec des diodes laser. L'opération inverse à l'autre extrémité est faite avec des photodiodes.

Les câbles de fibres optiques sont aussi beaucoup plus légers. Thorsen [54] a comparé un câble de cuivre traditionnel avec un câble de fibres optiques armé. Le câble de cuivre, avec 900 paires torsadées, peut porter 21 000 canaux téléphoniques⁽¹⁾ et pèse 8 t/km, tandis qu'un câble de fibres optiques armé, avec 12 paires de fibres, peut transporter 18 fois plus de canaux tout en étant cent fois plus léger.

Il y a aussi d'autres avantages : il n'y a pas de chevauchement entre les canaux, pas de bruit, et l'atténuation est si faible que les répéteurs le long du câble pourront bientôt être séparés par des milliers de kilomètres (2001). Par ailleurs, les fibres sont invulnérables aux interférences électromagnétiques et à l'espionnage.

La fibre elle-même, qui transporte le signal, a environ la dimension d'un cheveu humain. Elle est gainée d'un revêtement ayant un indice de réfraction plus petit, qui est lui-même enrobé d'une couche protectrice. Pour un fonctionnement à longue distance et haut débit, le noyau et le revêtement sont faits de silicium à gradient d'indice, l'indice de réfraction décroissant avec le rayon. La réflexion est alors continue, comme dans un mirage⁽²⁾. La dispersion $\Delta n/\Delta \lambda$ est minimale à $\lambda \simeq 1\,500$ nm. Une fibre économique est de diamètre environ 10 fois plus grand, et elle est en plastique.

24.5.2 Les guides d'onde optiques plans

Plutôt que de rentrer dans les mathématiques relativement complexes des fibres optiques, nous étudions la forme la plus simple de guide optique, à savoir le guide d'onde optique *plan*, composé de trois couches de diélectrique : un *substrat*, une *feuille* et une *couverture*. La physique des guides d'onde plans est fondamentalement la même que celle des fibres optiques : l'indice de réfraction du substrat et de la couverture est légèrement plus faible que celui de la feuille, et des réflexions totales se produisent sur les interfaces. La variation de l'indice de réfraction peut être discontinue ou continue.

(1) Cela est un exploit ! Cela signifie 23 conversations simultanées en moyenne par paire de fils, chaque conversation dans sa propre bande de fréquence, avec un chevauchement négligeable ! C'est une bonne illustration de la nature du progrès technologique : peu importe à quel point un appareil ou un procédé est génial, il est destiné à être remplacé par un meilleur.

(2) Nous avons tous vu des mirages sur les routes goudronnées en été, les jours de fortes chaleurs. S'il y a peu de vent, l'air près du goudron est relativement chaud, et son indice de réfraction est plus faible que celui de l'air plus haut. Alors un rayon de lumière qui vient du ciel se courbe graduellement vers le haut dans l'air chaud, et la chaussée agit comme un miroir.

Les guides d'onde plans sont utilisés dans les *circuits optoélectroniques intégrés*. Ils sont analogues aux circuits intégrés ordinaires, sauf qu'ils fonctionnent avec des ondes optiques. Les guides d'onde plans ont une épaisseur totale de l'ordre de $10\text{ }\mu\text{m}$. Voir Palais [44] ainsi que Waynant et Ediger [56].

La figure 24.10 montre une coupe d'un guide d'onde plan à couches diélectriques. L'onde zigzague dans la feuille dans le milieu 1 entre les interfaces 1-2 et 1-3, où il y a réflexion totale. Les milieux 2 et 3 ont besoin d'avoir une épaisseur de seulement quelques longueurs d'onde. On néglige toute onde rétro-réfléchi sur l'extrémité du guide. On suppose que le guide est infiniment grand dans la direction y , que les milieux 2 et 3 sont identiques, et que le vecteur $\mathbf{E}$ est normal au plan d'incidence, qui est ici le plan xz .

La propagation ne peut se faire que pour certains angles d'incidence θ , comme en Fig. 24.8. Les ondes envoyées à des angles différents sont fortement atténuées, comme dans les guides d'onde métalliques creux. La vitesse de phase est $(c/n_2) \sin \theta$.

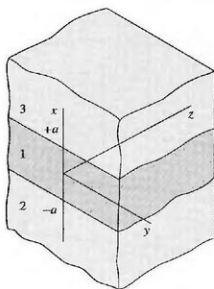


Figure 24.10 Coupe d'un guide d'onde optique plan.

Les trois milieux sont infinis dans les directions y et z . La réflexion totale se produit sur les interfaces 1-2 et 1-3 et l'onde zigzague, dans le milieu 1, dans la direction positive de l'axe z .

On pose

$$E_A = E_m \exp j\omega t, \quad E_C = E_A \exp j \frac{2\pi l}{\lambda_1} \quad (24.22)$$

avec $l = 2a \cos \theta$, mais maintenant

$$E_B = E_A \exp j\phi \quad (24.23)$$

où ϕ est le déphasage trouvé au paragraphe 23.3.2. En appelant θ l'angle d'incidence,

$$\phi = 2 \arctan \frac{[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta - 1]^{1/2}}{(n_1/n_2) \cos \theta} \quad (24.24)$$

et

$$E_C = E_B \exp j\phi = E_A \exp 2j\phi \quad (24.25)$$

En égalisant les deux valeurs de E_C données par les Éqs. 24.22 et 24.25 et en substituant la valeur de l ci-dessus,

$$4\pi \frac{a}{\lambda_1} \cos \theta = 2\phi + m(2\pi) \quad (24.26)$$

où m est un nombre entier. Évidemment, $\exp [jm(2\pi)] \equiv 1$. Cette équation définit les valeurs permises pour l'angle d'incidence θ .

Mais cette équation est bien compliquée ! Peut-être peut-on la résoudre avec un logiciel mathématique, mais voici une méthode plus instructive. Prenons $m = 0$. On trace les deux membres de l'équation en fonction de θ , comme en Fig. 24.11. La valeur permise de θ est à l'intersection des deux courbes ! Or, on a tout un ensemble de courbes pour le membre de droite, en fonction de la valeur de m . Il y a donc plusieurs valeurs permises pour θ , selon l'ordre m du mode. Toutes les courbes de ϕ commencent à gauche à l'angle critique.

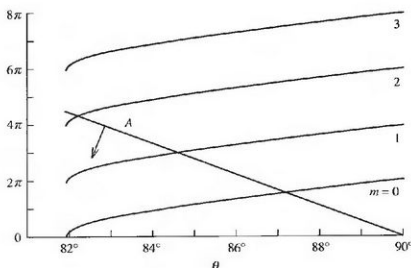


Figure 24.11 Solution graphique de l'Éq. 24.26 pour un guide symétrique avec $a = 0,5 \mu\text{m}$, $n_1 = 2,0000$, $n_2 = 1,9800$, $n_3 = 1,9800$, $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$. La courbe A correspond au membre de gauche de l'équation. Les autres courbes représentent le membre de droite pour différentes valeurs de l'ordre m du mode.

La courbe A est un cosinus près de $\pi/2$. En diminuant le rapport a/λ_1 on fait descendre A dans la direction de la flèche, son extrémité de droite restant fixe puisque $\cos(\pi/2) \equiv 0$. Cela élimine les modes d'ordre $m = 3, 2, 1$ un par un. Mais le mode $m = 0$ survit, même aux grandes longueurs d'onde. Pour $a \ll \lambda_1$, θ est approximativement égal à l'angle critique.

Une plaque très fine est donc monomode : elle n'autorise que le mode $m = 0$, et l'angle d'incidence est à peine plus grand que l'angle critique.

Une plaque épaisse permet un grand nombre de modes, et l'angle d'incidence peut être de quelques degrés plus grand que l'angle critique. L'angle d'incidence θ décroît avec l'ordre du mode, et le zigzag devient plus prononcé.

Pour une demi-épaisseur a et une longueur d'onde données, et pour des diélectriques donnés, une onde ne peut donc se propager dans le guide que pour certains angles d'incidence θ .

La figure 24.12 représente les champs E et H .

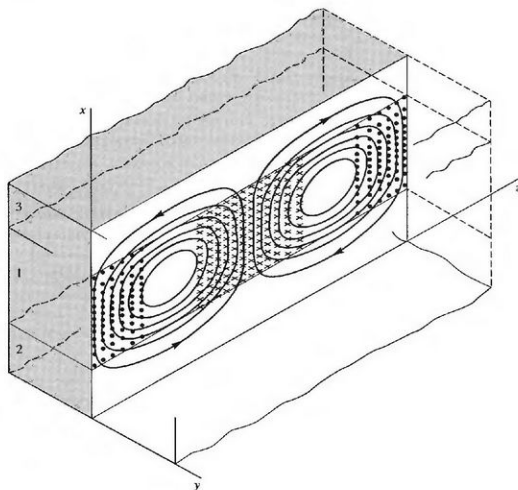


Figure 24.12 Lignes de champ de E (points et croix) et de H (ovales) dans un guide d'onde optique symétrique. L'onde se propage de gauche à droite. Comparer avec la Fig. 24.9.

Exemple : Guide d'onde plan monomode

Pour le guide d'onde plan de la Fig. 24.10, d'après le paragraphe 23.3.2, avec $n_1 = 2,0000$ et $n_2 = 1,9800$,

$$\sin \theta_{Ic} = 1,9800/2,0000; \quad \theta_{Ic} = 81,89^\circ; \quad \cos \theta_{Ic} = 0,1411 \quad (24.27)$$

Selon la Fig. 24.11, la propagation est monomode si, à θ_{Ic} ,

$$4\pi(a/\lambda_1) \cos \theta_{Ic} < 2\pi; \quad 0,2822a < \lambda_1; \quad 0,5644a < \lambda_0 \quad (24.28)$$

Supposons qu'on veuille le faire fonctionner à une fréquence dans le vide $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$. Alors on doit avoir

$$0,5644a < 1,3 \times 10^{-6}; \quad a < 2,3 \mu\text{m} \quad (24.29)$$

En réalité, l'angle d'incidence sera plus grand que l'angle critique et $\cos \theta$ sera inférieur à 0,1411.

Cf. exercices : 24.6 ; 24.7 ; 24.8.

24.6 RÉSUMÉ

Le guide d'onde le plus commun est le *câble à fils parallèles*. La figure 24.1 représente ses champs **E** et **H**, qui sont tous deux transverses. La bande passante utilisable va du continu jusqu'à des fréquences de l'ordre du gigahertz, tant que la longueur d'onde est beaucoup plus grande que la séparation entre les fils.

Dans le *câble coaxial* de la Fig. 24.2, le champ est toujours transverse, et la bande passante est encore très large. L'onde se propage à la vitesse

$$v = 1/(\epsilon\mu_0)^{1/2} \quad (24.6)$$

comme pour le câble à fils parallèles. La puissance transmise est

$$P_T = \left(\frac{\epsilon}{\mu_0}\right)^{1/2} \pi E_m^2 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (24.9)$$

L'avantage du câble coaxial est que le champ est fortement confiné.

La *ligne à microruban* de la Fig. 24.4 a aussi un champ transverse et une bande passante très large, et la longueur d'onde est la même que ci-dessus. Son champ n'est pas parfaitement confiné, mais son avantage est qu'elle peut faire partie d'un circuit intégré.

Le *guide d'onde métallique creux* de la Fig. 24.6 transmet une onde électromagnétique par réflexion *métallique* interne comme en Fig. 24.7. Son champ est beaucoup plus complexe, comme on le voit en Fig. 24.9, et seules certaines longueurs d'onde sont permises. Il sert principalement pour alimenter les antennes de radars, à haute puissance. Les *guides d'onde optiques* fonctionnent par réflexion *totale* interne et, à nouveau, seules certaines fréquences sont permises.

Le *guide d'onde optique plan*, comme en Fig. 24.10, est fondamentalement similaire à la fibre optique. Son champ, représenté en Fig. 24.12, est qualitativement similaire à celui du guide métallique creux.

EXERCICES

24.1 Le champ dans un câble coaxial

- (a) Dessiner une coupe assez grande d'un câble coaxial dans un plan contenant l'axe. Indiquer les lignes de **E** et de **H** à un instant donné sur au moins une longueur d'onde. Les lignes doivent être plus serrées là où le champ est le plus fort. Indiquer la direction des champs par des flèches. La direction de propagation devra être orientée vers la droite.
- (b) Ajouter des flèches en divers points pour représenter les vecteurs de Poynting, en utilisant des flèches plus longues là où l'écoulement de puissance est plus élevé. On supposera que la longueur de la flèche représente le module du vecteur de Poynting en son milieu.
- (c) Dessiner une coupe du câble coaxial dans un plan perpendiculaire à l'axe, et représenter les lignes de **E** et **H** à un instant donné. Faire le lien entre ce plan et la figure dessinée en (a).
- (d) Ajouter des signes plus et moins aux deux figures pour indiquer les charges de surface. La densité de signes rendra compte qualitativement des variations de la densité surfacique de charge.
- (e) Ajouter maintenant des flèches de longueurs variées à la première figure pour représenter les densités surfaciques de courant.
- (f) Comment la structure des courants change-t-elle au cours du temps ?

24.2 Impédance caractéristique d'un câble coaxial

Il est connu en théorie des lignes de transmission que l'impédance caractéristique d'une ligne est donnée par $Z_c = (L'/C')^{1/2}$, où L' et C' sont, respectivement, l'inductance et la capacité par mètre. Montrer que cela s'applique au câble coaxial.

24.3 Éliminer la réflexion au bout d'un câble coaxial

Un câble coaxial isolé par de l'air est terminé par une feuille dont la résistance surfacique vaut $377 \Omega/\text{carré}$ (Problème 4.11).

Montrer que la résistance de la terminaison est égale à l'impédance caractéristique du câble. Il n'y a donc pas de réflexion à l'extrémité du câble.

24.4 Ligne à microruban

La figure 24.4 montre une coupe d'une ligne à microruban.

- (a) En pratique, la largeur b de la bande est beaucoup plus grande que sa distance h au plan de masse, et les effets de bord sont faibles. Montrer que la valeur instantanée IV de la puissance transmise est égale au vecteur de Poynting intégré sur la section bh . On supposera qu'il n'y a pas d'onde réfléchie.
- (b) Montrer que l'impédance caractéristique V/I est égale à $(\mu_0/\epsilon)(h/b)$.
- (c) Montrer que la définition du problème 24.2 conduit au même résultat.
- (d) Montrer que l'addition d'un deuxième plan de masse placé symétriquement au premier réduit l'impédance caractéristique d'un facteur 2.

24.5 Longueur d'onde dans un guide d'onde métallique creux rectangulaire

Une onde a une longueur d'onde dans le vide de 100,0 mm. Quelle est sa longueur d'onde quand elle se propage à l'intérieur d'un guide d'onde WR(284) ?

Justifier la réponse qualitativement.

24.6 Modes négatifs dans un guide d'onde optique plan

Sur la Fig. 24.11, les courbes pour $m = -2, -3, -4$, etc. intercepteraient la courbe A à un angle d'incidence supérieur à $\pi/2$, ce qui est absurde. Ainsi ces modes sont interdits. Pourtant, pour le mode $m = -1$ la courbe couperait A en $\theta = \pi/2$, ce qui est sensé.

Montrer que le mode $m = -1$ est aussi interdit.

Ⓡ 24.7 Valeur maximale de λ_0 en fonction de l'ordre m du mode

Trouver la valeur maximale de λ_0 en fonction de m pour un guide d'onde symétrique ($n_2 = n_3$) plan.

24.8 La vitesse de phase v_p dans un guide d'onde asymétrique

On considère un milieu 2 plus dense que le milieu 3 en Fig. 24.10.

Montrer que, si θ est à peine plus grand que l'angle critique à l'interface 1-2, alors la vitesse de phase de l'onde guidée est approximativement égale à celle d'une onde plane uniforme se propageant dans le milieu 2.

Chapitre 25

Le rayonnement d'un dipôle électrique. Antennes

Ce dernier chapitre porte sur la manière dont les charges et courants oscillants rayonnent des ondes électromagnétiques.

Supposons que nous ayons, quelque part, des charges électriques constantes et stationnaires. Alors les chapitres 3 à 10 s'appliquent. Par exemple, la loi de Coulomb de la partie 3.2 définit correctement la force entre les charges Q_1 et Q_2 . Mais cela ne peut pas être exact : supposons qu'on déplace Q_1 , et que Q_2 soit à mille années-lumière. Comment Q_2 connaît-elle la nouvelle position de Q_1 ? Selon la relativité, il faut au moins un millier d'années à l'information pour aller de Q_1 à Q_2 . Donc la loi de Coulomb est une approximation. Elle est correcte si le retard est négligeable. Mais elle est certainement fausse si le retard est significatif.

Le même problème se produit avec les champs magnétiques. Imaginons qu'on ait une bobine parcourue par un courant I et un magnétomètre à mille années-lumière. On double le courant. Il faudra certainement un temps long avant que le magnétomètre voit un changement. Ainsi la physique des champs magnétiques, que l'on a étudiée dans les chapitres 14 à 20, est fausse aussi !

Évidemment, on a le même problème avec la loi de la gravitation. Cette loi dit que la force gravitationnelle entre deux objets est proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance entre elles. C'est tout. Cette loi est encore fausse ! Mais elle fonctionne si la distance n'est pas trop grande.

Le cas de l'astronomie est frappant. Nous ne voyons pas, et ne pouvons pas voir, les étoiles comme elles sont maintenant, mais seulement comme elles étaient il y a des millions ou des milliards d'années. *Elles ne sont plus là où nous les voyons !*

On rencontre ici le problème de l'action instantanée à distance, avec lequel les physiciens ont « lutté » au dix-neuvième siècle. Les chapitres 3 à 10 et 14 à 20, qui supposent l'action à distance instantanée, sont évidemment faux chaque fois qu'on manipule de grandes distances, en astrophysique ou en cosmologie. Mais ils sont corrects la plupart du temps.

La plupart du temps ? En fait, l'action instantanée à distance est fautive également dans le cas des antennes, où les charges et les courants varient si vite que le retard peut être important, même sur des distances faibles.

Le champ rayonné par des antennes. C'est le sujet de ce dernier chapitre.

25.1 LE RAYONNEMENT D'UN DIPÔLE ÉLECTRIQUE

On calcule le champ lointain d'un petit dipôle oscillant de longueur s , à une distance

$$r \gg \lambda \gg s \quad (25.1)$$

Cela nous permettra de calculer le champ rayonné par les types d'antennes les plus courants, dans la partie 25.3 ci-dessous. Nous avons calculé le champ d'un dipôle statique dans la partie 5.1.

L'approximation ci-dessus simplifiera les calculs et nous donnera l'occasion d'apprendre quelques astuces. Mais elle a un inconvénient majeur : la condition $r \gg \lambda$ ne s'applique pas à un dipôle permanent, car dans ce cas λ est infinie ! Ainsi les calculs qui suivent nous conduiront à des valeurs de V et E en désaccord avec ceux de la partie 5.1. Ce n'est pas trop grave, car nous donnerons des expressions plus générales pour V et E qui seront en accord avec celles de la partie 5.1.

Un dipôle électrique permanent n'a évidemment pas de champ magnétique, car il n'y a pas de courant.

Considérons donc le champ d'un dipôle électrique en l'origine, comme sur les Figs. 25.1 et 25.2, avec

$$Q = Q_m \exp j\omega t \quad (25.2)$$

Les charges $-Q$ et Q sont séparées par une distance s , dans le vide. Ainsi le moment dipolaire est

$$\mathbf{p} = (Q_m \exp j\omega t)\mathbf{s} = \mathbf{p}_m \exp j\omega t, \quad \mathbf{p}_m = Q_m \mathbf{s} \quad (25.3)$$

et un courant alternatif

$$I = \frac{dQ}{dt} = j\omega Q_m \exp j\omega t = I_m \exp j\omega t, \quad I_m = j\omega Q_m \quad (25.4)$$

s'écoule entre les charges.

On veut trouver le champ rayonné, à savoir $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ au point (r, θ, ϕ) de la Fig. 25.2. On pourrait le calculer directement, mais ce serait un peu difficile. Voir l'annexe D. Il y a des cas où les calculs brutaux sont nécessaires, mais il est souvent plus efficace, plus instructif et plus intéressant d'être astucieux. Or, nous avons à notre disposition la condition de Lorentz de la partie 21.7. Rappelons-nous qu'elle relie $\mathbf{A}$ à V .

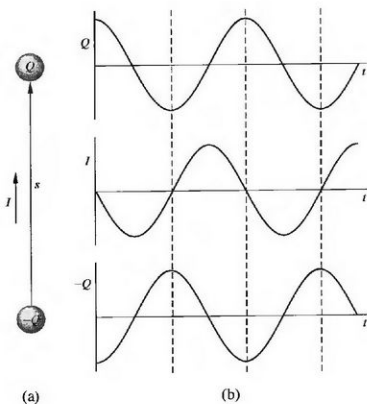
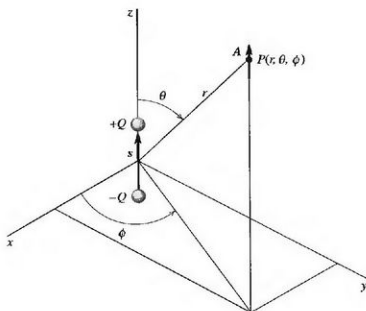


Figure 25.1 Dipôle électrique oscillant.

- (a) Le vecteur s est orienté dans la direction indiquée.
 (b) Charges et courant en fonction du temps.

Figure 25.2 Dipôle électrique de moment $\mathbf{p} = Qs$ et potentiel vecteur $\mathbf{A}$ en un point P dans son champ.

Donc, au lieu de calculer $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ directement, nous calculons d'abord $\mathbf{A}$, en déduisons V à l'aide de la condition de Lorentz, puis $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ en découleront :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A} \quad (25.5)$$

Malgré tout, le calcul direct de V est intéressant et simple. Nous l'effectuons donc au paragraphe 25.1.4 ci-dessous. On peut sans problème omettre ce paragraphe.

25.1.1 Le potentiel vecteur retardé $\mathbf{A}$

D'après la partie 14.4, $\mathbf{A}$ est parallèle à l'axe z , comme le courant I , et comme $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \mathbf{s} = \frac{\mu_0 (I_m \exp j\omega t)}{4\pi r} \mathbf{s} \quad (25.6)$$

Est-ce juste ? Non, car nous avons supposé instantanée l'action à distance ! Le vrai $\mathbf{A}$ correspond plutôt à la valeur de I à l'instant antérieur $t - (r/c)$, où r/c est le temps qu'il faut à l'information, ou à l'onde, pour parcourir la distance r . (On suppose que le dipôle est dans le vide). Ainsi, le potentiel vecteur est plutôt

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_m \exp j\omega(t - r/c)}{4\pi r} \mathbf{s} \quad (25.7)$$

$$= \frac{\mu_0 I_m \exp j(\omega t - r/\lambda)}{4\pi r} \mathbf{s} \quad (25.8)$$

Rappelons que

$$\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c/f}{2\pi} = \frac{c}{\omega} \quad (25.9)$$

Ce $\mathbf{A}$ est le *potentiel vecteur retardé* du dipôle électrique oscillant. Si Q est constante, comme dans la partie 5.1, alors $I = 0$ et $\mathbf{A} = 0$.

D'après la Fig. 25.2,

$$\mathbf{s} = s \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - s \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (25.10)$$

Alors

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_m s \exp j(\omega t - r/\lambda)}{4\pi r} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (25.11)$$

$$= \frac{\mu_0 j\omega p_m}{4\pi r} \exp j(\omega t - r/\lambda) (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (25.12)$$

$$= \frac{\mu_0 j\omega [p]}{4\pi r} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (25.13)$$

où $[p]$ est évalué à l'instant antérieur $t - r/c$:

$$[p] = p_m \exp j(\omega t - r/\lambda) \quad (25.14)$$

C'est une convention standard, et nous l'adoptons dans la suite.

Donc

$$A_r = \frac{\mu_0 j\omega [p]}{4\pi r} \cos \theta, \quad A_\theta = -\frac{\mu_0 j\omega [p]}{4\pi r} \sin \theta \quad (25.15)$$

25.1.2 La divergence de $\mathbf{A}$

Afin de pouvoir utiliser la condition de Lorentz de la partie 21.7 pour trouver V , il nous faut maintenant calculer $\text{div } \mathbf{A}$ en coordonnées sphériques (voir Éq. 12 en annexe E) avec $\partial/\partial\phi = 0$:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin \theta) \quad (25.16)$$

Un calcul rigoureux serait compliqué, mais nous pouvons être plus ingénieux que cela. Qu'est-ce qu'une divergence ? Une divergence est la mesure du taux de variation d'une fonction par rapport aux coordonnées. Or $\mathbf{A}$ est fonction de r et de θ . Observons le premier terme à droite ; le deuxième sera facile à traiter. Le premier terme contient la dérivée première par rapport à r de $r^2 A_r$, et A_r est lui-même proportionnel à $1/r$ d'après l'Éq. 25.15. Ainsi $r^2 A_r$ est proportionnel à r et augmente donc linéairement avec r . Mais A_r est aussi proportionnel à $[p]$, et donc à la fonction exponentielle qui est une fonction cosinus déguisée, et la fonction cosinus varie rapidement avec la distance. Ainsi nous ne changerons pas grand-chose en enlevant un des r de la dérivée et en réécrivant le premier terme comme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r)$$

Voir l'exemple ci-dessous.

Alors

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin \theta) \quad (25.17)$$

$$= \frac{\mu_0 j \omega}{4\pi r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \{ [p] \cos \theta \} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ [p] \sin \theta \} \right\} \quad (25.18)$$

où

$$\frac{\partial}{\partial r} \{ [p] \cos \theta \} = \frac{\partial}{\partial r} \{ p_m \exp j(\omega t - r/\lambda) \} \cos \theta = -\frac{j}{\lambda} [p] \cos \theta \quad (25.19)$$

Alors

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\mu_0 j \omega [p]}{4\pi r} \left(-\frac{j}{\lambda} \cos \theta - \frac{2 \cos \theta}{r} \right) \quad (25.20)$$

$$= \frac{\mu_0 j \omega [p]}{4\pi r} \left(-\frac{j}{\lambda} - \frac{2}{r} \right) \cos \theta \quad (25.21)$$

Avec $r \gg \lambda$, la dernière parenthèse se simplifie en $-j/\lambda$ et

$$\text{div } \mathbf{A} = -j \frac{\mu_0 j \omega [p]}{4\pi \lambda r} \cos \theta = \frac{\mu_0 \omega [p]}{4\pi \lambda r} \cos \theta \quad (25.22)$$

Exemple : La valeur de A en fonction de r

Les valeurs de E , V et A varient de la même façon avec r . Supposons que l'on mesure E à un kilomètre d'une antenne qui rayonne une onde à 30 MHz. La longueur d'onde vaut 10 m. Si on se déplace d'un mètre, alors le *module* de E ne décroît que de 0,1%. Mais la *phase* change de $2\pi/10 \approx 36^\circ$, ce qui a un grand effet sur la fonction cosinus et sur A .

25.1.3 La valeur de V déduite de la condition de Lorentz

Déduire V de $\text{div } \mathbf{A}$ est maintenant trivial. Puisque

$$\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{div } \mathbf{A} + j\omega \varepsilon_0 \mu_0 V = 0 \quad (25.23)$$

alors

$$V = -\frac{1}{j\omega \varepsilon_0 \mu_0} \frac{\mu_0 \omega [p]}{4\pi \lambda r} \cos \theta = \frac{j[p]}{4\pi \varepsilon_0 \lambda r} \cos \theta \quad (25.24)$$

Si Q est constante comme dans la partie 5.1, alors $\mathbf{A} = 0$, $dV/dt = 0$ et la condition de Lorentz est inutile. De plus, cette valeur de V n'est pas valable quand λ est infinie.

25.1.4 * La valeur de V calculée directement

Pour vérifier, on peut aussi calculer le V d'un dipôle électrique oscillant directement. D'après la Fig. 25.3,

$$V = \frac{Q_m}{4\pi \varepsilon_0} \left\{ \frac{\exp j(\omega t - r_b/\lambda)}{r_b} - \frac{\exp j(\omega t - r_a/\lambda)}{r_a} \right\} \quad (25.25)$$

Avec $r \gg s$ on peut poser

$$r_a = r + (s/2) \cos \theta \quad r_b = r - (s/2) \cos \theta \quad (25.26)$$

Alors, en prenant $r_a \approx r_b \approx r$ aux *dénominateurs* de l'Éq. 25.25,

$$V = \frac{Q_m}{4\pi \varepsilon_0 r} \exp j(\omega t - r/\lambda) \left\{ \exp \left(j \frac{s}{2\lambda} \cos \theta \right) - \exp \left(-j \frac{s}{2\lambda} \cos \theta \right) \right\} \quad (25.27)$$

où $s \ll \lambda$.

En se rappelant maintenant que $\exp x \approx 1 + x$ si $x \ll 1$, et que $Q_m s = p_m$,

$$V = \frac{Q_m}{4\pi \varepsilon_0 r} \exp j \left(\omega t - \frac{r}{\lambda} \right) \left(j \frac{s}{\lambda} \cos \theta \right) = \frac{j[p]}{4\pi \varepsilon_0 \lambda r} \cos \theta \quad (25.28)$$

comme ci-dessus.

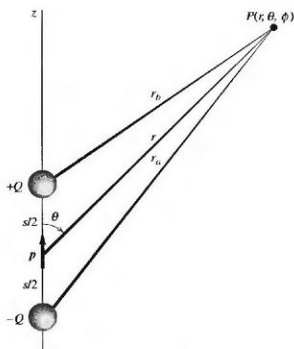


Figure 25.3 Deux charges $+Q$ et $-Q$ séparées par une distance s et formant un dipôle. Le moment dipolaire est p . On calcule le potentiel au point P en ajoutant les potentiels retardés des deux charges.

25.1.5 Le champ E

On calcule

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (25.29)$$

dans le champ lointain d'un petit dipôle électrique, en supposant encore que

$$r \gg \lambda \gg s \quad (25.30)$$

En coordonnées sphériques, avec $\partial/\partial\phi = 0$,

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (25.31)$$

Dans le cadre de l'approximation ci-dessus,

$$V = \frac{[p]}{4\pi\epsilon_0\lambda r} \cos\theta = \frac{j p_m}{4\pi\epsilon_0\lambda r} \exp j\left(\omega t - \frac{r}{\lambda}\right) \cos\theta \quad (25.32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{j p_m}{4\pi\epsilon_0\lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\exp j(\omega t - r/\lambda)}{r} \cos\theta \right\} \quad (25.33)$$

Or un gradient est, comme une divergence, une mesure du taux de variation de la fonction par rapport aux coordonnées. De la même manière que pour $\mathbf{A}$, nous déplaçons le terme $1/r$ à l'extérieur des parenthèses et prenons

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{j p_m}{4\pi\epsilon_0\lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \exp j \left(\omega t - \frac{r}{\lambda} \right) \cos \theta \right\} \quad (25.34)$$

$$= \frac{j|p|}{4\pi\epsilon_0\lambda r} \left(-\frac{j}{\lambda} \right) \cos \theta \quad (25.35)$$

$$= \frac{|p|}{4\pi\epsilon_0\lambda^2 r} \cos \theta \quad (25.36)$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{j|p|}{4\pi\epsilon_0\lambda r} (-\sin \theta) \quad (25.37)$$

Alors

$$\text{grad } V = \frac{|p|}{4\pi\epsilon_0\lambda^2 r} \left(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{j\lambda}{r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (25.38)$$

$$\simeq \frac{|p|}{4\pi\epsilon_0\lambda^2 r} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} \quad (25.39)$$

en supposant encore que $\lambda \ll r$.

Par ailleurs,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = j\omega \mathbf{A} = j\omega \frac{\mu_0 j\omega |p|}{4\pi r} \left(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (25.40)$$

$$= -\frac{\mu_0 \omega^2 |p|}{4\pi r} \left(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (25.41)$$

Mais puisque $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, d'après la partie 22.3,

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \omega^2 \lambda^2} \quad (25.42)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{|p|}{4\pi\epsilon_0\lambda^2 r} \left(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (25.43)$$

Nous avons maintenant que

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (25.44)$$

$$= -\frac{|p|}{4\pi\epsilon_0\lambda^2 r} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \frac{|p|}{4\pi\epsilon_0\lambda^2 r} \left(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (25.45)$$

(Les composantes r de $\text{grad } V$ et de $\partial \mathbf{A} / \partial t$ s'annulent, mais seulement en champ lointain où $r \gg \lambda$.) Finalement,

$$\mathbf{E} = -\frac{|p|}{4\pi\epsilon_0\lambda^2 r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (25.46)$$

Cette équation utilise l'Éq. 25.30. Donc $\mathbf{E}$ n'a qu'une composante θ , comme attendu. Il est inversement proportionnel à r , mais dépend aussi de r et t par l'intermédiaire de $[p]$.

25.1.6 Le champ $\mathbf{H}$

Le champ $\mathbf{H}$ est plus facile à calculer. En coordonnées sphériques, d'après l'Éq. 13 de l'annexe E, avec $A_\phi = 0$ et $\partial/\partial\phi = 0$,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \hat{\phi} \quad (25.47)$$

D'après le paragraphe 25.1.1,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 j \omega [p]}{4\pi r} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (25.48)$$

$$= \frac{\mu_0 j \omega p_m}{4\pi r} \exp j \left(\omega t - \frac{r}{\lambda} \right) (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (25.49)$$

Maintenant

$$\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} = - \left(-\frac{j}{\lambda} \right) \frac{\mu_0 j \omega [p]}{4\pi} \sin \theta = -\frac{\mu_0 \omega [p]}{4\pi \lambda} \sin \theta \quad (25.50)$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0 j \omega [p]}{4\pi r} \sin \theta \quad (25.51)$$

Puisque, par hypothèse, $\lambda \ll r$, $\partial A_r / \partial \theta$ est négligeable et

$$\text{rot } \mathbf{A} = -\frac{1}{r} \frac{\mu_0 \omega [p]}{4\pi \lambda} \sin \theta \hat{\phi} \quad (25.52)$$

si bien que

$$\mathbf{H} = -\frac{\omega [p]}{4\pi \lambda r} \sin \theta \hat{\phi} = -\frac{c [p]}{4\pi \lambda^2 r} \sin \theta \hat{\phi} \quad (25.53)$$

Les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont orthogonaux comme dans une onde plane et, selon les Éqs. 25.46 et 25.53,

$$\frac{E}{H} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} = c \mu_0 \approx 377 \, \Omega \quad (25.54)$$

Et si $s \ll r$ et $s \ll \lambda$, mais que r n'est pas nécessairement beaucoup plus grand que λ ? En d'autres termes, que se passe-t-il si on prend juste la longueur s du dipôle très petite, même par rapport à la longueur d'onde réduite λ ? Les expressions pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont alors plus compliquées (voir l'ouvrage de Lorrain, Corson et Lorrain [32]). Dans ce cas, en posant $R = \lambda / r$, en champ proche,

$$\mathbf{E} = \frac{[p]}{4\pi \epsilon_0 \lambda^2 r} \left\{ 2(R^2 + jR) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + (R^2 - 1 + jR) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \quad (25.55)$$

$$\mathbf{H} = \frac{c [p]}{4\pi \lambda^2 r} (-1 + jR) \sin \theta \hat{\phi} \quad (25.56)$$

et on obtient une ligne de champ électrique en prenant

$$\sin^2 \theta (R^2 + 1)^{1/2} \cos \left(\omega t - \frac{1}{R} + \arctan \frac{1}{R} \right)$$

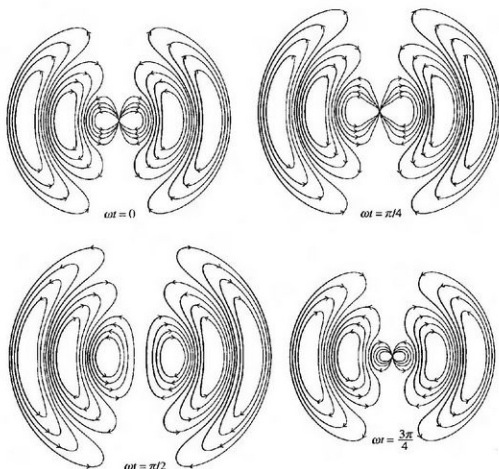
constant.

Notons que R est une *petite* quantité. Même en $r = \lambda$, R ne vaut que $1/6$.

Dans le cas d'un dipôle statique, λ est infinie. Alors, dans l'équation pour $\mathbf{E}$, seuls comptent les termes en R^2 et il nous reste le $\mathbf{E}$ de la partie 5.1. En outre, pour un dipôle statique, il n'y a pas de champ $\mathbf{H}$.

La figure 25.4 représente les lignes de $\mathbf{E}$ dans un plan $\phi = 0$, $\phi = \pi$ en fonction du temps pour le rayonnement du dipôle électrique, selon l'Éq. 25.55. La longueur s du dipôle est supposée beaucoup plus petite que la longueur d'onde réduite λ , mais le rapport $R = \lambda/r$ peut prendre n'importe quelle valeur.

La figure 25.5 montre les mêmes lignes de champ électrique, sous forme de lignes de niveau sur la surface définie par la fonction ci-dessus. Lorsque le temps t augmente dans la fonction ci-dessus, les pics centraux montent et descendent, et les ondelettes s'écartent radialement.



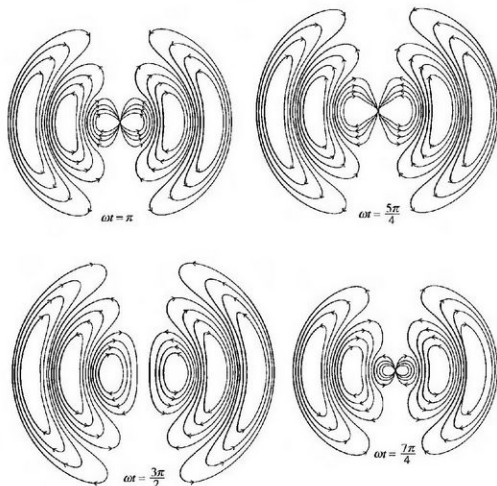


Figure 25.4 Lignes de E pour un dipôle électrique oscillant pour $\omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$.

Le dipôle est vertical au centre. Les lignes de H sont des cercles perpendiculaires à la feuille et centrés sur l'axe du dipôle.

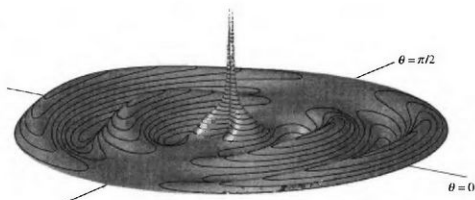


Figure 25.5 Fonction donnée à la fin du paragraphe 25.1.6, tracée en fonction de r et θ à $t = 0$.

Le dipôle est au centre, sur l'axe $\theta = 0$. Quand t augmente, les deux pics jumeaux oscillent à l'unisson entre $+\infty$ et $-\infty$, et les ondelettes s'écartent radialement. Les boucles sont à la fois des lignes de niveau sur cette surface, et des lignes de E .

25.1.7 Le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ et la puissance P rayonnée

D'après les paragraphes 25.1.5 et 25.1.6, le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ pour le rayonnement d'un dipôle est orienté radialement, car $\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{r}}$. Calculons la *moyenne temporelle* du vecteur de Poynting à partir des valeurs de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{H}$ trouvées précédemment, et qui sont valables dans la région $r \gg \lambda$:

$$\mathcal{S}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \frac{\omega[p][p^*]}{16\pi^2 \epsilon_0 \lambda^3 r^2} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{r}} \quad (25.57)$$

$$= \frac{\mu_0 \pi^2 f^4 p_m^2}{2c r^2} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{r}} \quad (25.58)$$

$$= \frac{\mu_0 \pi^2 f^4 p_{\text{eff}}^2}{c r^2} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{r}} \quad (25.59)$$

Et si nous avions utilisé, à la place, les expressions plus générales pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ que nous avons données dans les Éqs. 25.55 et 25.56 ? Surprise : le résultat est le même !

La figure 25.6 indique les trois vecteurs en (r, θ, ϕ) , pour $\omega[t] = 0$.

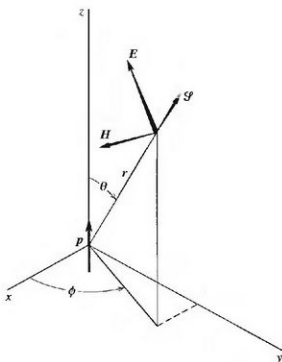


Figure 25.6 Vecteurs $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ pour un dipôle oscillant quand $\omega[t] = 0$.

Remarques :

- 1) L'écoulement de puissance est partout radial, même près du dipôle, là où r n'est pas beaucoup plus grand que λ .
- 2) Le vecteur de Poynting est proportionnel à $1/r^2$, comme on l'attend par la conservation de l'énergie.

- 3) À cause du terme en $\sin^2 \theta$, un dipôle électrique ne rayonne pas dans la direction de son axe.
- 4) À cause du même terme, le champ est maximal dans le plan perpendiculaire à l'axe du dipôle.

En intégrant le vecteur de Poynting ci-dessus sur une sphère de rayon r on obtient la puissance rayonnée :

$$P = \frac{\mu_0 \pi^2 f^4 p_{\text{eff}}^2}{c r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta (r^2 \sin \theta d\theta d\phi) \quad (25.60)$$

$$= \frac{8\mu_0 \pi^3}{3c} f^4 p_{\text{eff}}^2 = 3,466 \times 10^{-13} f^4 p_{\text{eff}}^2 \text{ W} \quad (25.61)$$

La puissance rayonnée est proportionnelle à la puissance quatrième de la fréquence.

Exemple : La couleur du ciel, du soleil couchant et de la fumée de tabac

Les particules de poussière en suspension dans l'atmosphère diffusent la lumière qui vient du Soleil, car le champ électrique de la lumière incidente excite les électrons présents dans les particules. Ces électrons agissent comme de petits dipôles électriques et rayonnent à leur tour. Si on néglige les résonances, le p_m d'un électron oscillant est proportionnel à l'amplitude de l'onde incidente. La puissance rayonnée est donc proportionnelle à f^4 , et la lumière diffusée par le ciel est plus bleue que la lumière du Soleil.

Si l'air était complètement exempt de poussière, le ciel serait encore bleu, mais plus foncé : les atomes et les molécules absorbent et émettent aussi de l'énergie, mais principalement dans l'ultraviolet. La lumière du Soleil qui arrive sur Terre, spécialement au coucher du soleil, est rougeâtre car une partie du bleu a été diffusée.

C'est pour la même raison que la fumée de tabac est soit bleuâtre soit rougeâtre suivant la direction dans laquelle on la regarde par rapport à une source de lumière. Voir la Fig. 25.7.

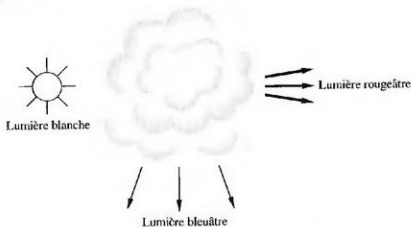


Figure 25.7 Diffusion de la lumière.

Des particules fines, comme dans la fumée de tabac, diffusent préférentiellement la lumière bleue. La lumière transmise est donc plutôt rouge.

Cf. exercices : 25.1 ; 25.2 ; 25.3 ; 25.4 ; 25.5 ; 25.6 ; 25.7.

25.2 LES ANTENNES

Les antennes sont partout : les téléphones sans fil et portables, les bipeurs, les systèmes d'ouverture automatique, les télévisions, les voitures, les immeubles, les bateaux et les avions. Voir par exemple Johnson [20]. La plupart des antennes servent à la fois à émettre et à recevoir.

Le type d'antenne le plus simple est le dipôle de la Fig. 25.8(a). Comme antenne *émettrice*, elle est alimentée par un oscillateur à travers un câble à fils parallèles, et chaque élément de longueur rayonne comme un petit dipôle. Quand elle est utilisée comme antenne *réceptrice*, le champ électrique ambiant induit un courant dans l'antenne, et une onde de courant parcourt le câble jusqu'à un récepteur. Le câble à fils parallèles peut être soit ouvert comme sur la figure, soit enfermé dans un blindage. Si l'antenne fait une demi longueur d'onde de long, comme sur la figure, elle porte alors une onde de courant stationnaire. Les *antennes en oreilles de lapin* sur les télévisions sont de ce type.

Le type d'antenne le plus courant est peut-être le *monopôle électrique*. D'une longueur d'un quart de longueur d'onde, il est planté dans un plan conducteur, comme en Fig. 25.8(b). L'antenne possède une image dans le plan conducteur, et agit comme une antenne demi-onde alimentée par le milieu. Un instant de réflexion montre que le courant dans l'image est orienté dans le même sens que le courant dans l'antenne : l'image d'une charge positive en mouvement vers le haut est une charge négative qui se déplace vers le bas. Les *antennes fouets* sur les voitures sont des antennes quart d'onde.

Les grandes tours, d'environ 75m de haut, qu'on voit dans la campagne sont des antennes quart d'onde de radio-télévision. Elles reposent sur un isolant, et un courant est injecté à leur base. Le plan conducteur est une grille radiale de fils scellés dans la terre, et les filins de hauban sont faits de tronçons isolés pour éviter les courants induits parasites.

La longueur réelle d'une antenne *quart d'onde* n'est qu'une indication approximative de la fréquence de fonctionnement, car la longueur de l'antenne est choisie afin d'obtenir un diagramme de rayonnement et une impédance d'entrée adaptés à une application donnée. Par exemple, la hauteur des antennes de radio-télévision varie entre $\lambda/6$ et $5\lambda/8$, et λ vaut environ 300 m ($f \approx 1$ MHz).

Les *antennes-pastilles* sont des microrubans (Partie 24.3) appliqués, par exemple, sur l'aile d'un avion.

Les *antennes-cadres*, ou à *dipôle magnétique*, peuvent être connectées à un câble à fils parallèles, comme en Fig. 25.8(c). Elles sont très connues comme antennes intérieures pour les UHF (Ultra Hautes Fréquences). Les antennes AM (Modulation d'Amplitude) des petites radios portables sont généralement des bobines enroulées autour d'un barreau de ferrite (voir l'exemple sur les courants de Foucault dans la partie 18.3), comme en Fig. 25.8(d). Le noyau de ferrite amplifie le flux magnétique à travers la bobine d'un facteur environ 100.

Les antennes FM (Modulation de Fréquence) des petits postes de radio sont simplement des portions de fil.

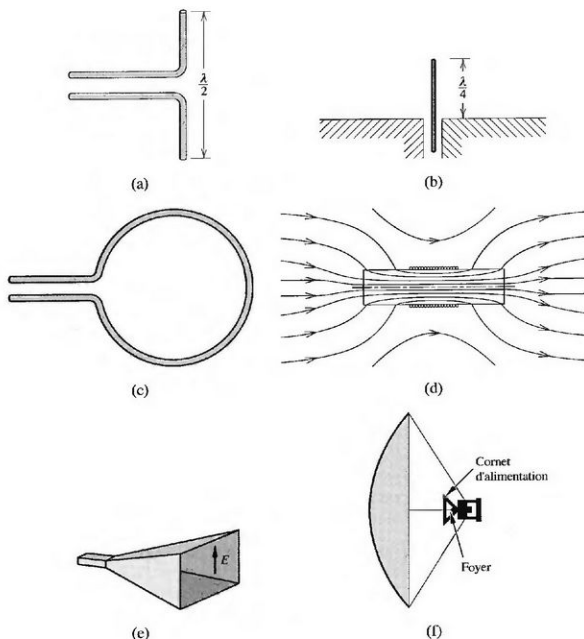


Figure 25.8 Différents types d'antennes.

(a) Demi-onde. (b) Quart d'onde, ou fouet. (c) Cadre ou dipôle magnétique. (d) Antenne-cadre avec un noyau de ferrite qui concentre le champ magnétique. (e) Antenne à corne. (f) Antenne parabolique.

Les téléphones portables fonctionnent à environ 900 MHz, et leurs antennes sont des *bobines hélicoïdales* flexibles qui agissent plus ou moins comme un monopôle électrique et un dipôle magnétique.

Les antennes à *ouverture* sont de trois types. Les *antennes à corne* sont fixées à l'extrémité d'un guide d'onde métallique creux (Partie 24.4) comme en Fig. 25.8(e). Les *réflecteurs* sont généralement des paraboloïdes alimentés par des cornets, comme en Fig. 25.8(f). Des *lentilles* sont parfois utilisées devant les cornets ou les paraboloïdes. Les *antennes-relais micro-ondes*, au sommet des tours ou des bâtiments élevés, sont des paraboloïdes, souvent enfermés dans des capots de protection.

Le radar (RADio Direction And Ranging) est utilisé dans le contrôle du trafic aérien près des aéroports. L'antenne est alors un paraboloïde alimenté par un ou plusieurs cornets, et le faisceau est en forme d'éventail, large verticalement et étroit horizontalement. L'antenne tourne autour d'un axe vertical. L'émetteur envoie des impulsions courtes qui sont réfléchies par les avions à proximité, et le retard temporel de l'écho est une mesure de la distance de la cible. La plupart des radars fonctionnent vers 1 à 10 GHz.

25.3 LES ANTENNES QUART D'ONDE ET DEMI-ONDE

L'antenne quart d'onde de la Fig. 25.8(b), avec son image dans le plan conducteur, agit comme si elle faisait une demi-longueur d'onde de long. Ainsi nous devons étudier le rayonnement de l'antenne de la Fig. 25.8(a), de longueur $\lambda/2$, où λ est la longueur d'onde dans le vide. Voir la Fig. 25.9.

L'antenne porte une onde de courant stationnaire avec un ventre au centre et des nœuds aux extrémités. Donc

$$I = I_m \cos \frac{l}{\lambda} \exp j\omega t \quad (25.62)$$

Chaque élément de longueur dl rayonne comme un dipôle électrique.

Le rayonnement est isotrope dans un plan perpendiculaire à la feuille.

La description de l'antenne demi-onde est contradictoire, car l'onde stationnaire le long du conducteur ne peut être réellement sinusoïdale qu'en l'absence de perte d'énergie, c'est-à-dire s'il n'y a pas de rayonnement. Dans une antenne réelle la distribution de courant n'est pas tout à fait sinusoïdale, mais la distorsion n'affecte presque pas le champ. L'onde stationnaire de courant est la somme de deux ondes, l'une dans la direction positive de l et l'autre en direction négative, chacune d'amplitude $I_m/2$:

$$I = \frac{I_m}{2} \left\{ \exp j \left(\omega t - \frac{l}{\lambda} \right) + \exp j \left(\omega t + \frac{l}{\lambda} \right) \right\} \quad (25.63)$$

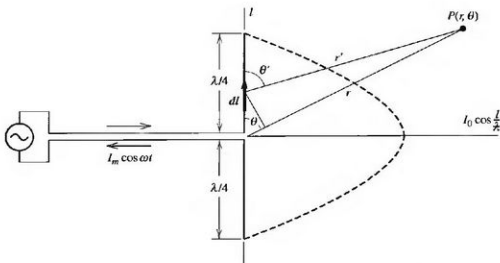


Figure 25.9 Antenne demi-onde.

La ligne pointillée indique l'onde stationnaire de courant en $\cos \omega t = 1$. Le champ en $P(r, \theta)$ est indépendant de la coordonnée ϕ .

25.3.1 Le champ E

On se place en $r \gg \lambda$ et $\theta' \approx \theta$. Comme d'habitude, on utilise les crochets pour les grandeurs évaluées à $t - r/c$. D'après le paragraphe 25.1.5,

$$dE = -\frac{[dp]}{4\pi\epsilon_0\lambda^2 r} \sin\theta \hat{\theta} = -\frac{\omega^2[dp]}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin\theta \hat{\theta} \quad (25.64)$$

$$= \frac{\mu_0 j\omega[I] dl}{4\pi r'} \sin\theta \hat{\theta} \quad (25.65)$$

où

$$r' = r - l \cos\theta \quad (25.66)$$

comme en Fig. 25.9. Donc

$$dE = \frac{\mu_0 j\omega I_m}{8\pi r'} \left\{ \exp j\left(\omega[t'] - \frac{l}{\lambda}\right) + \exp j\left(\omega[t'] + \frac{l}{\lambda}\right) \right\} \sin\theta dl \hat{\theta} \quad (25.67)$$

On intègre maintenant sur la longueur de l'antenne pour trouver **E** au point (r, θ) . On peut remplacer le r' au dénominateur par r car $r \gg \lambda$, si bien que $r \gg l$. Cependant, on ne doit pas remplacer r' par r dans

$$[t'] = t - \frac{r'}{c} \quad (25.68)$$

car les phases des termes exponentiels varient très rapidement avec r' . On prend donc

$$[t'] \approx t - \frac{r - l \cos\theta}{c} = [t] + \frac{l \cos\theta}{c} \quad (25.69)$$

En un point donné de l'espace, les dE ont donc tous presque le même module et la même direction, mais leurs phases diffèrent. Tous ces vecteurs sont orientés dans la direction du vecteur unitaire local $\hat{\theta}$. Remarquons que par symétrie il n'y a pas de composante $\hat{\phi}$, et pas non plus de composante $\hat{r}$. Alors

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu_0 j\omega I_m}{8\pi r} \sin\theta \exp j\omega[t] \\ &\times \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} \left\{ \exp j \frac{l(\cos\theta - 1)}{\lambda} + \exp j \frac{l(\cos\theta + 1)}{\lambda} \right\} dl \hat{\theta} \end{aligned} \quad (25.70)$$

En intégrant il vient

$$\begin{aligned} E &= \frac{jI_m}{4\pi\epsilon_0 r} \sin\theta \exp j\omega[t] \\ &\times \left\{ \frac{\sin\{\pi(\cos\theta - 1)/2\}}{\cos\theta - 1} + \frac{\sin\{\pi(\cos\theta + 1)/2\}}{\cos\theta + 1} \right\} \hat{\theta} \end{aligned} \quad (25.71)$$

où

$$\sin \frac{\pi(\cos\theta - 1)}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \quad \sin \frac{\pi(\cos\theta + 1)}{2} = +\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \quad (25.72)$$

Donc

$$\mathbf{E} = \frac{j}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\cos\{(\pi/2)\cos\theta\}}{\sin\theta} [I] \hat{\theta} \quad (25.73)$$

$$\approx 60, 0j \frac{\cos\{(\pi/2)\cos\theta\}}{r \sin\theta} [I] \hat{\theta} \quad (25.74)$$

Cette expression est indéterminée en $\theta = 0$ et en $\theta = \pi$. Mais, selon la règle de L'Hospital, la valeur limite d'un tel rapport est égale à la valeur limite du rapport des dérivées. Ainsi $\mathbf{E}$ est nul sur l'axe d'une antenne demi-onde, en accord avec le fait que les dipôles élémentaires ne rayonnent pas le long de l'axe.

Le module de $\mathbf{E}$ est indépendant de la fréquence ! L'explication est que le $\mathbf{E}$ d'un dipôle élémentaire, pour un courant donné, est proportionnel à $1/\lambda$, et que l'antenne fait $\lambda/2$ de long.

25.3.2 Le champ $\mathbf{H}$

La valeur de $\mathbf{H}$ se déduit immédiatement. On a trouvé dans la partie 25.1.6 que, pour un dipôle électrique, $\mathbf{H}$ est azimutal et que

$$\frac{E}{H} = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} = 377 \quad \Omega \quad (r \gg \lambda) \quad (25.75)$$

Par conséquent, dans le champ lointain d'une antenne demi-onde,

$$\mathbf{H} = \frac{j}{2\pi r} \frac{\cos\{(\pi/2)\cos\theta\}}{\sin\theta} [I] \hat{\phi} \quad (r \gg \lambda) \quad (25.76)$$

25.3.3 Le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ et la puissance P rayonnée

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting est

$$\mathcal{S}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (25.77)$$

$$= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2\{(\pi/2)\cos\theta\}}{\sin^2\theta} \frac{I_{\text{eff}}^2}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (25.78)$$

$$\simeq 9,543 \frac{\cos^2\{(\pi/2)\cos\theta\}}{\sin^2\theta} \frac{I_{\text{eff}}^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{W/m}^2 \quad (25.79)$$

Pour obtenir la puissance rayonnée, on intègre sur une sphère de rayon r :

$$P = \frac{I_{\text{eff}}^2}{4\pi^2\epsilon_0 r^2} 2\pi \int_0^\pi \frac{\cos^2\{(\pi/2)\cos\theta\}}{\sin^2\theta} r^2 \sin\theta d\theta \quad (25.80)$$

L'intégrale est égale à 1,2188267 et

$$P = 73,083 I_{\text{eff}}^2 \approx 73 I_{\text{eff}}^2 \quad \text{W} \quad (25.81)$$

La *radio-résistance* d'une antenne demi-onde vaut environ 73 Ω .

Cf. exercices : 25.8 ; 25.9 ; 25.10.

25.4 RÉSEAUX D'ANTENNES

Les antennes dipolaire électrique et quart d'onde sont toutes deux omnidirectionnelles dans le plan équatorial : leurs champs rayonnés sont indépendants de l'angle azimutal ϕ .

Les antennes omnidirectionnelles sont utilisées, par exemple, pour les radios de voiture et les téléphones sans fils ou portables. Mais, pour beaucoup d'applications, le champ rayonné, ou la sensibilité, doit être maximal dans une direction donnée. Cela s'obtient avec des réseaux d'antennes judicieusement espacées et déphasées. Les antennes individuelles peuvent être identiques, régulièrement espacées et orientées dans la même direction, comme dans les exemples ci-dessous. Le *diagramme de rayonnement* d'un réseau a typiquement un lobe principal et des lobes latéraux.

La directivité d'une antenne est la même, qu'elle soit utilisée comme émetteur ou comme récepteur. En ce qui concerne les réseaux, il est plus commode de considérer leur directivité en tant qu'antennes *émettrices*.

La *directivité* d'une antenne est définie de la façon suivante :

$$D = \frac{\Phi_{\text{lobe principal}}}{\Phi_{\text{moyen}}} \quad (25.82)$$

où Φ est l'*intensité rayonnée*, en watt par stéradian. On montre, dans le problème 25.12, que la directivité d'un dipôle électrique vaut 1,5 et que la directivité d'une antenne demi-onde est légèrement plus grande. Ces antennes ne rayonnent pas sur leur axe.

Le réseau le plus simple est une paire d'antennes quart d'onde séparées et déphasées de manière à ce que l'interférence entre les deux champs donne le diagramme de rayonnement approprié. Voir l'exemple suivant.

Les *réseaux linéaires* comprennent plusieurs antennes, souvent identiques, disposées en ligne droite. Par exemple, les radio-télescopes comprennent souvent plusieurs réflecteurs paraboliques disposés sur deux lignes perpendiculaires. En modifiant les phases des réflecteurs individuels on fait tourner le lobe principal — ou la direction de sensibilité maximale — d'un côté ou de l'autre. Les antennes d'un réseau à *rayonnement transversal* sont toutes en phase, et le champ rayonné est maximal dans la direction perpendiculaire au réseau. Les antennes d'un réseau à *rayonnement longitudinal* sont espacées et déphasées afin que le rayonnement soit maximal dans la direction parallèle au réseau.

Le réseau le plus courant est l'antenne *Yagi-Uda*, ou *antenne en échelle*. L'antenne Yagi-Uda est un réseau à rayonnement longitudinal. Il existe une grande variété de telles antennes, et la Fig. 25.10 montre la configuration la plus simple. Ces antennes sont utilisées à des fréquences jusqu'à 2,5 GHz, principalement pour la télévision. L'une des barres, qui est une antenne demi-onde, est alimentée, tandis que les autres sont passives : le réflecteur et les directeurs oscillent dans le champ de l'antenne pilote. La directivité est obtenue en choisissant soigneusement leur longueur et leur espacement. Ces réseaux ont des directivités de l'ordre de 10.

Certains *réseaux plans* fonctionnent à des longueurs d'onde de l'ordre du centimètre et comprennent beaucoup d'antennes, parfois des milliers, disposées sur une surface plane rectangulaire ou circulaire. On contrôle précisément la direction du faisceau et

le diagramme de rayonnement en quelques microsecondes, en décalant les phases des antennes individuelles.

Les *antennes-pastilles conformées* (Partie 25.2) sont intégrés à une surface donnée, souvent cylindrique.

Les *antennes réceptrices adaptatives* ajustent automatiquement leur diagramme de rayonnement pour optimiser le rapport signal-sur-bruit en présence de sources de bruit identifiables.

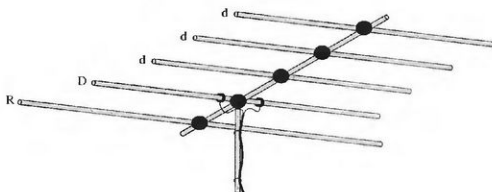


Figure 25.10 Réseau d'antennes Yagi-Uda le plus simple, vu de dessous.

Les disques noirs sont des isolateurs. *D*, antenne demi-onde alimentée, au centre; *R*, réflecteur; *d*, directeurs. Les éléments ont tous à peu près la même longueur et sont séparés par environ un quart de longueur d'onde. Les longueurs et espacements réels déterminent les phases. Ils sont calculés théoriquement pour obtenir une impédance d'entrée et une directivité appropriées.

Exemple : Le diagramme de rayonnement d'un réseau simple d'antennes à rayonnement longitudinal

La figure 25.11 montre une vue de dessus de deux antennes quart d'onde parallèles et verticales. Rappelons que d'après la partie 25.3, le champ d'une antenne quart d'onde verticale et de son image sur un plan conducteur est le même que celui de l'antenne demi-onde des Figs. 25.8(a) et 25.9.

On veut trouver le diagramme de rayonnement tridimensionnel du réseau, soit E en champ lointain en fonction de θ et ϕ , avec l'origine des coordonnées sphériques à l'origine O de la Fig. 25.11. On trouve d'abord la dépendance de E en ϕ , qui provient de l'interférence entre les deux antennes, puis on multiplie par la dépendance en θ trouvée dans la partie 25.3. Cette simple multiplication est valide *en champ lointain*, qui nous intéresse ici.

On veut illuminer la région à *droite* du réseau. Voici comment.

Choisissons un espacement de $\lambda/4$, le courant dans *A* précédant le courant dans *B* de $\pi/2$:

$$I_A = I_B \exp(j\pi/2) \quad (25.83)$$

Alors l'onde provenant de *A* arrive en *B* avec une phase

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = 0 \quad (25.84)$$

et les deux ondes s'ajoutent. Mais une onde provenant de B arrive en A avec une phase

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = -\pi \quad (25.85)$$

et les deux ondes s'annulent. Ainsi, à droite les deux ondes s'ajoutent, mais à gauche elles s'annulent. Nous sommes sur la bonne voie !

Rappelons-nous maintenant que, selon l'Éq. 25.74, dans le champ lointain d'une antenne demi-onde, dans le plan $\theta = \pi/2$

$$E = 60,0 j \frac{[I]}{r} \quad (25.86)$$

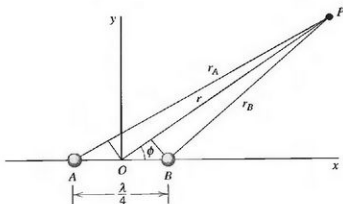


Figure 25.11 Réseau à rayonnement longitudinal.

Ce réseau est composé de deux antennes quart d'onde parallèles, verticales, vues du dessus. La phase de A précède celle de B de $\pi/2$. Les figures 25.12 et 25.13 représentent le diagramme de rayonnement dans le plan xy et à trois dimensions.

Alors en P ,

$$E = 60,0 j \left(\frac{[I_A]}{r_A} + \frac{[I_B]}{r_B} \right) \quad (25.87)$$

Pensons en termes d'une antenne imaginaire située à l'origine O et parcourue par un courant I . Alors par rapport à cette antenne imaginaire, la phase de A est $+\pi/4$ et celle de B , $-\pi/4$. Ainsi, en P ,

$$[I_A] = I \exp j \left(\frac{\pi}{4} - \frac{r_A}{\lambda} \right) \quad (25.88)$$

$$[I_B] = I \exp j \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{r_B}{\lambda} \right) \quad (25.89)$$

Le courant I , ici, n'est pas retardé. C'est le courant dans l'antenne imaginaire à l'origine, à l'instant t .

Rappelons-nous maintenant l'astuce que nous avons utilisée au paragraphe 25.1.2 : on peut prendre $r_A \approx r_B \approx r$ dans les dénominateurs. Alors

$$E = \frac{60,0j}{r} I \left\{ \exp j \left(\frac{\pi}{4} - \frac{r_A}{\lambda} \right) + \exp j \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{r_B}{\lambda} \right) \right\} \quad (25.90)$$

où

$$r_A = r + (\lambda/8) \cos \phi \quad r_B = r - (\lambda/8) \cos \phi \quad (25.91)$$

si bien que

$$E = \frac{60,0j}{r} I (e_A + e_B) \quad (25.92)$$

avec

$$e_A = \exp j \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{r + (\lambda/8) \cos \phi}{\lambda} \right\} \quad (25.93)$$

$$= \exp j \left(-\frac{r}{\lambda} \right) \exp j \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{(\lambda/8) \cos \phi}{\lambda} \right\} \quad (25.94)$$

et

$$e_B = \exp j \left\{ -\frac{\pi}{4} - \frac{r - (\lambda/8) \cos \phi}{\lambda} \right\} \quad (25.95)$$

$$= \exp j \left(-\frac{r}{\lambda} \right) \exp j \left\{ -\frac{\pi}{4} + \frac{(\lambda/8) \cos \phi}{\lambda} \right\} \quad (25.96)$$

Comme $(\lambda/8)/\lambda = \pi/4$,

$$e_A = \exp j \left(-\frac{r}{\lambda} \right) \exp j \left\{ \frac{\pi}{4} (1 - \cos \phi) \right\} \quad (25.97)$$

$$e_B = \exp j \left(-\frac{r}{\lambda} \right) \exp j \left\{ \frac{\pi}{4} (-1 + \cos \phi) \right\} \quad (25.98)$$

Or⁽¹⁾

$$\cos \alpha = \frac{\exp(j\alpha) + \exp(-j\alpha)}{2} \quad (25.99)$$

Alors

$$e_A + e_B = \exp j \left(-\frac{r}{\lambda} \right) 2 \cos \left\{ \frac{\pi}{4} (1 - \cos \phi) \right\} \quad (25.100)$$

En substituant dans l'Éq. 25.92,

$$E = \frac{60,0j}{r} I \exp j \left(-\frac{r}{\lambda} \right) 2 \cos \left\{ \frac{\pi}{4} (1 - \cos \phi) \right\} \quad (25.101)$$

C'est le diagramme de rayonnement dans le plan $\theta = \pi/2$, ou plan xy . Voir la Fig. 25.12.

Vérifions. En $\phi = 0$, $\cos \phi = 1$ et $2 \cos 0 = 2$: le champ est deux fois plus grand que celui d'une antenne seule. En $\phi = \pi$, $\cos \phi = -1$ et $2 \cos(2\pi/4) = 2 \cos(\pi/2) = 0$.

(1) En cas de doute, essayer pour $\alpha = 0, \pi/4$ et $\pi/2$.

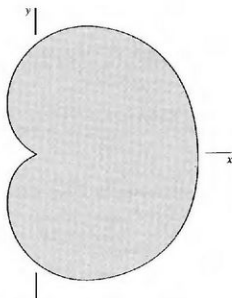


Figure 25.12 Diagramme de rayonnement pour l'antenne à rayonnement longitudinal de la Fig. 25.11 dans le plan xy .

C'est un graphe de la fonction $2 \cos\{(\pi/4)(1 - \cos \phi)\}$. Sur l'axe x à droite, $\phi = 0$ et le champ net est deux fois plus grand que celui d'une antenne seule. À gauche, $\phi = \pi$ et le champ est nul.

Ainsi, E est maximal dans la direction $\phi = 0$ et nul dans la direction $\phi = \pi$, comme demandé.

Pour obtenir le diagramme de rayonnement tridimensionnel en champ lointain du réseau de la Fig. 25.11, on multiplie cette fonction par la dépendance en θ que nous avons trouvée au paragraphe 25.3.1. Voir la Fig. 25.13. La directivité convient pour une antenne de radio-télévision près d'une ville.

Plus il y a d'éléments dans un réseau, plus il est directionnel.

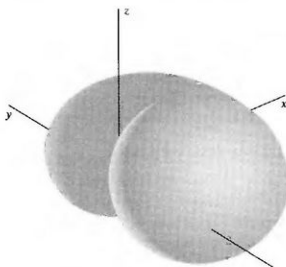


Figure 25.13 Diagramme de rayonnement tridimensionnel pour l'antenne à rayonnement longitudinal de la Fig. 25.11.

Cf. exercices : 25.12 ; 25.12 ; 25.13.

25.5 RÉSUMÉ

Dans le champ d'un *petit dipôle électrique* de longueur s , en un point (r, θ) , avec

$$r \gg \lambda \gg s, \quad (25.1)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_m \exp j(\omega t - r/\lambda) s}{4\pi r} \quad (25.8)$$

$$V = \frac{j[p]}{4\pi\epsilon_0\lambda r} \cos \theta \quad (25.24)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{[p]}{4\pi\epsilon_0\lambda^2 r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (25.46)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{c[p]}{4\pi\lambda^2 r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (25.53)$$

$$\frac{E}{H} = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (25.54)$$

Dans la région près du dipôle, où la condition $r \gg \lambda$ n'est *pas* satisfaite, les Éqs. 25.55 et 25.56 s'appliquent.

Même près du dipôle,

$$\mathcal{S}_{\text{moy}} = \frac{\mu_0 \pi^2 f^4 p_{\text{eff}}^2}{c r^2} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{r}} \quad (25.59)$$

et la puissance rayonnée est donnée par

$$P = \frac{8\mu_0 \pi^3}{3c} f^4 p_{\text{eff}}^2 \quad (25.61)$$

Dans le champ d'une *antenne quart d'onde*,

$$\mathbf{E} = \frac{j}{2\pi c \epsilon_0 r} \frac{\cos \{(\pi/2) \cos \theta\}}{\sin \theta} [I] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (25.73)$$

$$\mathbf{H} = \frac{j}{2\pi r} \frac{\cos \{(\pi/2) \cos \theta\}}{\sin \theta} [I] \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (25.76)$$

et E/H a la même valeur que ci-dessus. En outre,

$$\mathcal{S}_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi c \epsilon_0} \frac{\cos^2 \{(\pi/2) \cos \theta\}}{\sin^2 \theta} \frac{I_{\text{eff}}^2}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (25.78)$$

et

$$P \simeq 73,083 I_{\text{eff}}^2 \simeq 73 I_{\text{eff}}^2 \quad \text{W} \quad (25.81)$$

Les champs rayonnés par des dipôles électriques et des antennes quart d'onde sont indépendants de l'angle azimutal ϕ . Mais les *réseaux* d'antennes séparées et déphasées de façon appropriée peuvent rayonner un champ dans une direction donnée. La directivité d'un réseau est la même, qu'il soit utilisé en émission ou en réception.

EXERCICES

25.1 Moment dipolaire d'une charge oscillante

Une charge Q oscille le long de l'axe z , et $z = z_m \exp j\omega t$.

Quel est le moment dipolaire d'un dipôle oscillant équivalent ? On peut trouver l'équivalence de la façon suivante. Si les courants sont les mêmes, alors les $\mathbf{A}$ sont les mêmes. Alors les $\mathbf{V}$ sont les mêmes, d'après la condition de Lorentz (Partie 21.7). Donc les $\mathbf{E}$ et les $\mathbf{H}$ sont identiques.

25.2 Diagramme de rayonnement d'un dipôle électrique

Quelle fraction de la puissance totale du champ d'un dipôle électrique est rayonnée à moins de 45° du plan équatorial ?

25.3 Densités d'énergie électrique et magnétique dans le champ d'un dipôle électrique

Calculer le rapport entre la moyenne temporelle de la densité d'énergie électrique et la moyenne temporelle de la densité d'énergie magnétique dans le champ d'un dipôle électrique (a) pour $r \ll \lambda$, (b) pour $r = \lambda$ et (c) pour $r \gg \lambda$.

25.4 Vecteur de Poynting et densité d'énergie dans le champ d'un dipôle électrique

Montrer que, pour $r \gg \lambda$, le module du vecteur de Poynting dans le champ d'un dipôle électrique est égal à la densité d'énergie totale multipliée par c .

25.5 Le paradoxe de la source lumineuse

Toutes les sources lumineuses devraient être noires, pour la raison suivante. Prenons le Soleil, par exemple. Un cône dans la rétine de l'œil collecte le rayonnement émis par un grand nombre d'atomes. Ces sources sont incohérentes.

À un instant quelconque il y a un nombre presque infini de vecteurs dans le plan complexe, tous de modules et de phases différents, tournant à des vitesses différentes. Leur somme vectorielle est évidemment nulle.

Le même raisonnement s'applique à n'importe quel objet, disons un mur blanc, illuminé par de la lumière incohérente. Le rayonnement qui arrive sur un cône donné provient d'une surface qui a un diamètre de plusieurs longueurs d'onde. À nouveau, le champ net dans le cône devrait être nul et le mur devrait apparaître noir.

Pour expliquer ce paradoxe, considérons N ondes de même fréquence et de même polarisation linéaire, mais de module et de phase aléatoires. Le nombre N est très grand. Pour la $i^{\text{ème}}$ onde, $E_i = E_m \exp j(\omega t - \alpha_i)$ dans le cône, et le champ net E est la somme des E_i .

Or, l'œil est sensible non pas à E mais à S , et donc à EE^* . Montrer que $S_{\text{moy}} = \sum_i S_i$. Cela signifie que le flux net d'énergie est égal à la somme des flux d'énergie des ondes individuelles.⁽¹⁾

(1) Vous avez probablement remarqué que la lumière laser diffusée par un mur ou une feuille de papier a une structure granulaire. La figure se déplace si on bouge la tête d'un côté ou de l'autre. Ce phénomène est appelé *speckle* ou *tavelure*. Il est utilisé pour étudier les surfaces.

Le speckle se forme de la façon suivante. Chaque point sur l'objet, disons la feuille de papier, produit sur la rétine une figure de diffraction dont la forme et la taille dépendent des caractéristiques optiques de l'œil. Comme le rayonnement est cohérent, il y a interférence entre ces figures, et le champ varie d'un point à l'autre sur la rétine.

25.6 Évolution cosmologique

On considère une classe d'objets astronomiques, par exemple les quasars. On suppose qu'ils sont tous identiques et distribués uniformément dans un univers euclidien.

Montrer que, si N est le nombre d'objets dont le flux radio-fréquence sur Terre est supérieur à S , alors un graphe de $\log N$ en fonction de $\log S$ doit être une droite de pente $-1,5$. La pente pour les quasars est, en fait, plus grande. C'est probablement une mesure de l'évolution cosmique.

25.7 Polarisation de la lumière du ciel

L'atmosphère diffuse la lumière du Soleil. Faire un dessin représentant le Soleil, la Terre et un vecteur $\mathbf{E}$ sur un rayon de lumière diffusé. Expliquer pourquoi la lumière du ciel est polarisée. Elle n'est que partiellement polarisée car elle est diffusée plusieurs fois.

25.8 Diagrammes de rayonnement du dipôle électrique et de l'antenne demi-onde

(a) Montrer que dans le champ lointain d'un dipôle électrique, $E_{\text{eff}} = 6,71 P^{1/2} \sin \theta / r$.

(b) Montrer que pour une antenne demi-onde

$$E_{\text{eff}} = 7,02 \frac{P^{1/2} \cos\{(\pi/2) \cos \theta\}}{r \sin \theta}$$

(c) Tracer E_{eff} en fonction de θ pour les deux champs.

(R) 25.9 Champ électrique d'une antenne radio

Calculer E à une distance d'1 km dans le plan équatorial d'une antenne radio demi-onde qui rayonne 1 kW de puissance. On prendra $\lambda \ll 1$ km.

25.10 Image d'une antenne quart d'onde

Une antenne est généralement située près d'un conducteur (la Terre, un avion, un satellite, etc.). L'énergie rayonnée vers le conducteur est réfléchi, et le champ total est donc la somme vectorielle de l'onde directe plus l'onde réfléchi. Il est pratique de considérer que cette dernière est engendrée, non par réflexion, mais par une image de l'antenne située sous la surface du conducteur.

(a) Montrer que le courant dans l'image d'une antenne demi-onde *horizontale* et le courant dans l'antenne s'écoulent en directions opposées.

(b) Montrer que le courant dans l'image d'une antenne quart d'onde *verticale* et celui dans l'antenne s'écoulent dans la même direction.

Les deux règles sont valables pour des antennes quart d'onde obliques.

(c) On a montré que la radio-résistance d'une antenne demi-onde est 73,083 Ω . Trouver la radio-résistance d'une antenne quart d'onde perpendiculaire à un plan conducteur.

25.11 Diagramme de rayonnement d'un réseau linéaire d'antennes demi-onde

Un *réseau linéaire* consiste en des antennes demi-onde parallèles disposées sur un plan. On considère N antennes, espacées uniformément d'une distance D et excitées en phase.

(a) Montrer que, dans le plan perpendiculaire aux antennes,

$$E \propto \frac{\sin\{(ND/2\lambda)\cos\phi\}}{\sin\{(D/2\lambda)\cos\phi\}}$$

où ϕ est l'angle entre la direction d'observation et le plan du réseau. La meilleure approche consiste à ajouter graphiquement dans le plan complexe les E individuels.

(b) Trouver les positions angulaires des minima et maxima de E . La dérivation ne donne que les maxima.

(c) Montrer que, pour un espacement D donné, le lobe principal en $\phi = \pi/2$ devient plus étroit quand N augmente.

(d) Tracer E en fonction de θ entre 0 et 360° pour un réseau de 30 antennes demi-onde parallèles, en phase et espacées de $\lambda/4$.

(e) Tracer maintenant la même fonction, en utilisant les coordonnées cartésiennes, entre 0 et 180° avec une échelle logarithmique pour l'axe E .

(f) Expliquer pourquoi le lobe principal est deux fois plus large que les deux lobes voisins.

(g) Montrer que sa demi-largeur (l'angle entre le maximum et le premier minimum d'un côté ou de l'autre) est approximativement égale à λ/l , où l est la longueur du réseau.

25.12 Directivité d'une antenne

La *directivité* d'une antenne peut aussi être définie comme le rapport entre le vecteur de Poynting au maximum du diagramme de rayonnement et le vecteur de Poynting moyenné sur une surface sphérique qui entoure l'antenne :

$$D = \frac{S_{\max}}{P/(4\pi r^2)} = \frac{S_{\max}}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S \sin\theta \, d\theta \, d\phi}$$

où P est la puissance rayonnée.

(a) Montrer que la directivité d'un dipôle électrique vaut 1,5.

(b) Montrer que la directivité d'une antenne demi-onde est 1,64.

25.13 Diagramme de rayonnement d'un réseau simple

Deux antennes quart d'onde parallèles sont perpendiculaires au sol, en phase et espacées de $\lambda/2$. Tracer le diagramme de rayonnement bidimensionnel au niveau du sol, et le diagramme tridimensionnel au-dessus du sol. Indiquer la position des antennes sur les figures.

Annexe A

Préfixes et symboles du Système International d'unités (SI)

Multiple	Préfixe	Symbole	Multiple	Préfixe	Symbole
10^{-24}	yocto	y	10	déca	da
10^{-21}	zepto	z	10^2	hecto	h
10^{-18}	atto	a	10^3	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^6	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^9	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	milli	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zetta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yotta	Y

Attention : le symbole du préfixe est accolé à celui de l'unité, *sans* point. Par exemple, mN signifie millinewton, tandis que m.N représente un mètre-newton, soit un joule.

Annexe B

Table de conversion SI-cgs

Exemples : Un mètre fait 100 cm.

Un volt vaut 10^8 unités électromagnétiques de potentiel.

Grandeur	SI	Systèmes cgs	
		esu	emu
Longueur	mètre	10^2 cm	10^2 cm
Mass	kilogramme	10^3 g	10^3 g
Temps	seconde	1 s	1 s
Force	newton	10^5 dynes	10^5 dynes
Pression	pascal	10 dynes/cm ²	10 dynes/cm ²
Énergie	joule	10^7 erg	10^7 erg
Puissance	watt	10^7 erg/s	10^7 erg/s
Charge	coulomb	3×10^9	10^{-1}
Potentiel électrique	volt	$1/300$	10^8
Champ électrique	volt par mètre	$1/(3 \times 10^4)$	10^6
Flux électrique	coulomb	$12\pi \times 10^9$	$4\pi \times 10^{-1}$
Induction électrique	coulomb par mètre carré	$12\pi \times 10^5$	$4\pi \times 10^{-5}$
Polarisation	coulomb par mètre carré	3×10^5	10^{-5}
Courant électrique	ampère	3×10^9	10^{-1}
Conductivité	siemens par mètre	9×10^9	10^{-11}
Résistance	ohm	$1/(9 \times 10^{11})$	10^9
Conductance	siemens	9×10^{11}	10^{-9}
Capacité	farad	9×10^{11}	10^{-9}
Flux magnétique	weber	$1/300$	10^8 maxwell
Induction magnétique	tesla	$1/(3 \times 10^6)$	10^4 gauss
Champ magnétique	ampère par mètre	$12\pi \times 10^7$	$4\pi \times 10^{-3}$ oersted
Force magnétomotrice	ampère	$12\pi \times 10^9$	$4\pi/10$ gilbert
Aimantation	ampère par mètre	$1/(3 \times 10^{13})$	10^{-3}
Inductance	henry	$1/(9 \times 10^{11})$	10^{-9}
Réductance	ampère par weber	$36\pi \times 10^{11}$	$4\pi \times 10^{-9}$

Remarque : On a pris $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Annexe C

Histoire des équations de « Maxwell »

L'histoire des équations de Maxwell est fascinante sous bien des aspects⁽¹⁾.

Tout d'abord, comme nous le verrons, les équations devraient plutôt s'appeler équations de Heaviside.

Deuxièmement, l'histoire couvre à peine le troisième quart du dix-neuvième siècle.

Troisièmement, il y avait peu de *Maxwelliens*, les principaux acteurs étant Oliver Heaviside (1850–1925), autodidacte, George Francis FitzGerald (1851–1901), qui travaillait au Trinity College à Dublin, Oliver Lodge (1851–1940), de University College à Liverpool, et Heinrich Hertz (1857–1894), physicien expérimental au Karlsruhe Physik Institut. John-Henry Poynting (1852–1914) apporta une contribution majeure avec son théorème en 1884, mais Heaviside le découvrit presque en même temps. James Clerk Maxwell (1831–1879) fut un acteur par la publication en 1873 de son *Traité sur l'électricité et le magnétisme*. Au moment de sa mort, il travaillait sur une seconde édition de son *Traité*.

Quatrièmement, tous les acteurs étaient britanniques, excepté Hertz qui était allemand. Maxwell, écossais, devint Professeur de Physique Expérimentale à Cambridge, mais près sa mort il n'y eut aucun Maxwellien à Cambridge, ni à Oxford.

Cinquièmement, l'acteur principal était Heaviside, qui avait dû quitter l'école à l'âge de seize ans. Il commença comme télégraphiste à Newcastle, où il resta huit ans, mais n'eut plus de véritable travail durant le reste de sa vie. C'était un écrivain prolifique, malgré sa mauvaise santé et sa vie recluse, en partie par tempérament, en partie à cause de sa surdité, et aussi à cause de son extrême pauvreté. Pendant de nombreuses années publia ses théories dans la revue professionnelle « The electrician ». Il en était payé

¹⁾ La meilleure référence est Hunt [17], mais on peut consulter aussi Bork [4], Heaviside [15, 16], Gillispie [12] Harman [14].

40 livres par an, soit moins que le salaire d'un laboureur. Vers la fin de sa vie il reçut du gouvernement une modeste pension de 120 livres par an, mais demeura excessivement pauvre et misérable malgré tous les honneurs dont il était l'objet. Bien qu'autodidacte, il était devenu l'un des meilleurs, sinon le meilleur, physicien-mathématicien de son temps.

Le *Traité* de Maxwell est illisible. Hunt [17], qui regrette clairement d'avoir passé tant de temps dessus, le dit décousu, obscur, incohérent, contradictoire, maladroit, déroutant et, sur certains points, tout simplement faux ; il prétend qu'il n'a ni but clair, ni présentation ordonnée, et que les mathématiques y sont lourdes et contournées ! C'est un miracle que les Maxwelliens aient réussi à le dominer. Maxwell avait une grande admiration pour Faraday, et tentait de mettre ses idées sous forme mathématique.

Le *Traité* n'énonce pas les équations de Maxwell, car Maxwell raisonnait essentiellement en termes des potentiels V (alors appelé ψ) et A . Le passage de V et A à E et B suscita beaucoup de débat à propos du « meurtre de ψ ». Les potentiels en vinrent alors à être considérés comme des artifices mathématiques.

Heaviside se concentra sur le *champ* électromagnétique, comme Faraday et Maxwell. Sa motivation principale était l'amélioration des signaux dans les câbles sous-marins. Il reformula finalement en 1884 la théorie de Maxwell sous la forme des quatre équations « de Maxwell » vectorielles, la même année que Hertz les exprima sous forme cartésienne. Hertz reconnut que Heaviside avait la priorité, eu égard au fait que sa propre « démonstration » était « branlante ». À l'époque, la notation vectorielle semblait hautement ésotérique à tout le monde.

La Physique moderne doit beaucoup à Heaviside. Il fut le premier à appliquer l'analyse vectorielle, telle que nous la connaissons aujourd'hui, aux champs électromagnétiques, et le premier à utiliser des unités *rationalisées*. (Avec des unités non rationalisées, il apparaît des facteurs 4π dans la plupart des équations importantes.) Il découvrit le théorème de *Poynting* la même année que Poynting. Il proposa l'existence de la couche de Heaviside⁽¹⁾ et développa le Calcul Opérationnel. Il découvrit aussi la force de « Lorentz » $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 15 ans avant Hendrick Lorentz (1853–1928). Dès 1888, il calcula les champs E et B d'une charge en mouvement (Partie 13.2). C'est un résultat très important, car il montre comment le champ se contracte longitudinalement, et que la *contraction implique le facteur γ de la relativité* ! Ce phénomène fut appelé plus tard *contraction de FitzGerald* et servit à expliquer le résultat négatif de l'expérience de Michelson-Morley.

(1) C'est une région dans l'atmosphère supérieure où le degré d'ionisation varie avec l'altitude de telle sorte que les ondes radio à basse fréquence sont réfléchies vers le bas. Aux fréquences TV, les ondes s'incurvent légèrement et s'échappent.

Annexe D

Champs et potentiels retardés

Dans les livres plus avancés, par exemple le Lorrain, Corson et Lorrain [32], on déduit ces équations suivantes.

D.1 LE POTENTIEL ÉLECTRIQUE RETARDÉ V

L'équation d'onde pour V est

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{D.1})$$

Cette équation s'applique à un point où le potentiel électrique est V et la densité de charge électrique, ρ . On a supposé que les charges électriques sont situées dans le vide. Aux points où $\rho = 0$ le membre de droite est nul et, si $\partial/\partial t = 0$, on a l'équation de Poisson de la partie 4.1.

Si ρ n'est pas constant, alors en x, y, z et à l'instant t ,

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z', t - r/c)}{r} dV' \quad (\text{D.2})$$

où les coordonnées primées désignent la distribution de charge, r est la distance entre le point source x', y', z' et le point champ x, y, z , et $dV' = dx' dy' dz'$. C'est le *potentiel électrique retardé*.

D.2 LE POTENTIEL VECTEUR RETARDÉ $\mathbf{A}$

L'équation d'onde pour $\mathbf{A}$ est similaire à celle pour V :

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{D.3})$$

et sa solution est similaire : si $\mathbf{J}$ n'est pas constant, alors le *potentiel vecteur retardé* est

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t - r/c)}{r} dV' \quad (\text{D.4})$$

D.3 LE CHAMP ÉLECTRIQUE RETARDÉ $\mathbf{E}$

L'équation d'onde pour $\mathbf{E}$, toujours dans le vide, est plus compliquée :

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{grad} \rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (\text{D.5})$$

Le premier terme du membre de droite provient de l'accumulation de charge, et le second des champs magnétiques variables. Le *champ électrique retardé* vaut

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{[\mathbf{grad}' \rho + \epsilon_0 \mu_0 (\partial \mathbf{J} / \partial t)]}{r} dV' \quad (\text{D.6})$$

Les *crochets* ont ici une signification particulière : ils désignent une grandeur qui doit être évaluée à l'instant *antérieur* $t - r/c$. Le gradient primé est calculé par rapport aux coordonnées x', y', z' du point source.

D.4 LE CHAMP MAGNÉTIQUE RETARDÉ $\mathbf{H}$

L'équation d'onde pour $\mathbf{H}$, dans le vide, s'écrit

$$\Delta \mathbf{H} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\mathbf{rot} \mathbf{J} \quad (\text{D.7})$$

et le *champ magnétique retardé* vaut

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\mathbf{rot}' \mathbf{J}]}{r} dV' \quad (\text{D.8})$$

À nouveau, le rotationnel primé concerne les variables du point source x', y', z' , et les crochets signifient que le rotationnel est évalué à l'instant $t - r/c$.⁽¹⁾

(1) Dans le cas du dipôle électrique, en coordonnées cylindriques, $\mathbf{rot} \mathbf{J}$ se réduit à $-(\partial J_z / \partial \rho) \hat{\phi}$, et la dérivée n'est pas définie.

Annexe E

Définitions et identités vectorielles, constantes physiques et équations de Maxwell

E.1 DÉFINITIONS ET IDENTITÉS VECTORIELLES

E.1.1 Définitions

Coordonnées rectangulaires

1)

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

2)

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3)

$$\text{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

4)

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

5)

$$\Delta \mathbf{A} = \Delta A_x \hat{x} + \Delta A_y \hat{y} + \Delta A_z \hat{z} = \text{grad} (\text{div} \mathbf{A}) - \text{rot} (\text{rot} \mathbf{A})$$

Coordonnées cylindriques

6)

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

7)

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

8)

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z}$$

9)

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

10)

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad} (\text{div } \mathbf{A}) - \text{rot} (\text{rot } \mathbf{A}) \quad (\text{Partie 1.10})$$

Coordonnées sphériques

11)

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

12)

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

13)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

14)

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

15)

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad} (\text{div } \mathbf{A}) - \text{rot} (\text{rot } \mathbf{A}) \quad (\text{Partie 1.10})$$

E.1.2 Identités vectorielles

1)

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

2)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

3)

$$\text{grad}(fg) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f$$

4)

$$\text{grad}(a/b) = (1/b)\text{grad } a - (a/b^2)\text{grad } b$$

5)

$$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \text{grad})\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\text{rot } \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\text{rot } \mathbf{B})$$

N.B. : Valable uniquement en coordonnées cartésiennes.

6)

$$\text{div}(f\mathbf{A}) = (\text{grad } f) \cdot \mathbf{A} + f(\text{div } \mathbf{A})$$

7)

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\text{rot } \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\text{rot } \mathbf{B})$$

8)

$$(\text{div grad})f = \Delta f$$

9)

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0$$

10)

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$$

11)

$$\text{rot}(f\mathbf{A}) = (\text{grad } f) \times \mathbf{A} + f(\text{rot } \mathbf{A})$$

12)

$$\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \text{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} + (\text{div } \mathbf{B})\mathbf{A} - (\text{div } \mathbf{A})\mathbf{B}$$

N.B. : Valable uniquement en coordonnées cartésiennes.

13)

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (\text{Partie 1.10})$$

14)

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} &= \left[A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{x}} \\ &+ \left[A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{y}} \\ &+ \left[A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

15) $\text{grad}'(1/r) = \hat{\mathbf{r}}/r^2$. C'est le gradient calculé en (x', y', z') , et $\hat{\mathbf{r}}$ est le vecteur unitaire orienté de (x', y', z') vers (x, y, z) .

16) $\text{grad}(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$. C'est le gradient calculé en (x, y, z) avec le même vecteur unitaire $\hat{\mathbf{r}}$.

17) $\mathcal{A} = (1/2) \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$, où la surface d'aire $\mathcal{A}$ est plane. Le vecteur $\mathbf{r}$ va d'une origine arbitraire à un point de la courbe C qui délimite $\mathcal{A}$.

18) $\int_V \text{grad } f \, dV = \int_{\mathcal{A}} f \, d\mathcal{A}$.

- 19) $\int_V (\text{rot } \mathbf{A}) dV = - \int_A \mathbf{A} \times d\mathbf{A}$, où A est l'aire de la surface fermée qui délimite le volume V .
- 20) $\oint_C f d\mathbf{l} = - \int_A \text{grad } f \times d\mathbf{A}$, où C est la courbe fermée qui délimite la surface ouverte d'aire A .

Théorèmes

- 1) Théorème de la divergence.
 $\int_A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV$, où A est l'aire de la surface fermée qui délimite le volume V .
- 2) Théorème de Stokes.
 $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{A}$.

E.2 CONSTANTES PHYSIQUES⁽¹⁾

Charge élémentaire	$e = 1,602177 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse électronique au repos	$m = 9,10938 \times 10^{-31} \text{ kg}$ $= 5,10999 \times 10^5 \text{ eV}$
Masse du proton au repos	$m_p = 1,67262 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $= 9,38272 \times 10^8 \text{ eV}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 \equiv 8,85418782 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ $1/(4\pi\epsilon_0) = 8,9875518 \times 10^9 \text{ m/F}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6,02213 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,3806 \times 10^{-34} \text{ J/K}$
Constante de Planck	$h = 6,626069 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ $\hbar = h/(2\pi) = 1,054572 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
Constante gravitationnelle	$G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$
Masse du Soleil	$1,98596 \times 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$6,965 \times 10^8 \text{ m}$
Distance moyenne Terre-Soleil	$1,495 \times 10^{11} \text{ m}$
Vitesse orbitale moyenne de la Terre	$2,98 \times 10^4 \text{ m/s}$
Masse de la Terre	$5,974 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la Terre	$6,378 \times 10^6 \text{ m}$
Masse de la Lune	$7,3305 \times 10^{22} \text{ kg}$
Rayon de la Lune	$1,74 \times 10^6 \text{ m}$
Distance Terre-Lune	$3,84393 \times 10^8 \text{ m}$

(1) Voir « The fundamental physical constants », P. J. Mohr et B. N. Taylor, *Physics Today Buyer's Guide*, Août 1999.

E.3 ÉQUATIONS DE MAXWELL

E.3.1 Forme locale

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_l - \operatorname{div} \mathbf{P} \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M} \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\end{aligned}$$

E.3.2 Forme intégrale

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathcal{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho dV \\ \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} &= 0 \\ \int_{\mathcal{A}'} (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \cdot d\mathcal{A}' &\equiv \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \int_{\mathcal{A}'} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A}' &\equiv \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\mathcal{A}'} \mathbf{J} \cdot d\mathcal{A}'\end{aligned}$$

avec

$$\Lambda = \int_{\mathcal{A}'} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A}'$$

Le volume $\mathcal{V}$ est délimité par la surface fermée $\mathcal{A}$. Les surfaces $\mathcal{A}'$ sont des surfaces ouvertes délimitées par les courbes C .

E.3.3 Forme locale, pour des champs sinusoïdaux, en termes de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} (\varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho_l \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -j\omega \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \\ \operatorname{div} (\mu_r \mu_0 \mathbf{H}) &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}_l + j\omega \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}\end{aligned}$$

Réponses

Les problèmes consistent souvent en la démonstration d'un résultat donné ; la liste ci-dessous fournit environ la moitié des réponses restantes, avec deux chiffres significatifs.

1.5 (b) $4\pi a^3$.

2.7 (a) 85 W ; (b) idem.

3.1 $\mathbf{E} = - \left[Q / (2^{5/2} \pi \epsilon_0 a^2) \right] \hat{\mathbf{x}}$.

3.6 89 m/s.

3.9 (b) 440 mm.

3.11 (b) $3,3 \times 10^{-3}$ N ; (d) 6 μ s.

3.14 (a) (i) 10^{19} atomes/m², (ii) 1,6 C/m², (iii) $1,8 \times 10^{11}$ V/m ; (b) 240 diamètres atomiques, soit 0,07 μ m.

3.17 (a) $Q\lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$.

4.2 (a) B, E, D sont au même potentiel ; F, C, H sont à un autre potentiel.

4.3 (a) $1,5 \times 10^{20}$ N ; (b) $1,5 \times 10^{20}$ J ; (c) $4,1 \times 10^{13}$ \$; (d) 5 000 ans.

4.13 $E_p s - I s / (\mathcal{A} \sigma)$.

4.16 1,9 N.

5.3 $(4/3)\pi R^3 \sigma_0 \hat{\mathbf{z}}$.

5.7 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \frac{Qs \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \frac{Qs^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3 \cos^2 \theta}{2} - \frac{1}{2} \right)$.

5.9 $\rho a^3 / (4\pi\epsilon_0 r), 0, 0$.

5.11 $0, [a^4 Q / (16\pi\epsilon_0 r^5)] [35(l^4 + m^4 + n^4) - 21]$.

6.2 (a) $0, 15 Q^2 / (\pi \epsilon_0 R)$; (b) $3GM^2 / (5R')$; (c) $1,2 \times 10^{29}$ J ; (d) 0,17 m ; (e) $1,0 \times 10^{20}$ V.

6.10 (a) $W_1/W_2 = C_2/C_1$; (b) $W_1/W_2 = C_1/C_2$.

6.13 (b) 56 pF/m.

6.20 (a) 150 kV; (b) 4×10^{-4} atm; (c) 4 kg/m².

7.1 (a) $5,7 \times 10^{-37}$ C.m; (b) $5,9 \times 10^{-19}$ m.

7.12 (a) $[2\pi\epsilon_r\epsilon_0/\ln(R_2/R_1)] V$.

8.2 $\frac{(\epsilon_r 2\sigma_{co1} - \epsilon_r 1\sigma_{co2})\epsilon_0}{s_1\sigma_{co2} + s_2\sigma_{co1}} V$.

8.4 4 000.

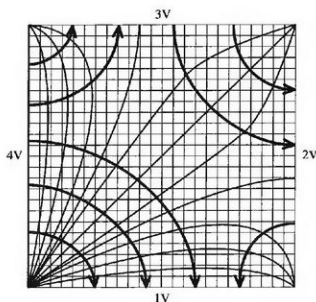
8.9 (b) 10 m³, 10 t.

8.14 25 μm.

8.18 2,5 atm.

9.2 (a) $-2QD/[4\pi(D^2 + r^2)^{3/2}]$.

9.10 25 × 25 cellules, 400 itérations.



Problème 9.10 Équipotentielles (tous les 0,25 V) et lignes de E.

10.6 (a) $\rho_0(a^2 + b^2)(a + b)/(12\epsilon_0 r^2)$.

11.2 Pour O', les signaux ont été émis simultanément. Pour O, B a émis son signal en premier.

11.3 (a) $\tan \alpha = \gamma \tan \alpha'$; (b) $\pi/2$.

12.4 $2,6 \times 10^{-27}$ kg; $2,27 \times 10^8$ m/s.

12.6 (a) $7,1 \times 10^{-26}$ kg; (b) 38 mm; (c) 10^{-5} s; $1,28 \times 10^{-10}$ s.

12.7 (a) Négatif. La lumière est plus rouge. (b) Pour le Soleil, $-2,1 \times 10^{-6}$. Pour la Terre, $-7,0 \times 10^{-10}$. (c) $-2,1 \times 10^{-6}$. (d) $5,2 \times 10^7$ fois la densité de l'eau. (e) $\Delta\nu/\nu = 6,9 \times 10^{-6}$, ce qui correspond à environ trois fois le déplacement vers

le rouge. (f) Quand le proton s'éloigne, l'augmentation de son énergie potentielle compense exactement la diminution de son énergie cinétique.

13.3 (a) $2,3 \times 10^{-22}$ N; (b) $7,7 \times 10^{-23}$ N.

14.2

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{D-x} + \frac{1}{D+x} \right).$$

14.5 (a) $erv/2$; (b) $9,3 \times 10^{-24}$ A.m².

14.9

$$\mu_0 N I a^2 \left\{ \frac{1}{2 [(z+a/2)^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{1}{2 [(z-a/2)^2 + a^2]^{3/2}} \right\}.$$

15.2 (a) $330 \mu\text{A}$; (b) $4,2 \times 10^{-2}$ T.

15.4 (a) $\mu_0 \alpha/2$.

15.8 $L \ln \dots / (R_2 - R_1)$.

16.1 2.

16.4 $\theta = \pi/4$.

16.11 $B, B/\mu_0$.

17.1 (a) 3×10^{13} m; (b) 7,3 jours.

17.2 (b) $2,2 \times 10^{18} \hat{y}$ m/s².

17.5 1,2; 2,7.

17.7 (c) $1,4 \times 10^{-4}$ V.

17.10 (b) Pour H_1^+ , 0,077 T; pour H_2^+ , 0,11 T; pour H_3^+ , 0,13 T.

17.13 (a) $8,7 \times 10^8$ A/m²; (b) très chaud; (c) vers l'Est.

17.17 (a) $AV\omega/R - A^2\omega^2/R$.

18.3 (a) La charge s'écoule de manière à compenser le champ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$; (b) 31 A; (c) $1,5 \times 10^{-2}$ N; (d) pour un diamètre de 10 m, $I = 30 \mu\text{A}$, $P \simeq 1 \mu\text{W}$, $F \simeq 2 \times 10^{-10}$ N.

18.4 (a) 1,2 mV; (b) 0.

18.11 $P_{\text{max}} = \pi \sigma \omega^2 B_{\text{eff}}^2 s a^4 / 8$.

18.13 (a) $B_0 \omega^2 \cos(2\omega t - \phi)$; (b) 2 kHz.

19.2 $3,4 \times 10^{-7} R$ H.

19.5 (b) L'inductance mutuelle varie comme le cosinus de l'angle de rotation; (c) non.

19.7 (a) $R' = \frac{2\pi a}{\sigma b}$, $L' = \mu_0 \pi^2$; (b) $\left(\frac{4+x^2}{4+4x^2} \right)^{1/2}$, $x = \omega \mu_0 \sigma a b$.

19.8 $L = R_b R_d C$, $R = R_b R_d / R_c$.

20.2 (a) $4,4 \text{ J/m}^3$; (b) $4,0 \times 10^5 \text{ J/m}^3$.

- 20.5** $2,9 \times 10^4$ A.tr.
- 20.8** (a) 22 kW.h/m^3 ; (b) 780 atm ; (c) $0,083 \text{ kW.h/m}^3$.
- 20.13** (a) 4 atm ; (b) la même.
- 20.16** (c) $-(R/2)(\partial B_z/\partial z)$, $m(\partial B_z/\partial z)$; (d) $I\pi R^2(\partial B_z/\partial z)$.
- 21.2** (a) $\mu_0 QV \sin \theta/(4\pi r^2)$; (b) soit $\gamma = 1$, $V/c = 0$. Les deux valeurs coïncident; (d) Q .
- 21.8** (a) $\frac{\varepsilon_0 k b}{s}(a-x)$; (b) $\mathbf{B} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 k}{s}(a-x)\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{A} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 k}{s}(a-x)z\hat{\mathbf{x}}$; (c) 0. Au-dessus de la plaque supérieure, $(\varepsilon_0 \mu_0 k/s)(a-x)\hat{\mathbf{x}}/2$. En dessous de la plaque supérieure, $\mathbf{A}$ est de même module et de signe opposé.
- 21.9** (e) $1,2 \times 10^{-8} \text{ m}$.
- 21.10** (a) $-\sigma_{cv} RC/\varepsilon$.
- 22.6** (a) $E = iR'$, $H = I/(2\pi a)$, $|\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = I^2 R'/(2\pi a)$, vers l'intérieur. $2\pi a EH = I^2 R'$ est la puissance dissipée par mètre. La puissance s'écoule radialement du champ vers le fil. (b) À l'extérieur, $2\pi r EH = I^2 R'(r^2/a^2)$ est la puissance entrant dans la région intérieure à r .
- 22.11** (a) $\frac{I^2}{16\pi\varepsilon_0 v^2} \left(1 + 4 \ln \frac{R_2}{R_1}\right)$; (b) $\mathcal{E}'_m = \frac{v^2}{c^2} \mathcal{E}'_e$; (c) $2\mathcal{E}'_e v$; (d) $\frac{Imv^2}{2e}$, ou IV ;
(e) $2,0 \times 10^{-10} \text{ J/m}$; $4,2 \times 10^{-13} \text{ J/m}$; $5,5 \times 10^{-3} \text{ W}$; 10^3 W .
- 23.7** $F = [1 - (1 - n_2^2/n_1^2)^{1/2}]/2$.
- 23.8** (a) 17° ; (e) $F \simeq 0,020$; $T \simeq 0,69$; $FT \simeq 1,4 \%$.
- 24.7** $\lambda_0 = 4a(n_2^2 - n_3^2)^{1/2} \text{ m}$.
- 25.2** 88% .
- 25.9** $0,22 \text{ V/m}$.